Matematikk: Løsning, oppgaver om komplekse tall

- Vi har

$$\begin{aligned} e^{i(\phi_1+\phi_2)} &= e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} \\ &= [\cos\phi_1 + i\sin\phi_1][\cos\phi_2 + i\sin\phi_2] \\ &= \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i[\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2]. \end{aligned}$$

  Realdelen må være lik på begge sider av likhetstegnet; følgelig er

$$\cos(\phi_1+\phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2.$$

  En tilsvarende betraktning av imaginærdelen gir da umiddelbart

$$\sin(\phi_1+\phi_2) = \cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2.$$

- Vi har

$$\begin{aligned} e^{3i\phi} &= (e^{i\phi})^3 = (\cos\phi + i\sin\phi)^3 \\ &= \cos^3\phi + 3i\cos^2\phi\sin\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi \end{aligned}$$

  slik at

$$\sin 3\phi = \operatorname{Im} e^{3i\phi} = 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi.$$

- (a) $r = \sqrt{1^2 + |i|^2} = \sqrt{2}$ og $\phi = \arctan(1/1) = \pi/4$, slik at $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

  (b) $(-1+2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$. Dermed er $r = \sqrt{9+16} = 5$ og $\phi = \pi + \arctan(4/3) \simeq \pi + 0.93 = 4.07$ (evt $4.07 - 2\pi = -2.21$). Altså: $(-1+2i)^2 = 5e^{4.07i}$.

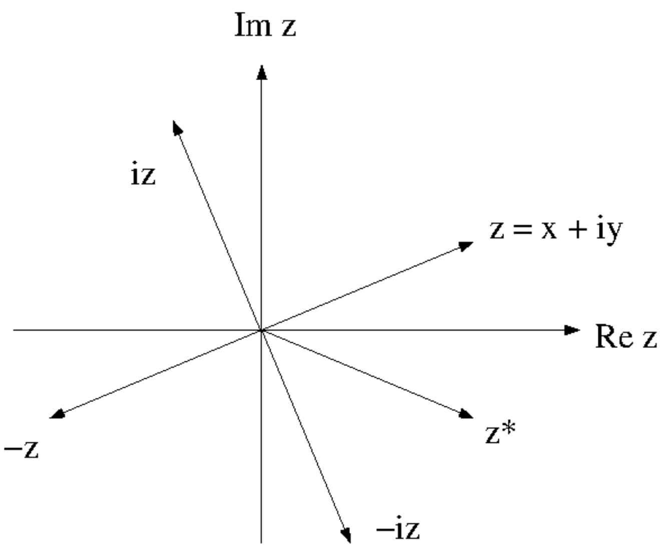
  (c) $r = \sqrt{1} = 1$, $\phi = \pi/4$, dvs $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$.

-

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 z_2 = r_1\, e^{i\phi_1} \cdot r_2\, e^{i\phi_2} \\ &= r_1 r_2\, e^{i(\phi_1+\phi_2)} \\ &= r_3\, e^{i\phi_3}, \end{aligned}$$

  dvs $r_3 = r_1 r_2$ og $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$.

- Figuren nedenfor viser de fem komplekse tallene:



Figur 1: z, z^*, iz, $-iz$ og $-z$.