Partikkelbølger [OS 6.5, 6.6 ; YF 39.1]

Louis de Broglie (1923, NP 1929): Lys er både bølger og partikler. Da bør også partikler med masse ha både partikkel- og bølgeegenskaper.

For fotoner:

$E = h\nu = pc \quad ; \quad c = \lambda\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{og} \quad \nu = \frac{E}{h}}$

Gjelder også for elektroner, protoner etc.

Fra termodynamikk og kinetisk gassteori:

Ideell gass av atomer eller molekyler har midlere translasjonsenergi $\frac{3}{2} k_B T$ pr partikkel.

(Ifølge ekvipartisjonsprinsippet.)

Dvs: $p^2/2m = \frac{3}{2} k_B T$

Innsetting av $p = h/\lambda$ gir

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{3 m k_B T}}}$$

Termisk de Broglie-bølgelengde

Dette er "typisk" bølgelengde for gass med partikler med masse m ved temperatur T.

Eks: Gass med Na_2-molekyler ved 770 °C.

$m = 2 \cdot 23\,u = 46 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg , $T = 1043$ K

$\Rightarrow \lambda = 1.1 \cdot 10^{-11}$ m $= 11$ pm

Etter 1923 har mange eksperimenter vist partiklers bølgeegenskaper.

- Davisson og Germer 1927 : Diffraksjon med elektroner reflektert fra Ni-krystall
- C. Jönsson 1961 : Interferens i dobbeltspalteforsøk med elektroner.
- Tonomura et al 1989 : Interferens med ett og ett elektron gjennom dobbeltspalte.
- Zeilinger et al 2003 : Interferens med ett og ett C_{60}-molekyl gjennom diffraksjonsgitter.
- Arndt et al 2015 : Interferens med makromolekyler

Schrödingerligningen [OS 7 ; YF 40]

Erwin Schrödinger fant en bølgeligning som kunne beskrive de Broglies partikkelbølger i 1925.
Delte nobelprisen med Paul Dirac i 1933.
Werner Heisenberg fikk nobelprisen i 1932.

Først en kort repetisjon av klassisk bølgefysikk.
Bølgeligning for mekaniske og elektromagnetiske bølger:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Her kan ξ være utsving på en streng, trykk eller tetthet i et fluid, elektrisk felt $\vec{E}$ eller magnetfelt $\vec{B}$ i en EM-bølge osv.
Generell løsning er på formen

$$\xi(x,t) = \xi(x \pm vt)$$

Spesielt viktig er <u>harmoniske</u> bølger, med veldefinert ("skarp") bølgelengde λ og frekvens ν:

$$\xi(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{eller} \quad A\cos(kx - \omega t)$$

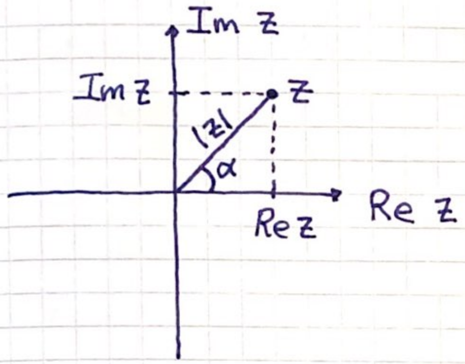
A = amplitude ; $k = 2\pi/\lambda$ = bølgetall
$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ = vinkelfrekvens ; T = periode
$v = \lambda/T = \lambda\nu = \omega/k$ = fasehastighet
$v_g = d\omega/dk$ = gruppehastighet

Ofte hensiktsmessig med <u>kompleks</u> representasjon:

$$\xi(x,t) = A\, e^{i(kx-\omega t)}$$

Eulers formel: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \;;\; i = \sqrt{-1}$

Det komplekse plan:



$$z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z$$

$$z = |z|\, e^{i\alpha}$$

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$$

$$\mathrm{Re}\, z = |z| \cdot \cos\alpha$$

$$\mathrm{Im}\, z = |z| \cdot \sin\alpha$$

Kompleks-konjugert av z:

$$z^* = \mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z = |z|\, e^{-i\alpha}$$

