

OPPGAVER I NOTAT 1

Oppgave 1: Vis at den totale emittansen (utstrålt energi pr tids- og flateenhet) fra en svart overflate ved temperatur T ,

$$j(T) = \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu,$$

er proporsjonal med T^4 , dvs $j(T) = \sigma T^4$, og bestem proporsjonalitetskonstanten σ (som kalles Stefan–Boltzmanns konstant), når det oppgis at

$$\int_0^\infty x^3 (e^x - 1)^{-1} dx = \pi^4/15.$$

[Hint: Innfør $x = h\nu/k_B T$ som ny integrasjonsvariabel. Svar: $\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Se tabellen over fysiske konstanter bakerst i dette notatet.]

Oppgave 2: Fra Einsteins fotonhypotese og Plancks strålingslov (T1.2) følger det at antall fotoner pr volum- og frekvensenhet i en bakerovn ved temperatur T er $n(\nu, T) = u(\nu, T)/h\nu$. Vis at antall fotoner pr volumenhet, $n(T) = \int_0^\infty n(\nu, T) d\nu$, er

$$n(T) = 2.029 \cdot 10^7 \text{ T}^3 \text{ m}^{-3} \text{ K}^{-3},$$

og at gjennomsnittsennergien for disse fotonene er

$$\bar{E} = \frac{u(T)}{n(T)} = 2.701 k_B T,$$

når det oppgis at $\int_0^\infty x^2 (e^x - 1)^{-1} dx = 2.4041$.

Oppgave 3: Vis at et foton med bølgelengde λ har energi

$$E_\gamma = 1.24 \cdot 10^{-6} \frac{\text{eV m}}{\lambda}.$$

[Hint: Bakerst i dette Notatet finner du Plancks konstant både i enhetene eVs og Js=Nms. I denne oppgaven vil du finne at det er praktisk å bruke $h = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$. Moral: Vær bevisst på hvilke enheter du bruker i numeriske beregninger.]

Frigjøringsarbeidet W (dvs bindingsenergien for de løsest bundne elektronene) for cesium (Cs) og gull (Au) er hhvis 1.9 eV og 4.8 eV. Avgjør om fotoelektrisk effekt er mulig med synlig lys ($0.4 \mu\text{m} < \lambda < 0.7 \mu\text{m}$) for disse to stoffene. [Vis at fotonenergiene for synlig lys ligger i området $1.77 \text{ eV} \lesssim h\nu \lesssim 3.1 \text{ eV}$.]

Oppgave 4: En 25-watts lyspære emitterer ca 10% av effekten i det synlige bølgelengdeområdet. Gjør et omtrentlig overslag over antallet fotoner som sendes ut fra pæra pr sekund i dette λ -området. Med nattsyn kan øyet registrere en lyskilde som er så svak at bare ca 5 fotoner passerer pupillen pr sekund. Anta en pupilleåpning på ca 0.5 cm^2 . Hvor langt borte kan pæra sees?

[Hint: Siden det er snakk om et overslag, kan du bruke en foton-energi som svarer til en bølgelengde midt i det synlige spektret, $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$. Svar: Ca 2300 km.]

Oppgave 5: Gjør siste del av oppgave 3 side 20 i Hemmer.

Oppgave 6: Skriv ned Compton-relasjonen for spredning av et foton på et proton. Hvordan vil du definere Compton-bølgelengden for et proton?

Oppgave 7:

a. Regn ut de Broglie-bølgelengden λ for elektroner med en kinetisk energi på 200 eV. [Svar: ca 0.9 Å .]

b. Anta at elektroner i et fjernsynsrør har kinetisk energi 20 keV, altså en faktor 100 større enn i pkt. **a**. Hva blir (det ikke-relativistiske resultatet for) bølgelengden i dette tilfellet? [Svar: En faktor 10 mindre enn i pkt. **a**.]

c. Bruk den relativistiske formelen $p = \sqrt{E^2/c^2 - m_e^2 c^2}$ (der $E = E_{kin} + m_e c^2$) til å vise at forholdet mellom den relativistiske (dvs korrekte) verdien for impulsen p og den ikke-relativistiske verdien ($p = \sqrt{2m_e E_{kin}}$) er $\sqrt{1 + E_{kin}/2m_e c^2}$. Hvor stor er da den relative feilen i bølgelengden i pkt. **b**? [Svar: Den korrekte verdien for bølgelengden er ca 1 prosent mindre enn verdien i pkt. **b**.]

