Oppgave 1. Bohrmodellen. (Poeng: 10)

I Bohrs modell for hydrogenatomet antar man at elektronet går i sirkelbane rundt kjernen, med kvantisert dreieimpuls,

$$L = |\boldsymbol{L}| = rmv = n\hbar,$$

med $n = 1, 2, 3, \ldots$ og $\hbar = h/2\pi$ (den reduserte Planck konstant). Her er m elektronmassen, r er sirkelbanens radius og v er elektronets hastighet. Vis at disse to (feilaktige!) antagelsene gir (de korrekte!) energinivåene

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2} \quad \left(\simeq -\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{n^2}\right).$$

Oppgitt: $\quad F = q_1q_2/4\pi\varepsilon_0 r^2 \qquad V = q_1q_2/4\pi\varepsilon_0 r \qquad a = v^2/r$

Oppgave 2. Fri partikkel og partikkel i boks. (Poeng: 30)

En fri partikkel med masse m befinner seg i det konstante potensialet $V = 0$ og beskrives av (den ikke–normerbare) bølgefunksjonen

$$\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)},$$

dvs en plan bølge. Her er k å anse som en kjent størrelse.

a) Uttrykt ved hjelp av k, hva er partikkelens impuls p, bølgelengde λ, energi E, og vinkelfrekvens ω?

b) Hva er sannsynlighetsstrømmen j assosiert med denne partikkelen?

Dersom partikkelen begrenses til å bevege seg mellom $x = 0$ og $x = L$ (dvs $V = 0$ for $0 < x < L$ og $V = \infty$ ellers), er de mulige stasjonære tilstandene

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-iE_n t/\hbar} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

c) Vis at Schrödingerligningen nå gir

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

som de mulige energiegenverdiene for partikkelen.

d) For en partikkel som befinner seg i en gitt tilstand $\Psi_n(x,t)$, hva er forventningsverdiene $\langle x_n\rangle$ og $\langle p_n\rangle$ for henholdsvis posisjon og impuls? (Tips: Symmetri.)

e) For en partikkel som befinner seg i en gitt tilstand $\Psi_n(x,t)$, begrunn hvorfor usikkerheten (standard-avviket) i partikkelens impuls, Δp, ikke kan være mindre enn $\hbar/L$.

f) Anta at en partikkel beskrives av (den ikke–stasjonære men normerte) tilstanden

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{5} c_n\Psi_n(x,t) \;\text{ med }\; c_1 = c_5 = \frac{1}{4}\,,\; c_2 = c_4 = \frac{1}{2}\,,\; c_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Bestem forventningsverdien $\langle E\rangle$ til partikkelens energi.

Oppgave 3. Molekyler og spektroskopi. (Poeng: 10)

a) Vibrasjoner i nitrogenmolekylet N_2 kan med brukbar tilnærmelse betraktes som en enkel endimensjonal harmonisk oscillator, med egenfrekvens $\nu = \omega/2\pi \simeq 7.1 \cdot 10^{13}$ Hz. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere N_2 fra laveste til nest laveste vibrasjonsnivå?

b) Rotasjonsbevegelsen til nitrogenmolekylet N_2 kan med brukbar tilnærmelse betraktes som en stiv rotator. N har atommasse $m_{\mathrm{N}} = 14u$, og bindingslengden i molekylet er $d = 0.11$ nm. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere N_2 fra laveste til nest laveste rotasjonsnivå?

Oppgitt: Tilgjengelig termisk energi ved absolutt temperatur T er ca $k_B T$.

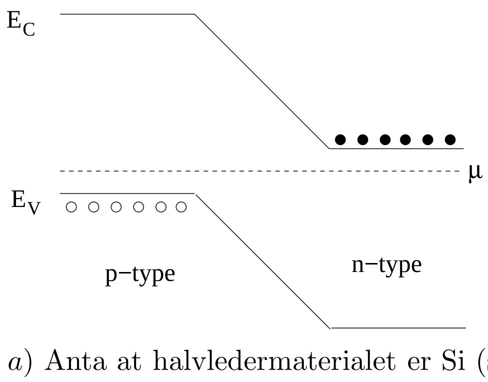
Oppgave 4. Interferens med store molekyler (Poeng: 10)

