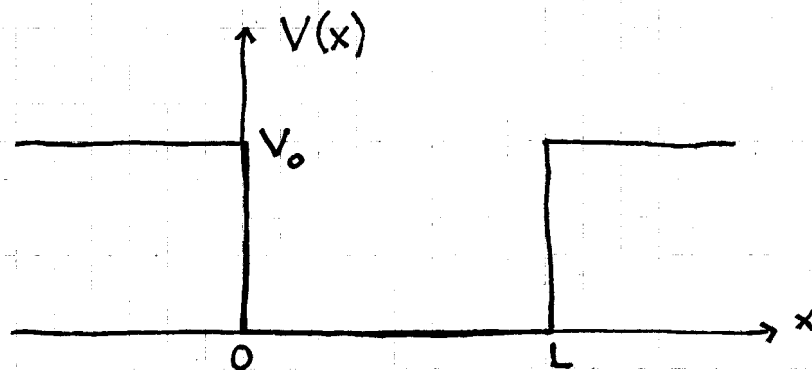


Endelig potensialbrønn

(PCH 3.3, YF 40.3)



$$V(x) = 0 \quad (0 < x < L)$$

$$V(x) = V_0 \quad (\text{ellers})$$

[L] $\hat{=}$ 22 i PCH

TUSL: $\psi''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) \quad (0 < x < L)$

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \psi(x) \quad (\text{ellers})$$

$$E < V_0$$

Løsninger på flg. form:

$$\psi(x) = C \sin kx + D \cos kx; \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (0 < x < L)$$

$$\psi(x) = A e^{\kappa x} + B e^{-\kappa x}; \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (\text{ellers})$$

$$x > L: e^{\kappa x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \psi(x) = B e^{-\kappa x}$$

$$x < 0: e^{-\kappa x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty \Rightarrow \psi(x) = A e^{\kappa x}$$

5 ukjente: A, B, C, D og energien E.

Fastlegges med 5 ligninger:

- ψ kontinuerlig i $x = 0$

- ψ' " " " "

- ψ " " " $x = L$

- ψ' " " " "

- Normering: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$

[Se PCH 3.3 for detaljene!]

$\Rightarrow$ Symmetriske bølgefunk. ~~med energi bestemt av~~ med energi bestemt av $\tan(kL/2) = \alpha/k$, dvs

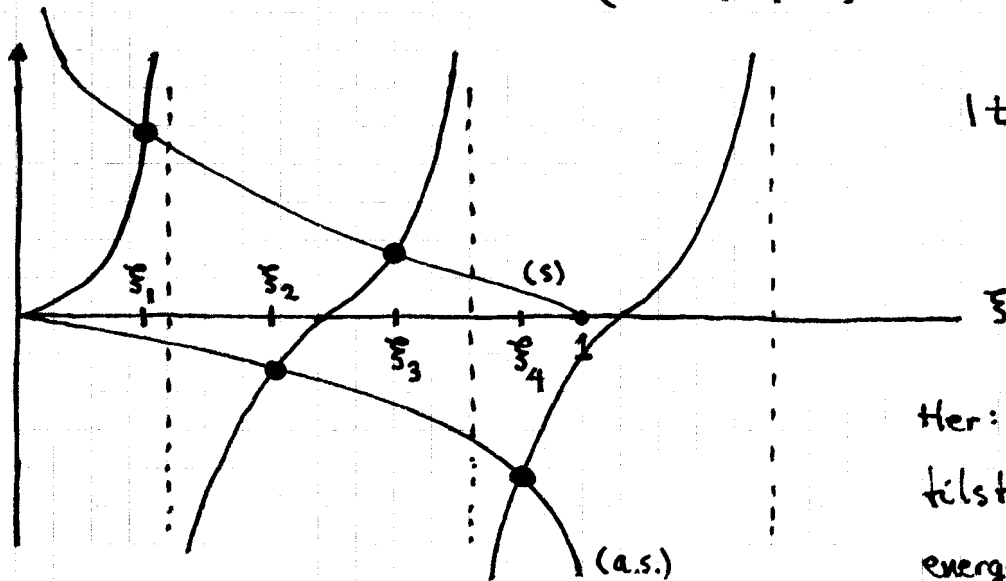
$$\tan\left(\frac{\sqrt{2mE} \cdot L}{2\hbar}\right) = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

og: Antisymmetriske bølgef. med energi bestemt av $\tan(kL/2) = -k/\alpha$,

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2mE} \cdot L}{2\hbar}\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$

Grafisk løsning: Sett $\xi = \sqrt{E/V_0}$ ("dim.løs energistørrelse")

$$\Rightarrow \tan\left(\xi \cdot \frac{\sqrt{2mV_0} L}{2\hbar}\right) = \begin{cases} \sqrt{1 - \xi^2} / \xi & (\text{symm.}) \\ -\xi / \sqrt{1 - \xi^2} & (\text{antisymmetr.}) \end{cases}$$



$|\tan \varphi| \rightarrow \infty$ når
 $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

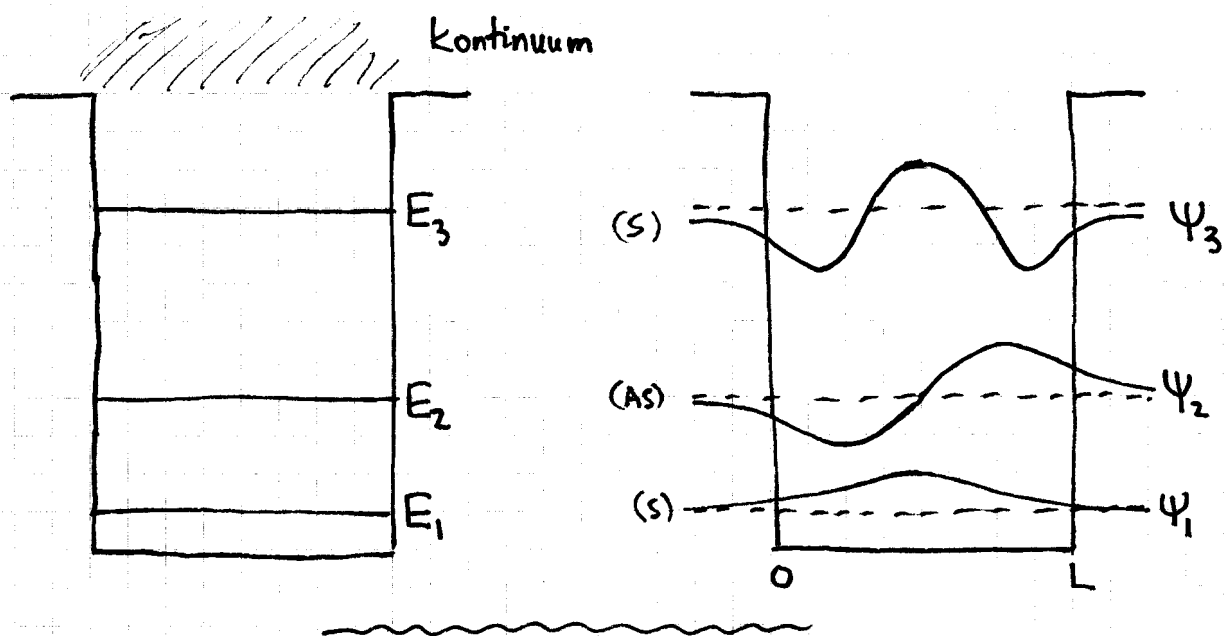
Her: 4 bundne tilstander, med energi $E_n = V_0 \cdot \xi_n^2$

