

26.01.15

①

FY6019 Moderne fysikk, våren 2015

- Young & Freedman (YF) kap. 37 - 44
- P.C. Hemmer "Kvantemekanikk" (PCH) kap 1-5, 8-10, 14
- I. Øverbø, notater (ØS)
- J.A. Størneng, håndskrevne notater
- Artikler
- Oppgaver
- Verktøy: Matematikk, Programmering

Vurderingsordning: Eksamen 70%, Arbeider 30%

Relevant bakgrunn:

- Mekanikk (6013)
- Elektromagnetisme (6017)
- Bølger (6016, 6020)
- Termodynamikk (6014)
- Spesiell relativitetsteori (6015)
- Matematikk (funksjoner, vektorer, derivasjon, integrasjon, differensialligninger, komplekse tall, trigonometri, rekurrentlikninger, ...)

YF, tema:

37: Relativitetsteori. Dekket i FY6015 Astronomi.
Repeteres etter behov.

38, 39: "Lyspartikler" og "partikkelbølger". Innledning til kvantemekanikken. Fotoelektrisk effekt. Interferens med elektroner etc. [PCH 1; ØS 1]

40: Grunnleggende kvantemekanikk i en dimensjon. Schrödingerligningen [PCH 2, 3; ØS 2, 3]

41: Atomer [PCH 5, 9; ØS 5]

42: Molekyler. Faste stoffer. Anvendelser [PCH 10; ØS 6]

43: Kjernefysikk. Radioaktivitet. Stråling. Fisjon. Fusjon

44: Partikkelfysikk

~~~~~  
Kompetansemål i VGS Fysikk 1 og 2, noen stikkord:

Bohrs atommodell, spektrallinjer, fisjon, fusjon, bruk av bevaringslover, standardmodellen, halvledere, doping, diode, transistor, fotoelektrisk effekt, Compton-spredning, partiklers bølgenatur, elementærpartikler, Heisenbergs uskarphetsrelasjon, sammenfiltrede fotoner, fysiske prinsipper bak røntgen, ultralyd og magnetisk resonans.

~~~~~

Innledning til kvantemekanikk

③

[YF 38, 39 ; PCH 1 ; ØS1] [NP : Nobel Prize]

Klassisk fysikk ca 1900 :

- Newtons lover [I. Newton, 1687]. Galileisk relativitet
- Termodynamikk. Statistisk mekanikk. [W. Thomson (Lord Kelvin), 1854 ; L. Boltzmann, 1875 ;]
- Lys er bølger. Maxwells ligninger. [J. C. Maxwell, 1865 ; H. R. Hertz, 1887]
- Materie er partikler. Atomer (gresk: udelelig). Elektronet, med negativ ladning, i jevnt fordelt positiv ladningsfordeling. "Rosinbollemodell". [J. J. Thomson, 1897, NP 1906]

Problemer med klassisk fysikk (før og etter 1900) :

- Lijnespektre: Ulike stoffer absorberer og emitterer elektromagnetisk (EM) stråling med bestemte bølgelengder. Eksempler:

Na, gult lys, $\lambda = 589 \text{ nm}$. [T. Melville, 1752]

Mørke linjer i solspekteret pga absorpsjon i atmosfæren. [W. H. Wollaston, 1802 ; J. von Fraunhofer, 1814 (574 mørke linjer!)]

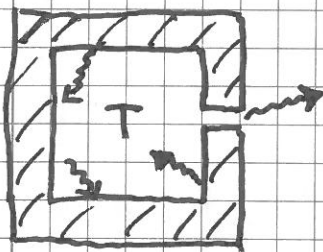
H, Balmer-serien, $\lambda = 410, 434, 486$ og 656 nm
i synlig del av spekteret [J. Balmer, 1885]
Teori/Modell: N. Bohr, 1913, NP 1922 (mer senere)

- Lysets hastighet (i vakuum) er den samme i alle inertialsystemer, uansett deres relative bevegelse.
Dvs: Galileisk relativitet holder ikke for lys.

