

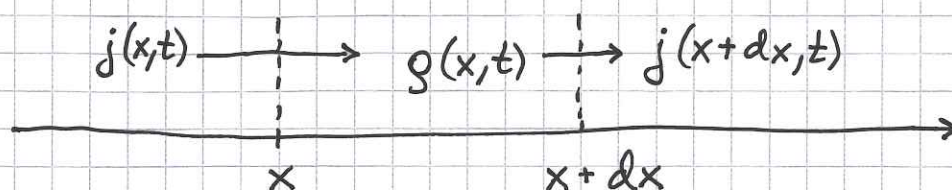
Sannsynlighetsstrøm og bevaring av sannsynlighet

[PCF 2.6 ; DFG 1.4 ; IØ 2.8]

Kontinuitetsligninger uttrykker at ulike størrelser er bevart.

Sanns. tetthet : $\rho(x,t) = \frac{dP}{dx} = |\Psi(x,t)|^2$

Sanns. strøm : $j(x,t)$



$$\underbrace{j(x,t) - j(x+dx,t)}_{\text{netto strøm inn på } (x, x+dx)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho(x,t) dx \}}_{\text{endring pr tidsenhet}} = dx \frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{j(x+dx,t) - j(x,t)}{dx} = - \frac{\partial j}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$

$$3D : \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 ; \quad \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

[som bevaring av masse i TFY4163]

Vi bruker SL og regner ut $\partial \rho / \partial t$, og kan deretter identifisere et generelt uttrykk for j .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{ \Psi^* \Psi \} = \Psi^* \dot{\Psi} + \dot{\Psi}^* \Psi \\
 &= \Psi^* \hat{H} \Psi / i\hbar + (\hat{H} \Psi / i\hbar)^* \Psi \\
 &= \frac{i\hbar}{2m} \{ \Psi^* \Psi'' - \Psi^{*''} \Psi \} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Leddene med} \\ V(x) \text{ kansellerer} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Generelt har vi

$$[f g' - f' g]' = f' g' + f g'' - f'' g - f' g' = f g'' - f'' g, \text{ slik at}$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \{ \Psi^* \Psi' - \Psi^{*'} \Psi \} \quad \begin{array}{l} \text{kont.} \\ \text{Lign.} \end{array} - \frac{\partial j}{\partial x}, \text{ dvs}$$

$$\begin{aligned}
 j &= \frac{\hbar}{2m} \{ \Psi^* \Psi' / i - \Psi^{*'} \Psi / i \} \\
 &= \frac{\hbar}{2m} \{ \Psi^* \Psi' / i + (\Psi' \Psi^* / i)^* \} \\
 &= \frac{\hbar}{2m} \cdot 2 \operatorname{Re} \{ \Psi^* \Psi' / i \} \\
 &= \operatorname{Re} \{ \Psi^* \left(\frac{1}{m} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \} \\
 &= \operatorname{Re} \{ \Psi^* \frac{\hat{p}}{m} \Psi \}
 \end{aligned}$$

$$3D: \quad \vec{j} = \operatorname{Re} \{ \Psi^* \frac{\hat{\vec{p}}}{m} \Psi \} ; \quad \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla$$

Rimelig resultat: I klassisk fysikk er $\vec{j} = g \vec{v}$.

I QM erstattes g av $\Psi^* \Psi$, og $\vec{v}$

erstattes av $\frac{\hat{\vec{v}}}{m} = \frac{1}{m} \hat{\vec{p}}$.

Forventningsverdienes tidsutvikling

[PCH 4.3 ; DFG 3.4.3 ; IØ 4.3]

Vi ser kun på operatoren $\hat{F}$ som ikke avhenger eksplisitt av tiden t , dvs $\partial \hat{F} / \partial t = 0$. Dermed:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle F \rangle &= \frac{d}{dt} \left\{ \int \Psi^* \hat{F} \Psi dx \right\} \\
 &= \int \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{F} \Psi dx + \int \Psi^* \hat{F} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dx \\
 &\stackrel{\text{s.l.}}{=} \int \left(\frac{\hat{H} \Psi}{i\hbar} \right)^* \hat{F} \Psi dx + \int \Psi^* \hat{F} \frac{\hat{H} \Psi}{i\hbar} dx \\
 &\stackrel{\text{PCH 2.8}}{=} \int \frac{i}{\hbar} \Psi^* \hat{H} \hat{F} \Psi dx - \int \frac{i}{\hbar} \Psi^* \hat{F} \hat{H} \Psi dx \\
 &= \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{F}] \rangle
 \end{aligned}$$

Det betyr at $\langle F \rangle$ er en bevegelseskonstant dersom $\hat{F}$ kommuterer med Hamiltonoperatoren $\hat{H}$.

Eks: Når er $\langle p \rangle$ konstant?

Løsn: Hvis V avhenger av x , er $[\hat{H}, \hat{p}] = [V, \hat{p}] \neq 0$, og $d\langle p \rangle / dt \neq 0$. Som ventet: Kraften $-dV/dx$ fører til at $\langle p \rangle$ endres (jf N2).

Men hvis V er konstant, er $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$ og $\langle p \rangle$ er konstant. Også som forventet!