- Relevant intervall: $0 < \xi < 1$
- Alltid minst 1 løsning, som er symmetrisk
- Kun 1 symm. løsn. hvis $1 \cdot \sqrt{2mV_0} L / 2\hbar < \pi/2$,
dvs $V_0 L^2 < \pi^2 \hbar^2 / 2m$
- Økende antall løsninger for dypere og bredere brønn.
- $|\psi|^2 > 0$ også utenfor brønnen, dvs en viss sanns. for å finne partikkelen i det "klassisk forbudte" området!

$$\boxed{E > V_0} \quad \ddot{\psi}(x) = -\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \psi(x) = -K^2 \psi(x) \quad \text{utenfor} \quad (61)$$

$$\Rightarrow \psi(x) = a \sin Kx + b \cos Kx \quad -4-$$

Dvs: Ikke lokaliserte/bundne tilstander. Kan "matches" med $C \sin kx + D \cos kx$ (dvs ψ og ψ' kont. i 0 og L) for alle verdier av $E > V_0$, dvs kontinuerlig energispektrum for $E > V_0$.



Eks: Anta at $V_0 = 300 \text{ meV}$, $L = 100 \text{ \AA}$ og $E_1 = 30 \text{ meV}$.

- Bestem partikkelens masse. [Elektroner kan ha effektiv masse $m^* \neq 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ i krystaller!]
- Finn energien til de ~~øvrige~~ bundne tilstandene ($E_2, E_3, \dots$)
- Finn bølgelengden til utsendt lys for alle mulige elektronoverganger mellom kvanlebrønnens bundne tilstander.

Harmonisk oscillator i 1D

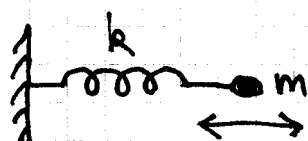
(PCH 3.5, YF 40.5)

(62)

Den "gjenopprettende" ("restoring") kraft er prop. med utsvinget fra likevekt, dvs $F(x) = -kx$ (Hookes lov!), er systemet en harmonisk oscillator, med potensial

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

Klassisk beskrivelse:

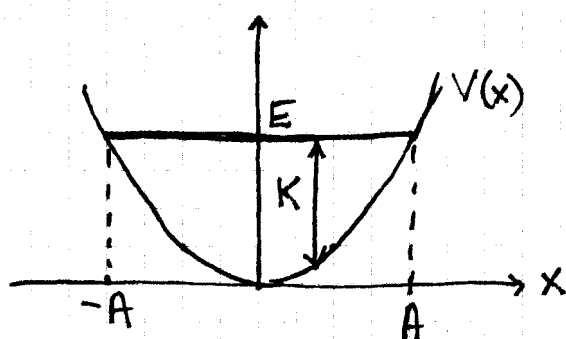


N2:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos \omega t$$

med vinkel-frekvens $\omega = \sqrt{k/m}$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 ; \quad E = K + V = \frac{1}{2} k A^2$$



$|x| < A$ (klassisk)

QM beskrivelse:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi$$

Løsning (se PCH 3.5 for detaljene):

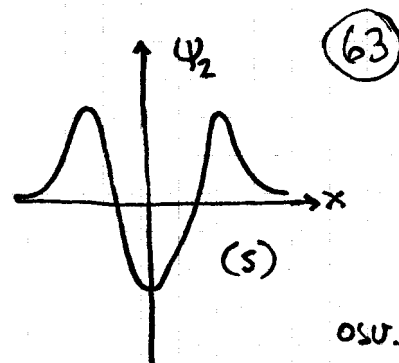
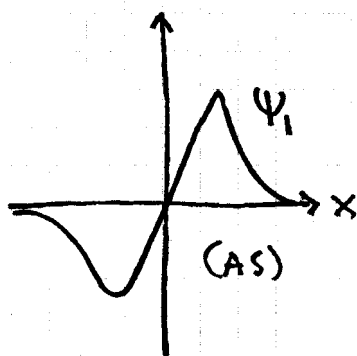
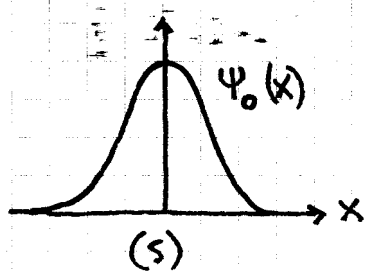
$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-m\omega x^2/2\hbar} \cdot H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)$$

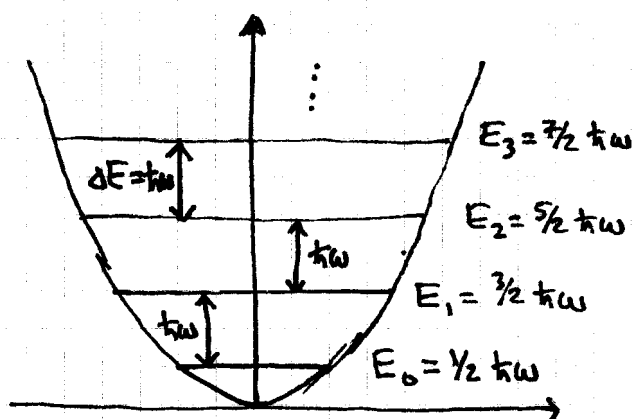
$$\text{der } H_0(z) = 1, \quad H_1(z) = 2z, \quad H_2(z) = 4z^2 - 2,$$

$$H_3(z) = 8z^3 - 12z, \quad H_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12, \dots \quad [H_n(z) \sim z^n]$$

[Hermite-polynomene]

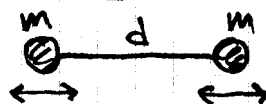


osv.