Exp: Michelson [NP 1907] & Morley, 1887

Teori: A. Einstein, 1905 (Spesiell Rel.teori (SR))

- Stråling fra svart legeme:



Hulrom med
liten åpning

$I(\nu, T) =$ utstrålt energi pr tids-, flate-,
og frekvensenhet

$\Rightarrow I(\nu, T) \cdot \Delta\nu =$ utstrålt effekt pr
flateenhet mellom ν og $\nu + \Delta\nu$

EM stråling inn mot legeme kan absorberes, reflekteres
eller transmitteres, med andeler a , r og t

$$\Rightarrow a + r + t = 1$$

Svart legeme: $a = 1$ ($r = t = 0$)

Termisk likevekt: Absorbert energi = Emittert energi

$\Rightarrow a(\nu) = e(\nu) = 1$ for svart legeme i likevekt

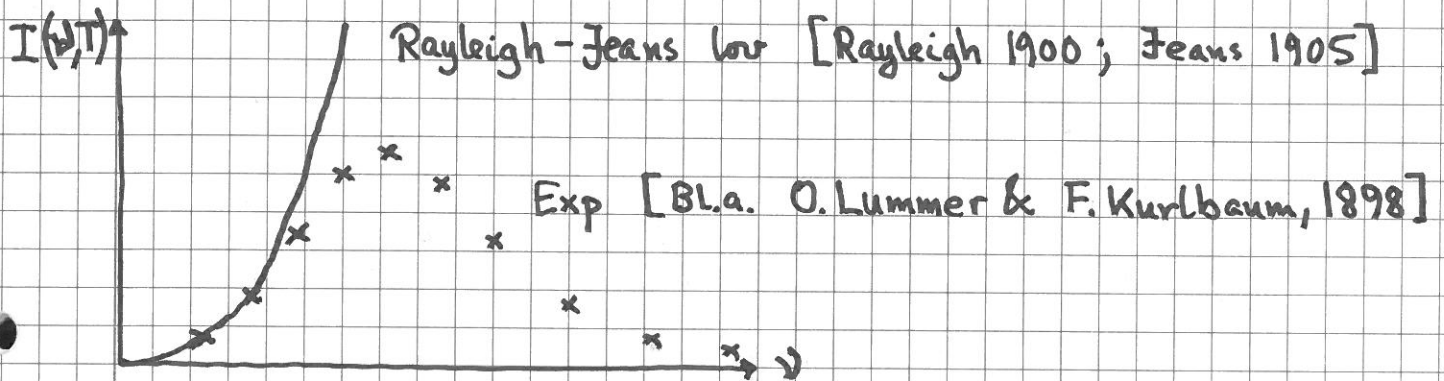
$e =$ legemets emissivitet

27.01.15

(5)

Klassisk teori: $I(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} k_B T$

[Stående EM bølger i hulrommet, "svingemoder",
midlere energi $k_B T$ pr svingemode ved temperatur T ,
i følge det klassiske ekvipartisjonsprinsippet.]



$I(\nu, T) \sim \nu^2$ OK for små ν (lange bølgelengder λ),
men gir total energistøm $j(T) = \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu \rightarrow \infty$!
("ultrafiolett katastrofen"; $I \rightarrow \infty$ når $\lambda \rightarrow 0$.)

Max Planck, 1900, NP1918 ("i desperasjon"):

Kvantisert strålingsenergi ved frekvens ν :

$$E = 0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$$

Plancks
kvantehypotese

Gir $I(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$; stemmer med
målingene når $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js.

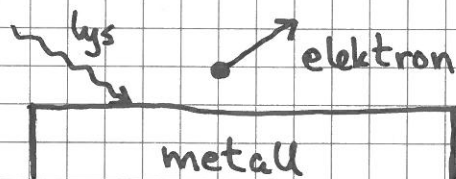
Merk at Plancks $I(\nu, T)$ gir det klassiske resultatet
for lave frekvenser (evt høye T), dvs $h\nu \ll k_B T$.

[Vis dette!]

(6)

Fotoelektrisk effekt:

Lys (EM stråling) inn mot metalloverflate slår løs elektroner fra metallet.

