

FY6019 Moderne fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Øving 5.

Oppgave 1: Partikkel i boks

a) Normering av Ψ :

$$1 = \int_0^L |\Psi(x, 0)|^2 dx.$$

De stasjonære løsningene er ortogonale. Derfor vil "kryssleddene" av typen

$$\int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} dx$$

bli lik null og ikke bidra. Fra forelesningene, og fra oppgave 4 i øving 1, vet vi at de stasjonære løsningene er normert hver for seg med konstanten $\sqrt{2/L}$ foran sinusfunksjonen. Dermed må vi ha

$$\begin{aligned} 1 &= |A|^2 \int_0^L \left(\sin^2 \frac{\pi x}{L} + \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \right) dx \\ &= |A|^2 \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right) \\ \Rightarrow |A|^2 &= \frac{1}{L} \\ \Rightarrow |A| &= \frac{1}{\sqrt{L}} \end{aligned}$$

Her spiller det ingen rolle om vi velger den positive reelle løsningen $A = 1/\sqrt{L}$, den negative reelle løsningen $A = -1/\sqrt{L}$, eller en hvilken som helst kompleks løsning for A , bare absoluttverdien er riktig. Som regel velger vi da $A = 1/\sqrt{L}$.

b) De stasjonære løsningene har tidsavhengig faktor $\exp(-iE_n t/\hbar)$. Her er Ψ en sum av to stasjonære løsninger, med hhv $n = 1$ og $n = 2$, som betyr at

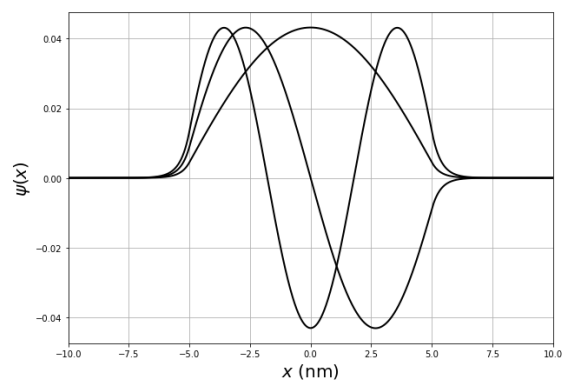
$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\sin \frac{\pi x}{L} e^{-iE_1 t/\hbar} + \sin \frac{2\pi x}{L} e^{-iE_2 t/\hbar} \right),$$

med $E_n = n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2$.

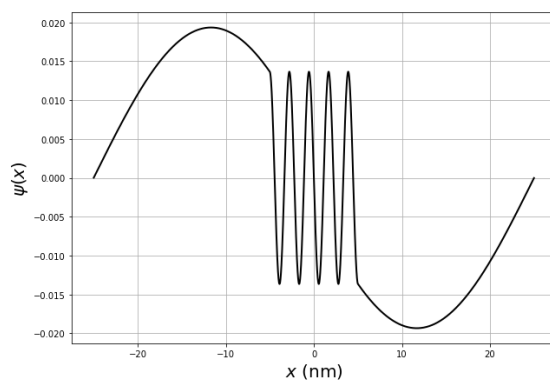
Oppgave 2: Endelig potensialbrønn

a) $\sqrt{2m_e V_0 L} / \pi \hbar = 8.965$ som har heltallsverdi 8, slik at $N = 1 + 8 = 9$. Når `singlewell.py` kjøres, får vi 9 negative energieigenverdier, i samsvar med det analytiske resultatet. Grunntilstanden har energi $E_0 = -0.2968$ eV og 1. eksiterte tilstand har energi $E_1 = -0.2870$ eV. Tilsvarende kinetiske energier er $K_0 = 3.2$ meV og $K_1 = 13.0$ meV. Analytiske verdier for uendelig dyp potensialbrønn med $V = 0$ i brønnområdet er $E_0 = K_0 = \pi^2 \hbar^2 / 2m_e L^2 = 3.7$ meV og $E_1 = K_1 = 4K_0 = 14.9$ meV. Godt samsvar, og som ventet litt lavere energier med endelig potensialbrønn.

b) Grunntilstanden er symmetrisk, deretter vekselvis antisymmetrisk og symmetrisk:



c) $E_9 = 0.53$ meV. Slik ser bølgefunksjonen ut:



Kinetisk energi utenfor brønnen er 0.53 meV, i brønnen 300.53 meV. Vi har sammenhengen $K = (h/\lambda)^2/2m_e$ slik at $\lambda = h/\sqrt{2m_e K}$. Utenfor brønnen: 53.0 nm. I brønnområdet: 2.23 nm. Fra figuren leser vi av 4.5 bølgelengder over brønnområdet med bredde 10 nm, dvs $\lambda = 10/4.5 = 2.22$ nm. Litt vanskeligere å estimere bølgelengden utenfor brønnen, men figuren antyder ca 13 nm for en kvart bølgelengde, dvs $\lambda \simeq 52$ nm.

d) Fra utskrevne energier i programmet: $E_0 = -0.29675$ eV, $E_1 = -0.28700$ eV og $E_2 = -0.27078$ eV. Dermed:

$$\lambda_{20} = hc/(E_2 - E_0) = 48 \mu\text{m}$$

$$\lambda_{21} = hc/(E_2 - E_1) = 76 \mu\text{m}$$

$$\lambda_{10} = hc/(E_1 - E_0) = 127 \mu\text{m}$$

Vi er i det infrarøde området av det elektromagnetiske spektret.