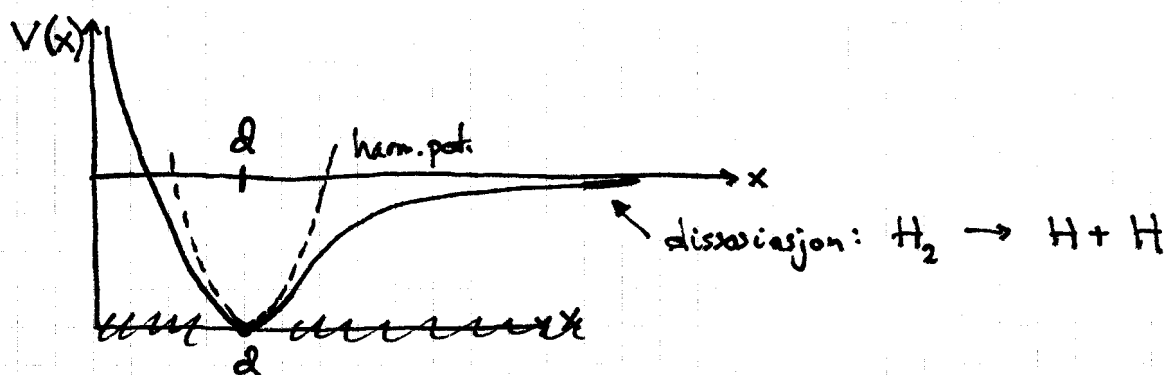


Mange potensialer er tilnærmet harmoniske.

Eks: To-atomig molekyl



d = bindingslengde
(i likevekt)



Nær $x=d$: $V(x) \approx \frac{1}{2} \tilde{m} \omega^2 (x-d)^2$ $[\tilde{m} = \text{redusert masse}]$
 $(= m/2 \text{ i } H_2)$

⇒ Vibrasjoner i molekylet med energi $E_n \approx (n + 1/2) \hbar \omega$

Oppg: Effektiv fjærkonstant for små vibrasjoner i H_2 er $k = 520 \text{ N/m}$.

Bruk dette til å finne avstanden $\Delta E = \hbar \omega$ mellom

vibrasjonsnivåene i H_2 . Omtrent hvilken temperatur må til for å eksistere H_2 fra 0. til 1. vibr. nivå?

Tunneleffekt

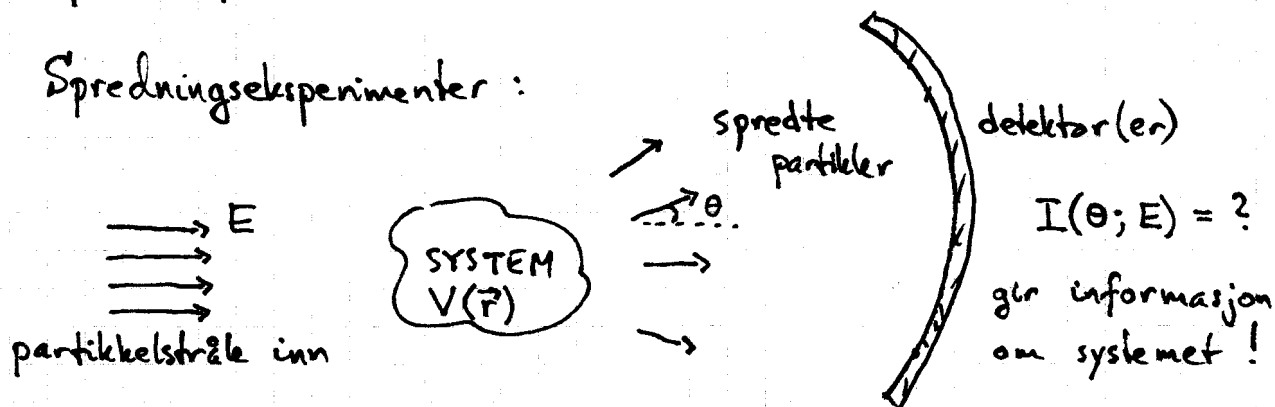
(PCH 3.6, YF 40.4)

(64)

Tilnæ:

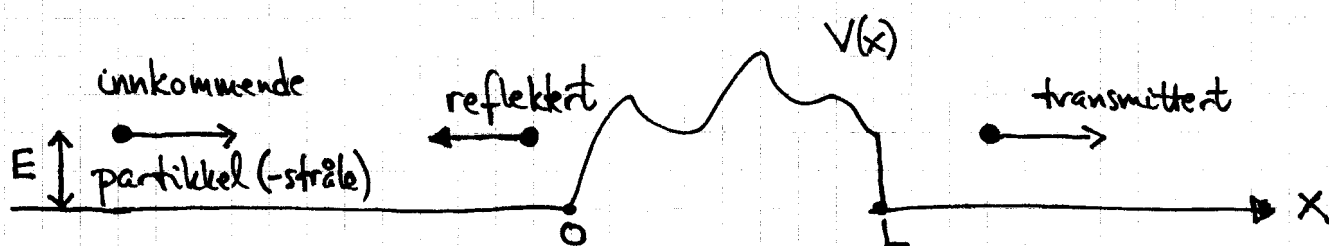
Bundne tilstander i brenn, herm. osc. osv; ^{spesielt} relevant for spektroskopi.

Spredningeksperiment:



Eks: Nøytroner, Elektroner, Røntgen, ...