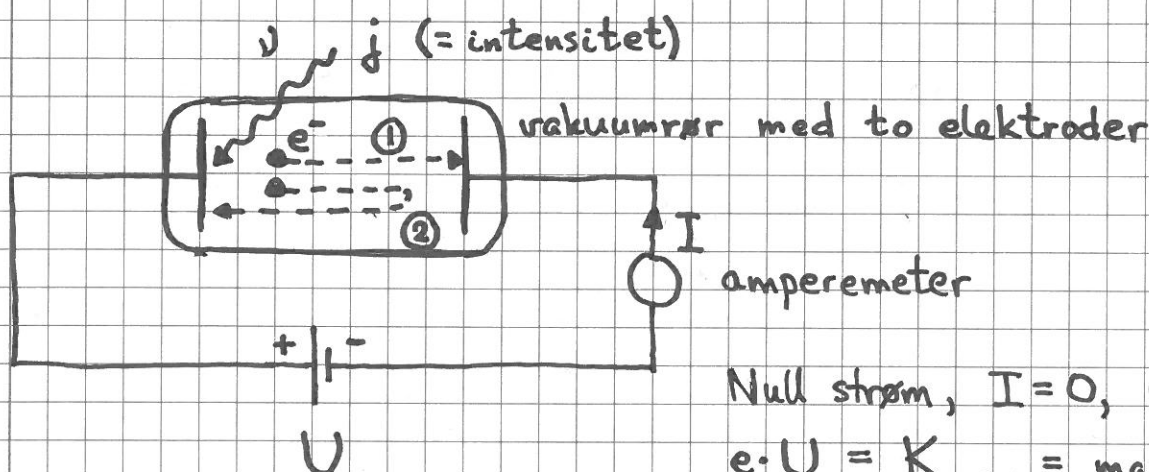


Exp:

H. Hertz, 1887

P. Lenard, 1900

R. Millikan, 1914 (NP 1923)



Null strøm, $I = 0$, når
 $e \cdot U = K_{\max} = \text{max kinetisk energi for løsrevne elektroner.}$
 ($U = \text{terskelspenning}$)

Med klassisk teori:

Lysets intensitet j (energi pr tids- og flateenhet) er uavhengig av frekvensen ν . (YF 32.4)

$\Rightarrow$ Forventer fotoel. effekt uavh. av ν , og I uavh. av ν .

Elektronene er bundet til metallet; det kreves en minste-energi W , frigjøringsarbeidet, for å løsrive elektroner.

$\Rightarrow$ Forventer en viss tid for å få $I > 0$ hvis j er tilstrekkelig liten.

Energi absorbert av elektroden øker med økende j .

$\Rightarrow$ Forventer økt $K_{\max}$, og dermed økt terskelspenning U ,

dersom j øker. Med j uavhengig av ν forventes U å være uavhengig av ν . (7)

Klassisk teori er helt feil.

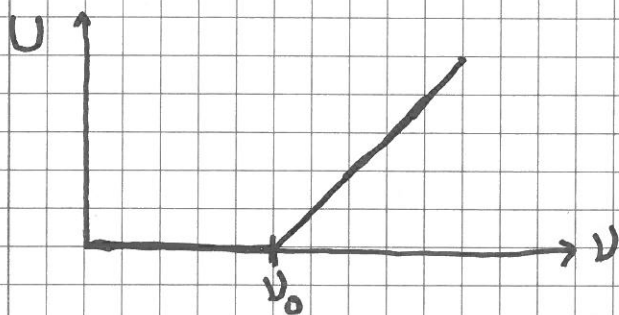
Ekperimentelt:

Strøm I avhenger av frekvensen ν . Monokromatisk lys med $\nu < \nu_0$ (= terskel-frekvensen) gir $I = 0$, uavh. av j .

Med $\nu > \nu_0$ blir $I > 0$ umiddelbart.

Terskelspenningen U avhenger av ν , men ikke av j .

$U = 0$ hvis $\nu < \nu_0$. U øker lineært med ν hvis $\nu > \nu_0$:



(Milliken, 1914, NP1923)

A. Einstein, 1905, NP1921:

Energien i lyset kommer i diskrete porsjoner, prop. med frekvensen: $E = h\nu$, med samme (universelle) konstant $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js, som introdusert av Planck i 1900.