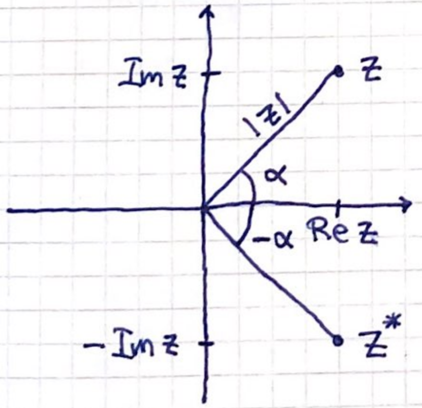
dvs

$$\mathrm{Re}\, z^* = \mathrm{Re}\, z, \qquad \mathrm{Im}\, z^* = -\mathrm{Im}\, z$$

Dermed: $|z|^2 = z^* z$

Bevis:
$$z^* z = (\mathrm{Re}\, z - i\, \mathrm{Im}\, z)\cdot(\mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z) = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2 = |z|^2$$

Grafisk:



Vi ser at Re z og Im z kan oppfattes som <u>kartesiske</u> koordinater, mens |z| og α kan oppfattes som <u>polarkoordinater</u> i beskrivelsen av det komplekse tallet z.

Eksempler

① Løs ligningen $z^2 + 2z + 2 = 0$

Løsning:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1} = \underline{\underline{-1 \pm i}}$$

② Vis at $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$

Løsning:

Vi har $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ og $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

(siden $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ og $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$).

Addisjon av disse to ligningene gir

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha, \quad \text{dvs} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

③ Vis at $\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$

Løsning:

Subtraksjon av de to ligningene ovenfor gir

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha, \quad \text{dvs} \quad \sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

④ Vis at $|e^{i\alpha}| = 1$ for enhver reell verdi for α

Løsning:

$$|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$$

⑤ Vis at $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Løsning:

$$\cos(\alpha+\beta) = \mathrm{Re}\{e^{i(\alpha+\beta)}\} = \mathrm{Re}\{e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}\} =$$

$$= \mathrm{Re}\{[\cos\alpha + i\sin\alpha]\cdot[\cos\beta + i\sin\beta]\} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

⑥ Vis at $\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$

Løsning:

$$\sin(\alpha+\beta) = \mathrm{Im}\{e^{i\alpha} e^{i\beta}\} = \mathrm{Im}\{[\cos\alpha + i\sin\alpha]\cdot[\cos\beta + i\sin\beta]\}$$

$$= \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$$

⑦ Uttrykk $\cos 3\alpha$ ved hjelp av $\cos\alpha$ og $\sin\alpha$

Løsning:

$$\cos 3\alpha = \mathrm{Re}\{e^{3i\alpha}\} = \mathrm{Re}\{[e^{i\alpha}]^3\} = \mathrm{Re}\{[\cos\alpha + i\sin\alpha]^3\}$$

$$= \mathrm{Re}\{\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha + 3i^2\cos\alpha\sin^2\alpha + i^3\sin^3\alpha\}$$

$$= \mathrm{Re}\{\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha\}$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$$

⑧ Hva er $|z|$ og α for følgende komplekse tall?

(a) $1-i$ (b) $(1-i)^2$ (c) $\sqrt{i}$

Løsning:

(a) $|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\alpha = \arctan(-1/1) = -\frac{\pi}{4}$ $(= -45°)$

(b) $|(1-i)^2| = |1-2i-1| = |-2i| = 2$; $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

(c) $\sqrt{i} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4} \Rightarrow |\sqrt{i}| = 1$ og $\alpha = \frac{\pi}{4}$

⑨ Hva er $\left(\frac{2+i}{i-4}\right)^*$?

Løsning:

$$\left(\frac{2+i}{i-4}\right)^* = \frac{2-i}{-i-4} = \frac{-(i-2)}{-(i+4)} = \underline{\underline{\frac{i-2}{i+4}}}$$