I én dimensjon: Bare 2 muligheter!



$$\left. \begin{array}{l} R = \text{skans. for refl.} \\ T = \text{---} \text{---} \text{---} \text{transm.} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{R + T = 1}$$

Som stasjonært problem (dus består energi E):

$$x < 0: \psi_i(x) = e^{ikx}, \quad \psi_r(x) = r e^{-ikx}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \psi_i(x) + \psi_r(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx}$$

$$x > L: \psi(x) = \psi_t(x) = t e^{ikx}$$

$0 < x < L$: $\psi(x)$ avhengig av $V(x)$;
enkleste tilfelle: $V(x) = V_0 = \text{konst.}$

Fra før: (s. 47-50)

(65)

$$j = \text{Re} \left\{ \Psi^* \frac{\hbar}{im} \Psi' \right\} = \text{sann. strøm (etheden)}$$

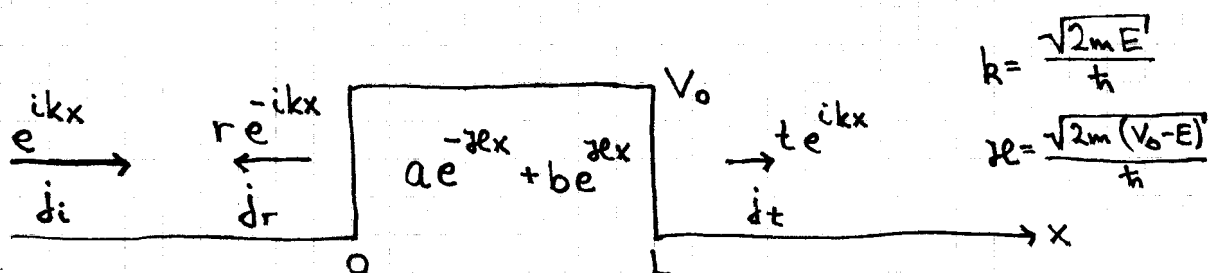
$$\Rightarrow j_i = \text{Re} \left\{ e^{-ikx} \frac{\hbar}{im} ik e^{ikx} \right\} = \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_r = \text{Re} \left\{ r^* e^{ikx} \frac{\hbar}{im} (-ik) r e^{-ikx} \right\} = -|r|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_t = \text{Re} \left\{ t^* e^{-ikx} \frac{\hbar}{im} ik t e^{ikx} \right\} = |t|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$\Rightarrow R = |j_r / j_i| = |r|^2$$

$$T = |j_t / j_i| = |t|^2$$



De 4 ukjente a, b, r, t fastlegges via 4 grensebetingelser:
 Ψ og Ψ' kontinuerlig i $x=0$ og $x=L$

$$\Rightarrow T = |t|^2 = \frac{(2k\kappa)^2}{(2k\kappa)^2 + (k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2 \kappa L} = \frac{4E(V_0-E)}{4E(V_0-E) + V_0^2 \sinh^2 \kappa L}$$

($R = 1 - T$)

Med høy og/eller bred barriere, dvs $\kappa L \gg 1$, er

$$\sinh \kappa L = \frac{1}{2} (e^{\kappa L} - e^{-\kappa L}) \approx \frac{1}{2} e^{\kappa L} \gg 1$$

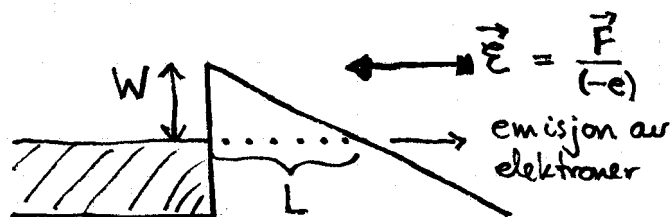
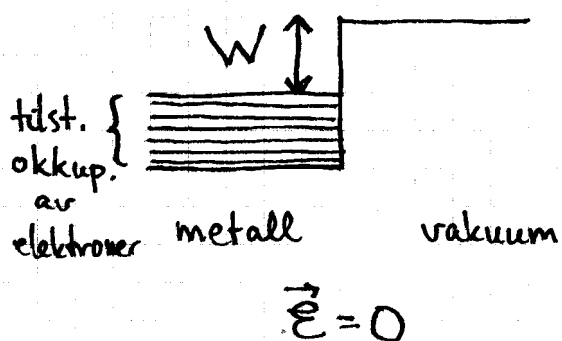
$$\Rightarrow T \approx \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-2\kappa L} \ll 1,$$

men $T > 0$: Alltid en niss sanns. for å tunnelere gjennom barrieren! En ren QM effekt!

Anvendelser - av QM tunnelering:

(66)

1. Feltemisjon: Frigjøring av elektroner fra metall med elektrisk felt $\vec{E} = E \hat{x}$



$$\vec{E} = E \hat{x} = -\frac{F}{e} \hat{x} = \frac{1}{e} \frac{dV}{dx}$$

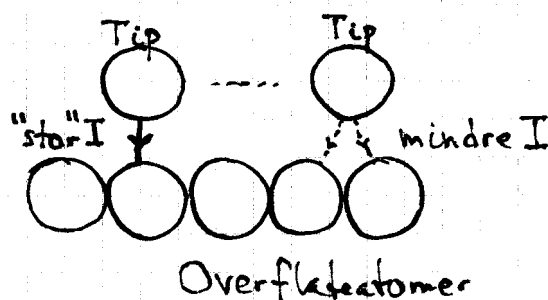
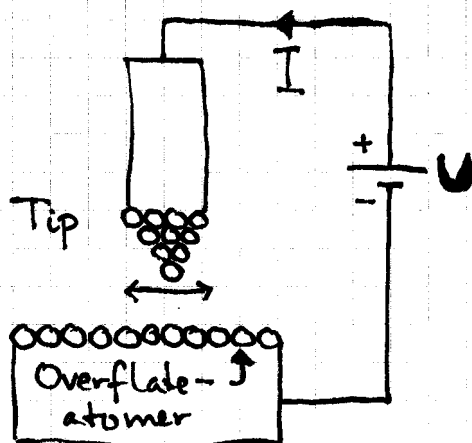
$$\Rightarrow V(x) = W - eEx$$

$\Rightarrow$ Tunnelering av elektroner gjennom "triangulær" barriere med "effektiv bredde" $L = W/eE$.

Transm. sanns. $T \sim \exp(-2\kappa L) \Rightarrow -\ln T \sim +L \sim \frac{1}{E}$ (som obs. i exp.)

