Matematikk: Komplekse tall

Det er nærmest utenkelig å drive med kvantemekanikk uten å bruke komplekse tall. Her gjennomgår vi det mest grunnleggende og ser samtidig på noen konkrete eksempler.

Vi vet at alle *reelle* tall multiplisert med seg selv resulterer i et *positivt* reelt tall. I den forstand "går det ikke an" å ta kvadratroten av et negativt tall. Men vi kan utvide tallbegrepet og kalle kvadratroten av et negativt tall for et *imaginært* tall, med grunnenheten

$$\sqrt{-1} = i.$$

Ettersom $-4 = -1 \cdot 4$ blir da $\sqrt{-4} = 2i$, og tilsvarende $\sqrt{-25} = 5i$ osv. (Og da $(-2)^2 = 4$, har vi også løsningene $\sqrt{-4} = -2i$ og $\sqrt{-25} = -5i$.) Kombinasjonen (summen) av et reelt tall x og et imaginært tall iy (der y er et reelt tall) kaller vi et *komplekst* tall:

$$z = x + iy.$$

Vi kaller x for *realdelen* av det komplekse tallet z og y for *imaginærdelen* av z, med notasjonen $x = \mathrm{Re}\ z$ og $y = \mathrm{Im}\ z$. Dersom imaginærdelen av et komplekst tall skifter fortegn, får vi den *komplekskonjugerte* av det komplekse tallet:

$$z^* = x - iy.$$

Vanlige regneregler brukes for komplekse tall (dvs, de samme som for reelle tall):

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Av dette følger det at

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) &= \mathrm{Re}\,z_1 + \mathrm{Re}\,z_2 \\ \mathrm{Im}\,(z_1 + z_2) &= \mathrm{Im}\,z_1 + \mathrm{Im}\,z_2 \\ \mathrm{Re}\,(z_1 z_2) &= \mathrm{Re}\,z_1 \mathrm{Re}\,z_2 - \mathrm{Im}\,z_1 \mathrm{Im}\,z_2 \\ \mathrm{Im}\,(z_1 z_2) &= \mathrm{Re}\,z_1 \mathrm{Im}\,z_2 + \mathrm{Im}\,z_1 \mathrm{Re}\,z_2 \end{aligned}$$

Eksempel: Ligningen $z^2 + 2z + 2 = 0$ har løsningene

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}.$$

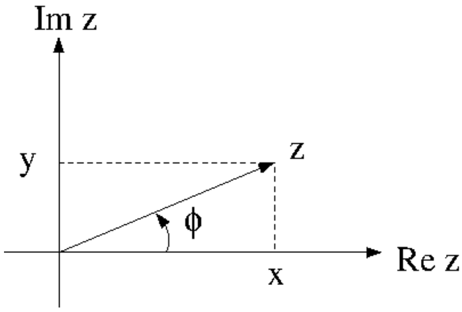
Ligningen har altså ingen reelle løsninger, men derimot de to komplekse løsningene

$$z_1 = -1 + i \quad \text{og} \quad z_2 = -1 - i.$$

Det holder med en *linje* for å beskrive reelle tall – den reelle tall-linjen. Siden et komplekst tall består av to typer tall, et reelt tall og et imaginært tall, trenger vi et *plan* for å beskrive disse – det komplekse plan (figur 1).

Med *kartesiske koordinater* x og y har vi $x = \mathrm{Re}\,z$ langs horisontal akse og $y = \mathrm{Im}\,z$ langs vertikal akse. Som kjent kan et punkt i planet alternativt beskrives med *polarkoordinater* r og ϕ. Dermed kan selvsagt også det komplekse tallet z uttrykkes ved hjelp av polarkoordinatene r og ϕ. Fra figur 1 finner vi sammenhengene

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\phi &= \frac{y}{x} \\ x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}$$



Figur 1: Det komplekse plan.

En meget sentral og nyttig sammenheng er *Eulers formel*,

$$e^{i\phi} \equiv \cos\phi + i\sin\phi.$$

Denne formelen kan bevises ved å rekkeutvikle eksponentialfunksjonen og benytte seg av at $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, $i^6 = -1$ osv:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= 1 + i\phi + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4}{4!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \cdots + i\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \ldots\right) \\ &= \cos\phi + i\sin\phi, \end{aligned}$$

der vi gjenkjenner rekkeutviklingene av $\cos\phi$ og $\sin\phi$ i linje nr 2. Med $z = e^{i\phi}$, med reell ϕ, ser vi at

$$|e^{i\phi}|^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.$$

Dermed kan $e^{i\phi}$ oppfattes som en *enhetsvektor* i det komplekse plan (dvs med lengde lik 1) som danner en vinkel ϕ med den reelle aksen. Vi kan komplekskonjugere ved å skifte fortegn fra i til $-i$:

$$e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi.$$

Kombineres denne med Eulers formel ovenfor, finner vi at

$$\cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) \quad ; \quad \sin\phi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right).$$

Oppgaver (frivillig!)

- Vis at $\cos(\phi_1+\phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2$. Tips: Bruk Eulers formel og utnytt at $\mathrm{Re}\, e^{i(\phi_1+\phi_2)} = \cos(\phi_1+\phi_2)$.
- Vis at $\sin 3\phi = 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi$. Tips: Utnytt at $e^{3i\phi} = (e^{i\phi})^3$ og at $\sin 3\phi = \mathrm{Im}\, e^{3i\phi}$.
- Skriv disse komplekse tallene med polarkoordinater, dvs på formen $re^{i\phi}$: (a) $1+i$; (b) $(-1+2i)^2$; (c) $\sqrt{i}$.
- Dersom vi skriver $z_j = r_j e^{i\phi_j}$ $(j = 1, 2, 3)$, og $z_3 = z_1 z_2$, hva er da r_3 og ϕ_3 uttrykt ved hhv r_1 og r_2, og ved ϕ_1 og ϕ_2?
- Tegn opp det komplekse plan og angi (med en vektor fra origo) et vilkårlig komplekst tall $z = x+iy$ med positive x og y. Angi i samme plan de komplekse tallene z^*, iz, $-iz$ og $-z$.