Dyktige eksperimentalister påviser bølgeegenskaper hos stadig større partikler. I et østerriksk–sveitsisk–tysk samarbeid ble det nylig målt kvantemekanisk interferens ved å sende nanopartikler med hele 810 atomer ($C_{284}H_{190}F_{320}N_4S_{12}$) gjennom et diffraksjonsgitter med spalteavstand 266 nm. (M. Arndt *et al*, *Phys Chem Chem Phys* **15**, 14696 (2013)) Molekylene hadde (gjennomsnittlig) hastighet 85 m/s. De fem ulike elementene som inngår i molekylet, C, H, F, N og S, har atommasser hhv $12u$, $1u$, $19u$, $14u$ og $32u$.

a) Regn ut molekylenes masse, impuls og de Broglie bølgelengde.

b) Bestem avbøyningsvinkelen til 1. ordens intensitetsmaksimum.

Oppgave 5. Halvlederfysikk (Poeng: 25)



Figuren viser valensbånd og ledningsbånd for en *pn*–overgang (diode). Her er E_V, E_C og μ henholdsvis energien ved toppen av valensbåndet, energien ved bunnen av ledningsbåndet og det kjemiske potensialet (like stort overalt i likevekt).

a) Anta at halvledermaterialet er Si (silisium), med 4 valenselektroner. Forklar hvordan man ved å tilsette urenheter (doping) kan lage henholdsvis en *p*–type og en *n*–type halvleder. Forklar hvordan slike urenheter påvirker materialets elektriske ledningsevne.

b) Når en spenningskilde U_0 kobles til *pn*–overgangen, blir strømmen I på formen

$$I(U_0) = I_0 \left(e^{eU_0/k_B T} - 1 \right).$$

Skisser $I(U_0)$ og gi en kvalitativ forklaring på denne strøm–spennings–karakteristikken.

c) Med positiv forspenning ($U_0 > 0$) kan *pn*–overgangen sende ut fotoner og dermed fungere som en lysemitterende diode (LED). Skisser energibåndene ved *pn*–overgangen i denne situasjonen og forklar virkemåten.

d) Silisium har et indirekte båndgap mens galliumnitrid (GaN) har et direkte båndgap. Hva innebærer henholdsvis et indirekte og et direkte båndgap? Hvorfor er det fordelaktig med halvledere med direkte båndgap i en LED?

e) Indiumgalliumnitrid, $\mathrm{In}_x\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{N}$, har et direkte båndgap som avhenger av andelen indium, og som kan varieres fra 0.69 eV ($x = 1$) i InN til 3.4 eV ($x = 0$) i GaN. Regn ut bølgelengdeområdet som kan dekkes av slike LED–pærer når x varieres fra 0 til 1.

Oppgave 6. Kjernefysikk (Poeng: 15)

a) Avbildning med kjernemagnetisk resonans (MRI) er basert på at en magnetisk dipol med magnetisk moment $\boldsymbol{\mu}$ har en potensiell energi som avhenger av dipolens orientering i et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}$,

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Anta hydrogenkjerner med ett proton og kvantisert magnetisk moment $\mu_z = 2.7928\,\mu_N$, med retning parallelt eller antiparallelt med et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ langs z–aksen. Slike kjerner kan da absorbere (og reemittere) fotoner med en energi som tilsvarer at den magnetiske dipolen skifter retning. Bestem fotonenes bølgelengde (i vakuum og luft) når styrken på magnetfeltet er 7.0 T.

b) Væskedråpemodellen gir et empirisk uttrykk for bindingsenergien til atomkjerner med nukleontall A og atomnummer Z (dvs $N = A - Z$ nøytroner):

$$E_B = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm C_5 A^{-4/3}.$$

Her er $C_1 - C_5$ positive empiriske koeffisienter, alle med dimensjon energi. Forøvrig *defineres* en kjernes bindingsenergi som endringen i hvileenergi når atomet ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ splittes opp i Z hydrogenatomer (${}^{1}_{1}\mathrm{H}$) og N nøytroner:

$$E_B/c^2 = Z \cdot M_\mathrm{H} + N \cdot m_n - M_\mathrm{X}.$$

- Hvilket ledd i væskedråpemodellen tar hensyn til at dannelse av heliumkjerner bidrar til å stabilisere kjernen? Begrunn hvorfor.
- Hvilket ledd i væskedråpemodellen tar hensyn til coulombfrastøtningen mellom protonene?