(Ofte uønsket effekt: elektrisk overslag i høyspent system etc.)

2. Scanning Tunneling Microscopy (STM)



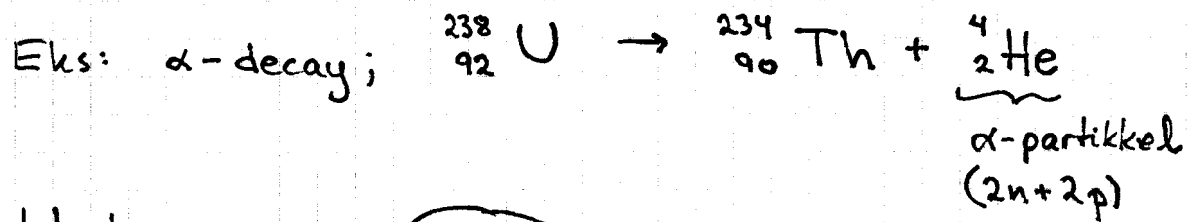
Tunnelingsstrøm I svært sensitiv for endringer i $L = \text{avstand tip - overflate}$

$\Rightarrow$ Avbildning på atomært nivå!
[Youtube: A boy and his atom]

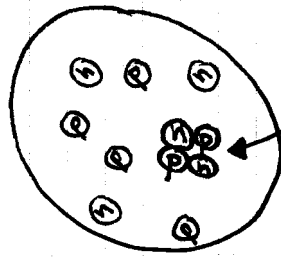
G. Binnig, H. Rohrer,
IBM Zürich; Nobelpris 1986

3. Kjernerreaksjoner

(67)

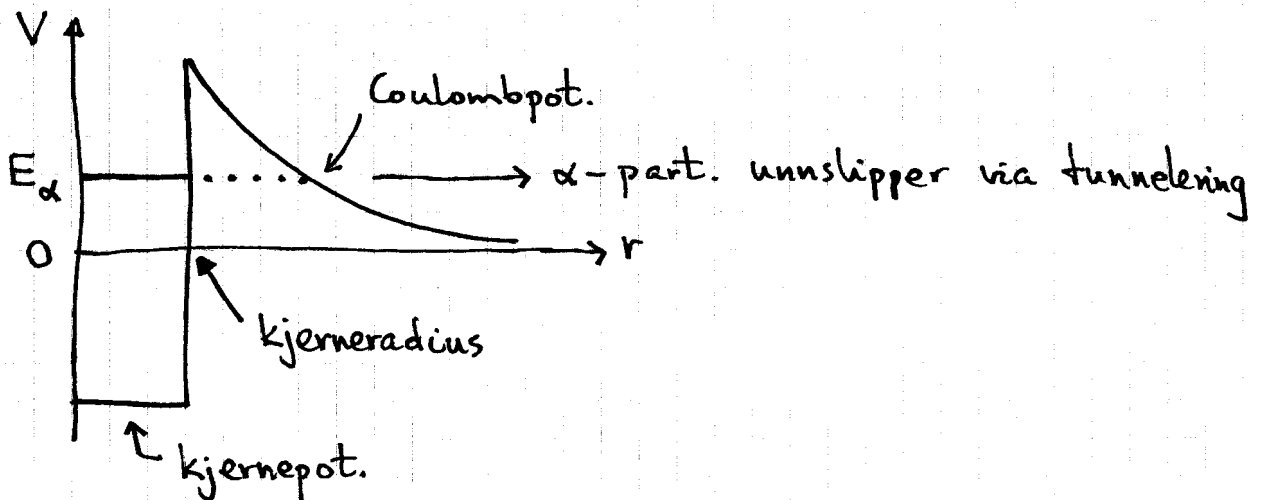


U-kjerne:

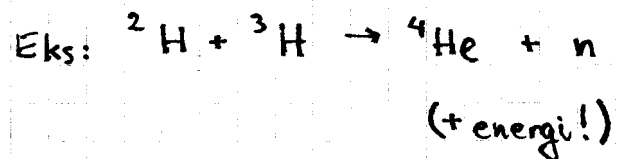
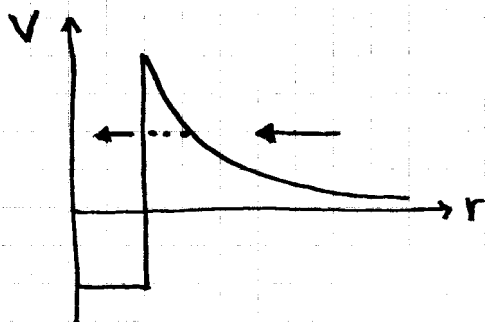


α -partikkel dannet i kjernen føler sterkt tiltrekkende kjernekrefter og sterkt frastøtende Coulombkrefter

Totalt potensial:



Omvendt prosess: Fusjon



Partikkel i 3D boks (PCH 5.2, YF 41.2) (68)

Fra s.30: $V(x) \rightarrow V(x,y,z) = V(\vec{r})$ og

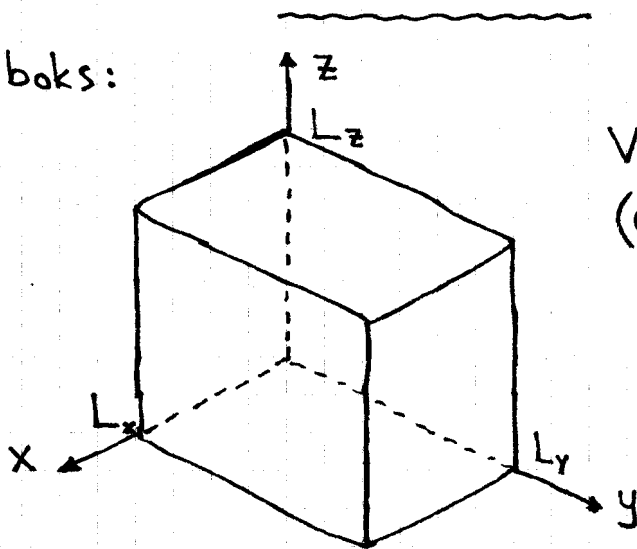
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 \quad \text{når } 1D \rightarrow 3D$$

$$\Rightarrow \text{SL: } i\hbar \partial \Psi / \partial t = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi \quad ; \quad \Psi = \Psi(\vec{r}, t)$$

$$\text{TUSL: } \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

$$\text{Normering: } \iiint_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,y,z)|^2 dx dy dz = 1$$