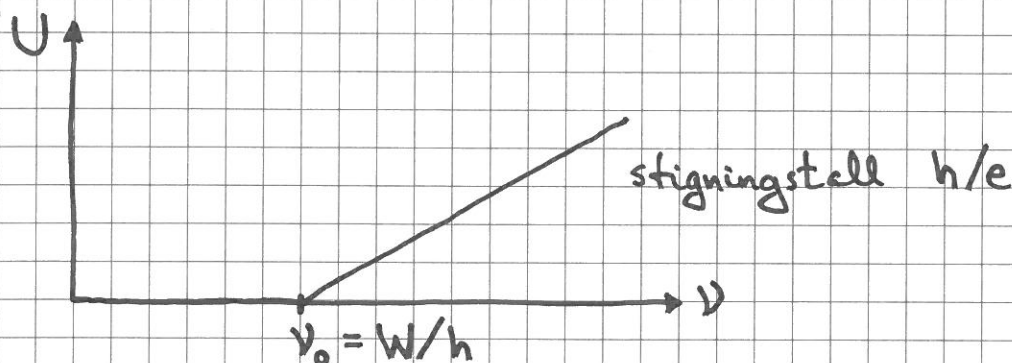
Et elektron i metallet kan bare absorbere denne bestemte energien $h\nu$. (eller la være!) Løsrivelse fra metallet krever $h\nu \geq W$, og energibevarelse gir $K_{\max} = h\nu - W$.

$$K_{\max} = eU \text{ gir } eU = h\nu - W, \text{ dvs:}$$

(8)

$$U = \frac{h}{e} \nu - \frac{W}{e}$$

Fotoelektrisk effekt.



Millikan, 1909 (oljedråpeeksperimentet): $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $\Rightarrow U(\nu)$ gir eksp. verdi for Plancks konstant h

Einstein, 1917: Lyskvant (foton) med energi $E = h\nu$
 har impuls (=bevegelsesmengde) $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$.

Følger fra spesiell relativitetsteori (SR):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

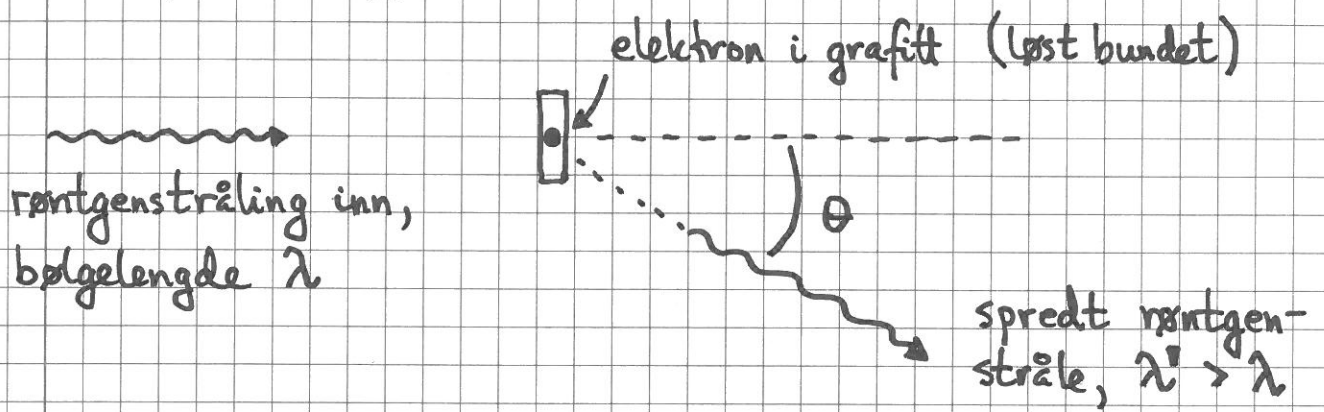
($v = pc^2/E$)

Med $m=0$ for foton: $E = pc$.

$$\text{Lorentz-faktoren: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Med $m=0$ og $p \neq 0$ ser vi at $\gamma \rightarrow \infty$ for
 et foton, dvs $v = c$. (Må også gjelde evt.
 andre masseløse partikler.)

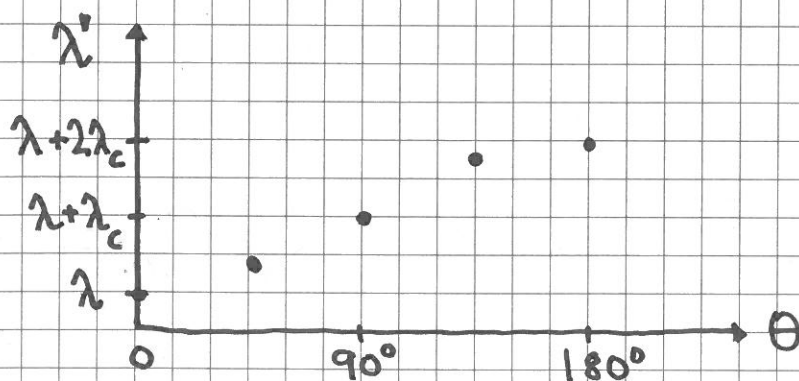
Compton - effekten :