c) Naturlig radioaktivitet skyldes stort sett spontan α–decay (frigjøring av ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$) og spontan β^-–decay (frigjøring av et elektron). Hva skjer med atomnummeret Z i disse prosessene? Hva skjer med nukleontallet A i disse prosessene? Vis at ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ (radon) kan omdannes til den stabile isotopen ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ (bly) via α– og β^-–decay. Hvor mange av hver?

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

- Plancks strålingslov ($I(\nu, T)$ = utstrålt energi pr tids-, flate- og frekvensenhet):

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2\left(e^{h\nu/k_BT} - 1\right)}$$

- Fotoelektrisk effekt:

$$U = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Relativistisk energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.
- Bølger:

$$c = \lambda\nu$$

- de Broglie:

$$\lambda = h/p \quad , \quad \nu = E/h$$

- Schrödingerligningen (SL):

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi$$

- Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL):

$$\widehat{H}\psi = E\psi$$

- Operatorer:

$$\widehat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \ , \ \widehat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \ , \ f(p) \to f(\widehat{p})$$

- Heisenbergs uskarphetsprinsipp:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\widehat{x},\widehat{p}]\rangle\right|$$

- Kommutator:

$$[\widehat{x},\widehat{p}] = \widehat{x}\widehat{p} - \widehat{p}\widehat{x}$$

- Stasjonær tilstand:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

- Forventningsverdier:

$$\langle x\rangle = \int \Psi^* x \Psi dx \ , \ \langle p_x\rangle = \int \Psi^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi dx \ , \ \langle F\rangle = \int \Psi^* \widehat{F}\Psi d\tau$$

- Bølgepakke:

$$\Psi(x,t) = \sum_j c_j \psi_j(x) e^{-iE_j t/\hbar} \quad , \quad \langle F\rangle = \sum_j |c_j|^2 F_j$$

- Grensebetingelser:
  $\psi(x)$ kontinuerlig overalt, $d\psi/dx$ diskontinuerlig kun ved ∞ sprang i $V(x)$

- Sannsynlighetsstrøm:

$$j = \mathrm{Re}\left[\Psi^*\left(\frac{\hbar}{mi}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi\right]$$

- Usikkerhet:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \ , \ \Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$$

- Ehrenfests teorem:

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{r}\rangle = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \ , \ \frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{p}\rangle = -\langle \nabla V\rangle$$

- Harmonisk oscillator:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

- Stiv rotator:

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} \ , \ l = 0,1,2,\ldots \ , \ I = \text{treghetsmoment} = \sum_j m_j r_j^2$$

- Redusert masse μ:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots$$

- Konstruktiv interferens:

$$d\sin\theta = n\lambda$$

Fundamentale konstanter:

$$
\begin{aligned}
k_B &= 1.381 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \\
N_A &= 6.022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1} \\
\hbar &= h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \\
e &= 1.602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \\
m_e &= 9.109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \\
m_p &= 1.673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \\
m_n &= 1.675 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \\
u &= 1.661 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \\
c &= 2.998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s} \\
\alpha &= e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1/137.0 \\
a_0 &= 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/e^2 m_e = 0.5292\ \text{Å} \\
\mu_B &= e\hbar/2m_e = 9.274 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{J/T} \\
\mu_N &= e\hbar/2m_p = 5.051 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{J/T} \\
R_\infty &= \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 = 13.61\ \mathrm{eV}
\end{aligned}
$$

Omregningsfaktorer:

$$
\begin{aligned}
1\ \mathrm{eV} &= 1.602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \\
1\ \text{Å} &= 0.1\ \mathrm{nm} = 10^{-10}\ \mathrm{m} \\
1\ \mathrm{T} &= 10^4\ \mathrm{G\ (gauss)} \\
k_B T &\simeq \frac{1}{40}\ \mathrm{eV\ ved}\ T = 300\ \mathrm{K}
\end{aligned}
$$