Oppgave 8:

A) Når en operator virker på en funksjon, fås vanligvis en *ny* funksjon. Hva blir f.eks resultatene om du lar operatoren $\partial/\partial x$ virke på funksjonene $\exp(-x^2)$, $\sin kx$ og $\cos kx$?

B) Det *kan* også hende at en operator anvendt på en funksjon gir som resultat samme funksjon multiplisert med en konstant. Funksjonen kalles da en egenfunksjon til vedkommende operator, og konstanten kalles en egenverdi til operatoren. Vis f.eks at $\exp(ikx) [= \cos kx + i \sin kx]$ er en egenfunksjon til operatoren $\hat{p}_x = (\hbar/i)\partial/\partial x$, og finn egenverdien.

C) Vis at funksjonen $e^{-x^2/2}$ er en egenfunksjon til operatoren $\hat{h} = -\frac{1}{2}d^2/dx^2 + \frac{1}{2}x^2$ og bestem egenverdien.

Oppgave 9: Noen kontrollspørsmål og små oppgaver:

1. Hvilken fysisk observabel (dvs: observerbar (målbar) fysisk størrelse) svarer til operatoren $\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$?
2. Hvilken operator $\hat{K}$ svarer til den kinetiske energien $K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \mathbf{p}^2/2m$?
3. Vis at de Broglie-bølgen $\Psi_3 = \exp[i(px - p^2t/2m)/\hbar]$ er en egenfunksjon til impulsoperatorene $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$ og $\hat{p}_z$ og til kinetisk-energi-operatoren $\hat{K}$, og bestem de respektive egenverdiene.
4. Samme sak for $\Psi_4 = \exp[i(-px - p^2t/2m)/\hbar]$.
5. Hvilke fysiske impulser svarer de to de Broglie-bølgene ovenfor til?
6. Vis at $\cos kx$ ikke er en egenfunksjon til $\hat{p}_x$.
7. Vis at Ψ_3 oppfyller den tidsavhengige Schrödingerligningen (T1.24) for en fri partikkel.
8. Vis at realdelen av Ψ_3 *ikke* oppfyller (T1.24).
9. Ifølge superposisjonsprinsippet (T1.35) er $\Psi_9 = \Psi_3 + \Psi_4$ en løsning av (T1.24), og derfor en fysisk akseptabel bølgefunksjon for en fri partikkel. Er Ψ_9 en egenfunksjon til $\hat{K}$? Er Ψ_9 en egenfunksjon til $\hat{p}_x$? Beskriver Ψ_9 en fysisk tilstand med veldefinert impuls?
10. Ved termisk likevekt vil atomene i en enatomig gass (ifølge det såkalte ekvipartisjonsprinsippet) ha en gjennomsnittlig energi på $\frac{1}{2}k_B T$ pr frihetsgrad, dvs $\frac{3}{2}k_B T$ pr atom. Når nøytroner bremses opp i en såkalt moderator i en kjernereaktor, ender de opp som "termiske" nøytroner, i likevekt med omgivelsene, dvs med en gjennomsnittlig kinetisk energi $\frac{3}{2}k_B T$. Anta $T = 300$ K og finn den gjennomsnittlige kinetiske energien K til nøytronene i elektronvolt (eV). Regn også ut de Broglie-bølgelengden som svarer til denne kinetiske energien K . [Svar: $\lambda = 1.46$ Å.]
11. Vis at funksjonen $\psi = Ce^{ikx}$ er en egenfunksjon til impulsoperatoren $\hat{p}$ (se (T1.22)), og bestem egenverdien.
12. Skriv ned (og *memorer*) den tidsavhengige Schrödingerligningen (SL) og den tidsuavhengige Schrödingerligningen (TUSL) for en partikkel med masse m som beveger seg i et tredimensjonalt potensial $V(\mathbf{r})$.
13. Hva blir SL og TUSL når potensialet er endimensjonalt, $V = V(x)$? [Hint: det klassiske uttrykket for energien er da $E = p_x^2/2m + V(x)$.]