Med klassisk teori (Maxwell) :

Oscillerende elektrisk felt $\vec{E}(t)$ i innkommende EM bølge, med frekvens $\nu = c/\lambda$, påvirker elektronet med oscillerende kraft $\vec{F}(t) = -e\vec{E}(t)$. Elektronet settes i svingninger med samme frekvens ν . Ifølge Maxwell vil en slik oscillerende ladning sende ut EM bølger med samme frekvens ν , dvs med samme bølgelengde som innkommende bølge: $\lambda' = \lambda$

A.H. Comptons eksperiment (1923, NP 1927) :



med $\lambda_c \approx 0.024 \text{ \AA}$ [$1 \text{ \AA} = 1 \text{ \AAngstrom} = 10^{-10} \text{ m}$]

Compton forklarte resultatene ved å bruke bevaring av (relativistisk) energi og impuls i kollisjon mellom to partikler, et foton og et elektron.

Vi prøver!

(10)

Fra s. 8 (evt FY6015):

Rel. impuls: $\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ($\approx m \vec{v}$ hvis $v \ll c$)

Foton: $p = E/c = h/\lambda$

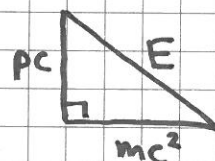
Rel. energi: $E = \gamma mc^2 = K + E_0$, med

hvileenergi $E_0 = mc^2$, dvs kin. energi $K = (\gamma - 1)mc^2$
($K \approx \frac{1}{2}mv^2$ hvis $v \ll c$)

Nyttig relasjon (for én partikkel):

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

"Pythagoras":

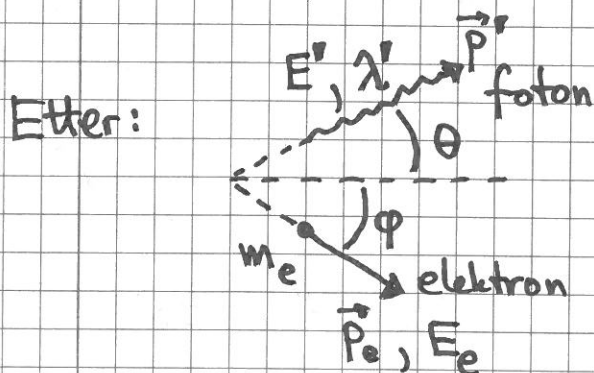


Compton - eksperimentet:



Impuls før: $E/c = h/\lambda$

Energi ---: $E + m_e c^2$



Impuls etter: $\vec{p}' + \vec{p}_e$

Energi ---:

$$E' + E_e = hc/\lambda' + \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2}$$

Impulsbevarelse vertikalt: $0 = p' \sin \theta - p_e \sin \varphi$ (*)

----- " ----- horisontalt: $E/c = p' \cos \theta + p_e \cos \varphi$ (**)

Fra (*): $\sin \varphi = (p'/p_e) \sin \theta = (E'/c p_e) \sin \theta$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - (E' \sin \theta / c p_e)^2} \quad (***)$$

Setter (***) samt $p' = E'/c$ inn i (**):

(11)

$$E/c = (E'/c) \cos \theta + p_e \sqrt{1 - (E' \sin \theta / p_e c)^2}$$

$$\Rightarrow E = E' \cos \theta + p_e c \sqrt{1 - (E' \sin \theta / p_e c)^2}$$

Får bort $\sqrt{\quad}$ ved å flytte over og kvadrere:

$$(E - E' \cos \theta)^2 = (p_e c)^2 - (E' \sin \theta)^2$$

$$\Rightarrow E^2 - 2EE' \cos \theta + \underbrace{(E' \cos \theta)^2 + (E' \sin \theta)^2}_{= E'^2} = (p_e c)^2$$

• Energibevarelse:

$$\begin{aligned} E + m_e c^2 &= E' + E_e = E' + \sqrt{(p_e c)^2 + (m_e c^2)^2} \\ &= E' + \sqrt{E^2 - 2EE' \cos \theta + E'^2 + m_e^2 c^4} \end{aligned}$$