3D boks:



$V = 0$ inni boksen
($0 < x < L_x$; $0 < y < L_y$;
 $0 < z < L_z$) og
 $V = \infty$ utenfor boksen

Løsningene separeres: $\Psi(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$

$$\Rightarrow \Psi(x,y,z) = C \cdot \sin \frac{n_x \pi x}{L_x} \cdot \sin \frac{n_y \pi y}{L_y} \cdot \sin \frac{n_z \pi z}{L_z}$$

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n_x^2}{2m L_x^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_y^2}{2m L_y^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_z^2}{2m L_z^2}$$

der $n_j = 1, 2, 3, \dots$ ($j = x, y, z$)

[Dvs: Den forventede generalisering av 1D boks!]

Merk: 3D $\Rightarrow$ 3 kvantetall (her: n_x, n_y, n_z)

Degenerasjon:

Hvis to eller flere tilstander ~~har~~ samme energi, er disse tilstandene degenerert. (N tilst. med lik energi $\Rightarrow$ degenerasjonsgrad N)

Får degenerasjon i f.eks. kubisk 3D boks:

$$L_x = L_y = L_z = L \Rightarrow E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Grunntilstand: $E_{111} = 3 \cdot \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \right)$; ikke degenerert

1. eksiterte nivå: $E_{211} = E_{121} = E_{112} = 6 \cdot \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \right)$; deg.grad=3

2. — " —: $E_{221} = E_{212} = E_{122} = 9 \cdot \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \right)$; — " —

osv.

Tilstandstetthet ^{YF 42,5} (PCH 5.2.2)

(Density Of States; DOS)

Med stor boks (f.eks. makroskopisk!) blir det svært mange tilstander som ligger svært tett.

$\Rightarrow$ Ikke lenger hensiktsmessig å telte alle tilstandene!

Mer hensiktsmessig å snakke om tettheten av tilstander!

[Analogi: Teller ikke enkeltatomer i makroskopisk objekt; snakker heller om masse tettheten.]

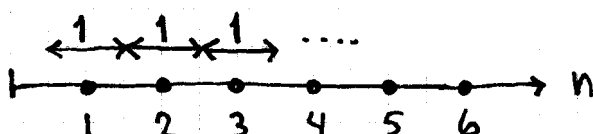
$$N(E) = \overset{\text{"antall"}}{\#} \text{ tilst. med energi mindre enn } E$$

$$\Rightarrow \Delta N = N(E + \Delta E) - N(E) = \# \text{ tilst. med energi i } (E, E + \Delta E)$$

$$\Rightarrow g(E) = \frac{\Delta N}{\Delta E} \approx \frac{dN}{dE} = \# \text{ tilst. pr energienhet} = \text{tilstandstettheten (DOS)}$$

1D boks:

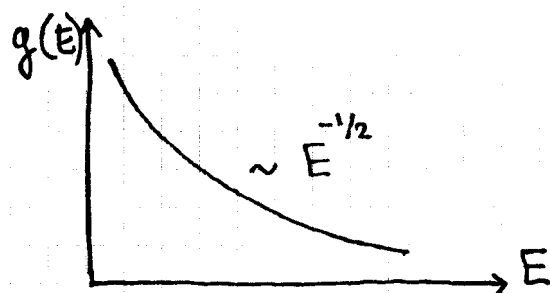
1 tilst. pr lengdeenhet langs n-aksen:



$$\Rightarrow N \text{ tilst. med energi mindre enn } E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} N^2 \quad (\text{s. 35})$$

$$\Rightarrow N(E) = \sqrt{2m} \frac{L}{\hbar \pi} \sqrt{E}$$

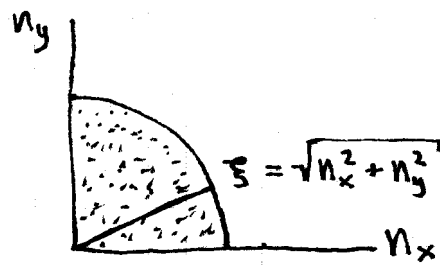
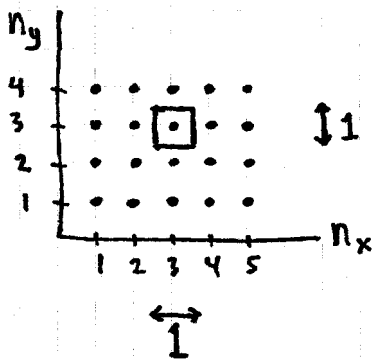
$$\Rightarrow g(E) = dN/dE = \frac{1}{2} \sqrt{2m} \frac{L}{\hbar \pi} E^{-1/2}$$



[Ser lett at $g(E)$ avtar med økende E på s. 35]

2D boks: $(E_{n_x n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2))$ for kvadratisk boks (71)

1 tilst. pr flateenhet i $n_x n_y$ -rommet:

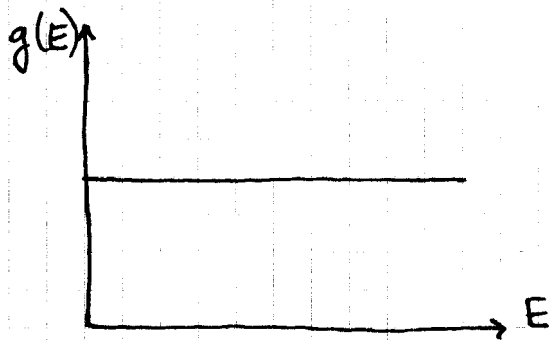


$\frac{1}{4} \cdot \pi \xi^2 = \# \text{ tilst. i kvartsrinkel med radius } \xi$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{4} \pi \xi^2 \text{ tilst. med energi mindre enn } E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \xi^2$$

$$\Rightarrow N(E) = \frac{1}{4} \pi \cdot \frac{2mL^2}{\hbar^2 \pi^2} E$$

$$\Rightarrow g(E) = dN/dE = \frac{mL^2}{2\hbar^2 \pi} = \text{konstant}$$



[Todimensjonale systemer kan lages; typisk i/nær grenseflaten mellom ulike halvledermaterialer]