Flytter over E' og kvadrerer:

$$(E + m_e c^2 - E')^2 = E^2 - 2EE' \cos \theta + E'^2 + m_e^2 c^4$$

$$E^2 + m_e^2 c^4 + E'^2 + 2(E m_e c^2 - EE' - m_e c^2 E')$$

$$\Rightarrow E m_e c^2 - EE' - m_e c^2 E' + EE' \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow E m_e c^2 = E' (E + m_e c^2 - E \cos \theta)$$

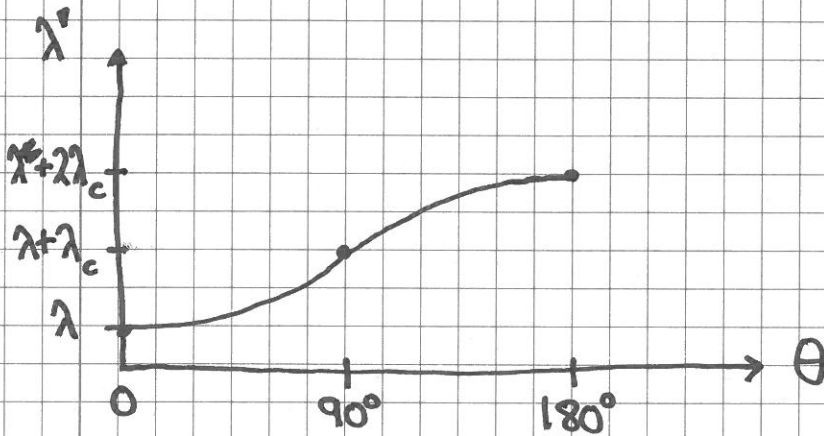
$$\Rightarrow E' = \frac{E m_e c^2}{E(1 - \cos \theta) + m_e c^2} = \frac{1}{(1 - \cos \theta)/m_e c^2 + 1/E}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda'}{hc} = \frac{\lambda}{hc} + \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta)}$$

med Compton-bølgelængden for elektronet:

$$\begin{aligned} \lambda_c &= h/m_e c \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} / 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ &\approx 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0.024 \text{ \AA} \end{aligned}$$



I tråd med eksperimentet!

Et overbevisende resultat, i favør
af fotonbegrepet.

[A.H. Compton, Phys. Rev. 21, 483 (1923)]

- Interferens med partikler:

Spredning (Diffraksjon) av elektroner mot Ni-krystall.

[Davisson & Germer, 1921, 1927 ;
G.P. Thomson, 1928 ; Davisson & Thomson, NP 1937]

Dobbeltspalte-eksperiment med elektroner.

[C. Jönsson, 1961 ;

Tomomura et al, 1989 (1 elektron om gangen!)]

Diffraksjon med C_{60} -molekyler (!)

[A. Zeilinger et al, 2003]

Forklaring? Må ha bølger for å observere interferens og diffraksjon!

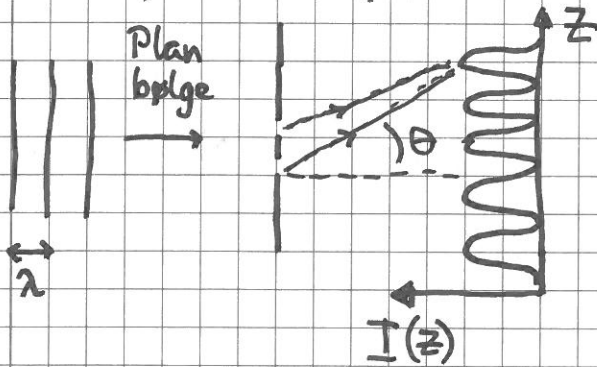
Louis de Broglie, 1923, NP 1929:

Hvis lys har både bølge- og partikkelegenskaper, er det bare rett og rimelig at partikler har både partikkel- og bølgeegenskaper!

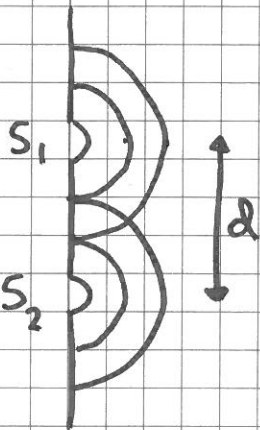
For lys: $E = h\nu = pc \Rightarrow p = h\nu/c = h/\lambda$

$\Rightarrow$ For partikler: $\lambda = h/p$; $\nu = E/h$ de Broglies hypotese

Dobbeltspalte-eksperiment:

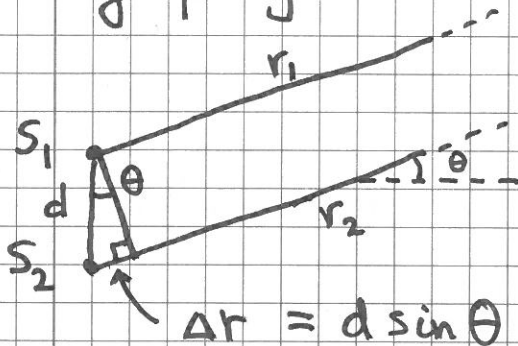


d = avstand mellom de to (smale) spaltene



Sylinderbølger i fase kommer ut av de to spaltene
(Huygens' prinsipp)

Veilengdeforskjell:



(Nesten!) Parallelle stråler fra de to spaltene i retning gitt ved θ .

Konstruktiv interferens og maks. intensitet $I(\theta)$ hvis

$$d \sin \theta = n \lambda$$

Destruktiv interferens og min. int. $I(\theta)$ hvis

$$d \sin \theta = (n + 1/2) \lambda$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

Tomomura et al, J. Am. Phys 57, 117 (1989):

● El. strøm mot "2-spatterveggen": $1.6 \cdot 10^{-16} \text{ A}$

Hastighet på elektronene: $v \approx c/2$

Total veilengde: ca 1.5 m

- (a) Hvor mange elektroner treffer skjermen pr sekund?
- (b) Hvor lang tid bruker elektronene på veien fra kilden til detektoren/skjermen?
- (c) Hva er midlere tid mellom to påfølgende elektroner?

Løsning:

(a) $1.6 \cdot 10^{-16} \text{ A} = 1.6 \cdot 10^{-16} \text{ C/s} = \underline{\underline{1000 \text{ e/s}}}$

(b) Reisetid: $1.5 \text{ m} / 0.5 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{10^{-8} \text{ s}}}$

(c) Midlere tid mellom to elek: $(1/1000) \text{ s} = \underline{\underline{10^{-3} \text{ s}}}$
som er mye mer enn reisetiden

⇒ Elektronene reiser alene!

⇒ De interfererer med seg selv!

Bohr - modellen : (1913)

Bakgrunn:

- Balmer-serien for H (i synlig område):

$$1/\lambda = R_{\infty} (1/2^2 - 1/n^2) ; n=3,4,5,6$$

med Rydberg-konstanten $R_{\infty} \approx 10^7 \text{ m}^{-1}$

- Rutherfords atommodell (1911):

Positivt ladet og liten atomkjerne [dvs ikke jevnt fordelt, slik Thomson trodde] med negativt ladde elektroner omkring.

- Plancks kvantiseringspostulat for stråling:
Energi emitteres og absorberes i enheter av $h\nu = hc/\lambda$.

Bohrs postulater / ideer:

- 1: Stasjonære tilstander, med bestemte energier.

Klassisk tenking innebærer at elektronet må tape energi i form av EM stråling, siden det er akselerert i $\vec{E}$ -feltet fra kjernen.

Bohr antok at utstråling var forhindret, og dermed energien bevart.

Hvorfor " R_∞ "?

Jo, R_∞ gir energinivåene i et 1-elektron-atom med ∞ tung kjerne, slik at redusert masse for 2-partikkelsystemet blir

$$m_{\text{red}} = \frac{m_e \cdot m_{\text{kjerne}}}{m_e + m_{\text{kjerne}}} \xrightarrow{m_{\text{kjerne}} = \infty} m_e$$

Dvs:

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c}$$

Med endelig masse i kjernen har vi

$$m_e \rightarrow m_{\text{red}} = m_e \cdot \left(1 + m_e/m_{\text{kjerne}}\right)^{-1}$$

som betyr at R_∞ må erstattes av

$$R = R_\infty \cdot \left(1 + m_e/m_{\text{kjerne}}\right)^{-1} < R_\infty$$

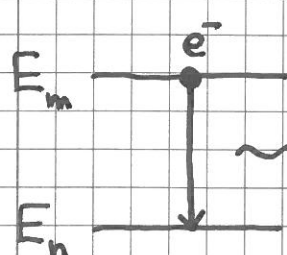
$$\text{Hydrogen: } m_e/m_{\text{kjerne}} = 9.11 \cdot 10^{-31} / 1.67 \cdot 10^{-27} \approx 5.4 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow R_H = R_\infty \cdot 1.00054^{-1} \approx 0.99946 R_\infty$$

$\Rightarrow$ enda bedre samsvar med eksp. spektrallinjer!

2: Kvantestprang.

Balmer-serien kunne forklares med Plancks hypotese, kombinert med overganger mellom diskrete, stasjonære energitilstander:



$$\left[\text{Balmer: } \lambda = B \cdot \frac{m^2}{m^2 - 2^2}; B \approx 3.645 \cdot 10^{-7} \text{ m} \right]$$

$$\text{Rydberg (1888): } \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_m - E_n = hc \cdot R_\infty \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$\left[R_H = R_\infty \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right)^{-1} = 0.99946 R_\infty \right] (m > n = 1, 2, 3, \dots)$$

Dvs: Diskrete energinivåer i H:

$$E_n = -hc R_\infty / n^2 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\approx \left(-6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^7 / 1.6 \cdot 10^{-19} \right) \text{ eV} / n^2$$

$$\approx \underline{\underline{-13.6 \text{ eV} / n^2}}$$

3: Elektroner i klassisk bestemte sirkelbaner rundt kjernen:

Newtons 2. lov, $F = m_e a$, med $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ og $a = \frac{v^2}{r}$ gir:

$$\text{Hastighet: } v(r) = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \sim r^{-1/2}$$

$$\text{Dreieimpuls: } (\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m_e \vec{v})$$

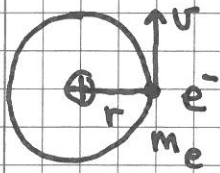
$$L = m_e v r = \sqrt{\frac{m_e e^2 r}{4\pi\epsilon_0}} \sim r^{1/2}$$

$$\text{Kin. energi: } K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \sim r^{-1}$$

$$\text{Total energi: } E = K + V = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \sim r^{-1}$$

Men: Dette gir ikke kvantisering! Bohr trengte en uavhengig, kvantitativ antagelse vedrørende kvantisering...

4: Elektronets dreieimpuls er kvantisert:



$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times m_e \vec{v}| = m_e v r$$

Bohr: $L = n \cdot \hbar$; $n = 1, 2, 3, \dots$

der $\hbar = h/2\pi \approx 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

("Den reduserte Plancks konstant")

Fra s.17 følger: $m_e v r = m_e \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} r = \sqrt{\frac{m_e e^2 r}{4\pi\epsilon_0}}$

Dermed: $\sqrt{\frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0}} = n \hbar$

$$\Rightarrow r_n = n^2 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$$

som gir energinivåene:

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

eller:

$$E_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 \cdot m_e c^2 \cdot \frac{1}{n^2} ; n = 1, 2, 3, \dots$$

Her er:

$$m_e c^2 \approx 0.511 \text{ MeV} \quad (\text{elektronets hvileenergi})$$

$$\alpha \equiv e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137 \quad (\text{finstrukturkonstanten})$$

$$a_0 (=r_1) \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \text{ \AA} \quad (\text{Bohr-radien})$$

Dette gir at Rydberg-konstanten er $R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \approx 10^7 \text{ m}^{-1}$,
som stemmer godt med Balmers eksperimenter!

Suksess: Hydrogenspektret forklart ved kun å benytte samme konstant h , som Planck og Einstein "oppdaget" i forbindelse med lys.

- Men.....:
- Selv om dreieimpulsen L er kvantisert (og proporsjonal med h), er $L=0$ i grunntilstanden for hydrogen (og ikke h , som Bohr antok).
 - Bohrs modell fungerte dårlig på andre atomer enn hydrogen.
 - Modellen med elektronet som en partikkel i klassisk bestemt bane $\vec{r}(t)$ rundt kjernen måtte forkastes.

Det viste seg nødvendig å ta de Broglies hypotese om partiklenes bølgeegenskaper på alvor:

$$\lambda = h/p, \quad \nu = E/h$$

Dette gir f.eks. Bohrs kvantiseringsantagelse (4) hvis vi antar "stående elektronbølger" i Bohrs sirkulære baner:

$$2\pi r_n = n\lambda \quad (\text{omkrets} = \text{helt antall bølgelengder})$$

$$\Rightarrow L_n = r_n p = \frac{n\lambda}{2\pi} \cdot p = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

[....som fortsatt er feil, pga antagelsen om klassiske, sirkulære baner]