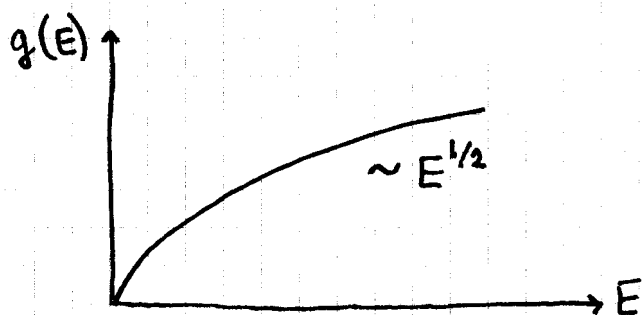
1 tilst. pr volumenhet i $N_x N_y N_z$ - rommet

$\Rightarrow N = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \xi^3$ tilst. i oktant av kule med radius ξ ,

ders med energi mindre enn $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \xi^2$

$$\Rightarrow N(E) = \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{2mL^2}{\hbar^2 \pi^2} \right)^{3/2} \cdot E^{3/2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(E) &= \frac{dN}{dE} = \frac{\pi}{6} \cdot (2m)^{3/2} \cdot \frac{L^3}{\hbar^3 \pi^3} \cdot \frac{3}{2} E^{1/2} \\ &= \frac{(2m)^{3/2} L^3}{4 \hbar^3 \pi^2} \cdot E^{1/2} \end{aligned}$$



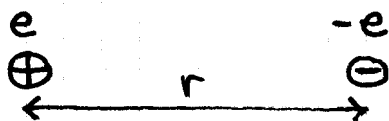
- $g(E)$ sentral størrelse i problemer med mange partikler, f.eks. faste stoffers fysikk
- $g(E) \sim E^{\frac{D}{2}-1}$ i D dimensjoner
- $g(E) \sim L^D$ i D dimensjoner, ders $g(E)$ er prop. med systemets størrelse

Coulombpotensialet

(PCH 5.6, 5.7; YF 41.3)

73

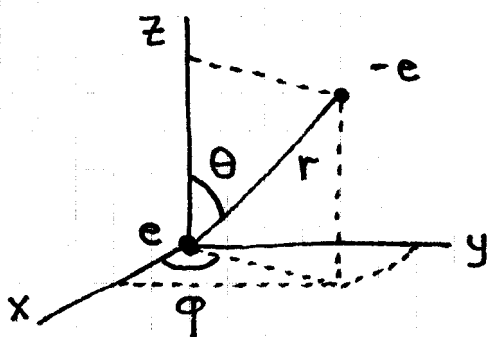
H-atomet:



$$V(x, y, z) = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

det er kulesymmetrisk potensial

⇒ hensigtsmæssig med kulekoordinater (r, θ, φ) :



$$z = r \cos \theta$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

Som for 3D boks kan TUSL separeres:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$$

Giv separate ligninger for R , Θ og Φ :

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] R = E \cdot R$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m_l^2 \Phi = 0$$

Krav til løsninger: $\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0$; $|\Theta(\theta)| < \infty$ for alle θ ;

$|\Phi(\varphi)| < \infty$ for alle φ ; $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow R(r) \sim e^{-\alpha r} \cdot (\text{polynom i } r) \quad (\alpha > 0)$$

$$\Theta(\theta) \sim \text{polynom i } \sin\theta \text{ eller } \cos\theta$$

$$\Phi(\varphi) \sim e^{im_l \varphi} \quad [\text{som vi ser!}]$$

$$E_n = - \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \cdot \frac{me^4}{2n^2 \hbar^2} = - \frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots = \text{hovedkvantetallet}$$

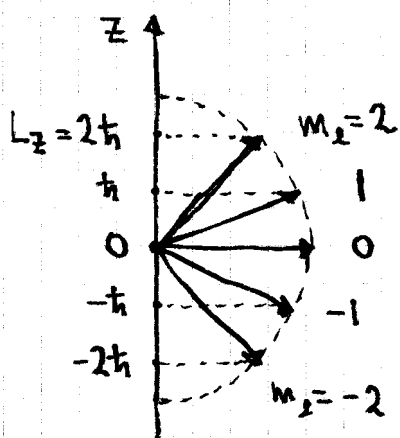
$$L = |\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar = \text{dreieimpulsen}$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1 = \text{kvantetall for dreieimpulsen}$$

$$L_z = m_l \hbar = \text{dreieimpulsens komponent i en gitt retning, valgt langs z-aksen}$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l = \text{magnetisk kvantetall}$$

$$\text{Eks: } l=2, \text{ da } L = \sqrt{2 \cdot 3} \hbar = \sqrt{6} \hbar$$



Vi kan kjenne L og (f.eks. komponenten) L_z presist samtidig, men da kan vi ikke kjenne L_x eller L_y !

Notasjon:-

n	1	2	3	4	
skall	K	L	M	N	

$\langle r \rangle$ øker med n ; $\langle r^{-1} \rangle^{-1} \sim n^2$

l	o	1	2	3	4	5	...
bokstav	s	p	d	f	g	h	

("sharp", "principal", "diffuse", "fundamental", deretter alfabetisk)

Exs: $\psi_{100} (= \psi_{n \ell m_\ell}) = 1s$ (K-skallet)

$$\psi_{200} = 2s$$
$$\left. \begin{array}{l} \psi_{200} = 2s \\ \psi_{21-1}, \psi_{210}, \psi_{211} = 2p \end{array} \right\} \text{(L-shell)}$$

OSU.

Degenerasjonsgrad:

For gitt n : n mulige verdier for l ($0, 1, 2, \dots, n-1$)

For gitt $l: 2l+1$ ————— " ————— m_l

⇒ Antall ulike tilstander Ψ_{n,m_z} for gitt energi E_n :

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2$$

$$n=1: g_1=1; \quad n=2: g_2=1+3=4; \quad n=3: g_3=1+3+5=9 \text{ or}$$

[Hva med spinn?! Senere!]

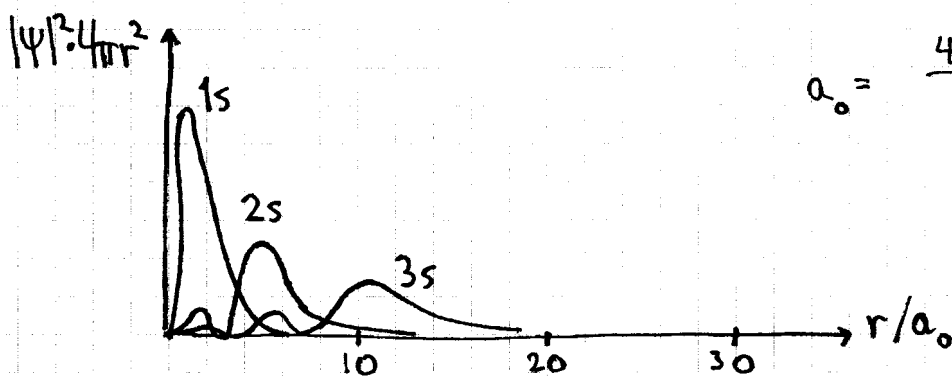
Sannsynlighetsfordeling:

(76)

$dP = |\Psi(r, \theta, \phi)|^2 dV =$ sanns. for å finne elektronet
i lite volum dV omkring "stedet" (r, θ, ϕ)

Enklest å visualisere radialfordelingen ved å
velge $dV = 4\pi r^2 dr =$ tynt kuleskall med radius r
og tykkelse dr

$\Rightarrow dP = |\Psi|^2 4\pi r^2 dr =$ sanns. for å finne
elektronet i $(r, r+dr)$



$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \approx 0.529 \text{ \AA}$$

= Bohr-radius

Eks: Finn $\langle r \rangle$ for $\Psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$

Løsn: $\langle r \rangle = \int_0^\infty r |\Psi_{1s}|^2 dV = \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty r e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr$

Løses med delvis integrasjon 3 ganger

$$\Rightarrow \langle r \rangle = \frac{4\pi}{\pi a_0^3} \cdot \frac{3}{8} a_0^4 = \underline{\underline{\frac{3}{2} a_0}} \quad (\approx 0.8 \text{ \AA})$$

Hydrogenlignende systemer: (PCH 5.9, YF 41.3)

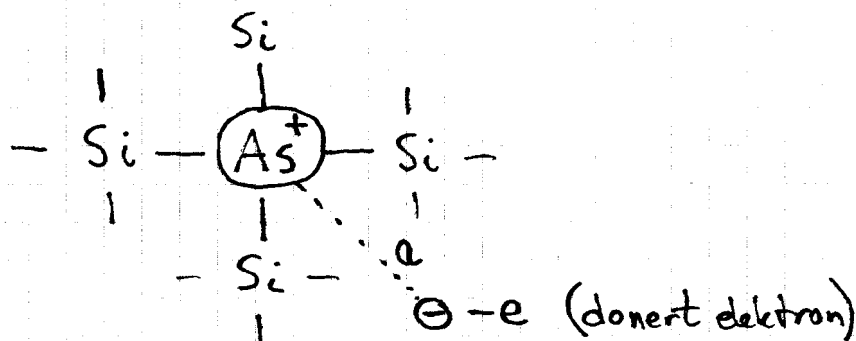
(77)

- Ioner med 1 elektron: He^+ ($Z=2$), Li^{2+} ($Z=3$), ...

Tilsvarende energispektrum, med $e^2 \rightarrow Ze^2$ i $V(r)$

$$\Rightarrow E_n = - \frac{m (Ze^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot 2n^2 \hbar^2} = -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

- Donoratomer i halvledere:



$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \sim 10 \epsilon_0 \quad (\epsilon_r = \text{relativ permittivitet for materialet})$$

$$m \rightarrow m^* \sim 0.1 m \quad (m^* = \text{elektronets effektive masse i materialet})$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} \rightarrow a = \frac{4\pi\epsilon \hbar^2}{m^* e^2} \sim 100 a_0$$

(a = effektiv Bohr-radius for det svakt bundne elektronet; $E_1 \sim -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{(m^*/m)}{(\epsilon/\epsilon_0)^2} \approx -15 \text{ meV}$)

- Eksitoner: Elektron-Hull-par i halvledere

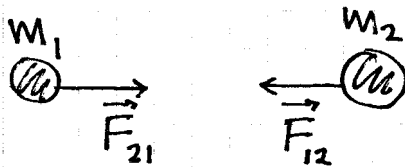
$$\text{Eks: GaAs: } m_e^* \approx 0.067 m, \quad m_h^* \approx 0.5 m, \quad \epsilon_r \approx 13.2$$

$$\Rightarrow \text{redusert masse } \tilde{m} \approx 0.059 m$$

$$\Rightarrow E_n \approx - \frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r}\right)^2 \cdot \frac{\tilde{m}}{m} \approx - \frac{4.9 \text{ meV}}{n^2}$$

$$\text{og } a \approx 120 \text{ \AA}$$

Redusert masse:



$$N2: \vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}_1, \quad \vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2$$

$$N3: \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow m_2 \vec{a}_2 = -m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{a}_1$$

$$\begin{aligned} \text{Relativ akselerasjon: } \vec{a}_{\text{rel}} &= \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \\ &= \underbrace{m_1 \vec{a}_1}_{\vec{F}_{21}} \cdot \underbrace{\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2}}_{\frac{1}{\tilde{m}}} \end{aligned}$$

Dvs: Bevegelsen til m_1 relativt m_2 blir som ~~en~~ bevegelsen til en partikkel med reduert masse

$$\tilde{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \left(\frac{1}{\tilde{m}} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

som utsettes for den innbyrdes kraften $\vec{F}_{21}$ fra m_2 på m_1

$$\text{Eks: Elektron i H: } \tilde{m} = \frac{m_e \cdot m_p}{m_e + m_p} = \frac{m_e}{1 + m_e/m_p} \approx \underline{0.9995 m_e}$$

$$\text{--- " --- deuterium: } \tilde{m} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{m_p + m_n}} \approx \underline{0.9997 m_e}$$

$$\text{--- " --- tritium: } \tilde{m} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{2m_n + m_p}} \approx \underline{0.9998 m_e}$$

Elektron i eksiton i GaAs (s.77):

$$\tilde{m} = \frac{0.067 \cdot 0.5}{0.067 + 0.5} m_e = \underline{0.059 m_e}$$