Plancks strålingslov [OS 6.1; YF 39.5]

Legeme med temperatur T emitterer energi i form av elektromagnetiske (EM) bølger.

Eks: Sola. Overflatetemp. ca 5800 K

$j(T)$ = emittert effekt pr flateenhet (W/m^2)

Josef Stefan (exp 1877) og Ludwig Boltzmann (termodynamikk 1884):

$$j(T) \sim T^4 \qquad (\sim : \text{proporsjonal med})$$

Svart legeme:

Generelt vil EM stråling inn mot et legeme delvis absorberes, reflekteres og transmitteres, med andeler a, r og t, dvs $a + r + t = 1$. Et svart legeme er en idealisering med $a = 1$. Hvis det svarte legemet er i termisk likevekt, dvs har konstant temp. T, må det emittere like mye energi som det absorberer. Dermed:

$$a = e = 1 \quad ; \quad e = \text{emisjonsevnen (emissiviteten)}$$

(Reelle eks: Polert metallplate $a \approx 0.1$
Matte overflater $a > 0.9$ (alle farger))

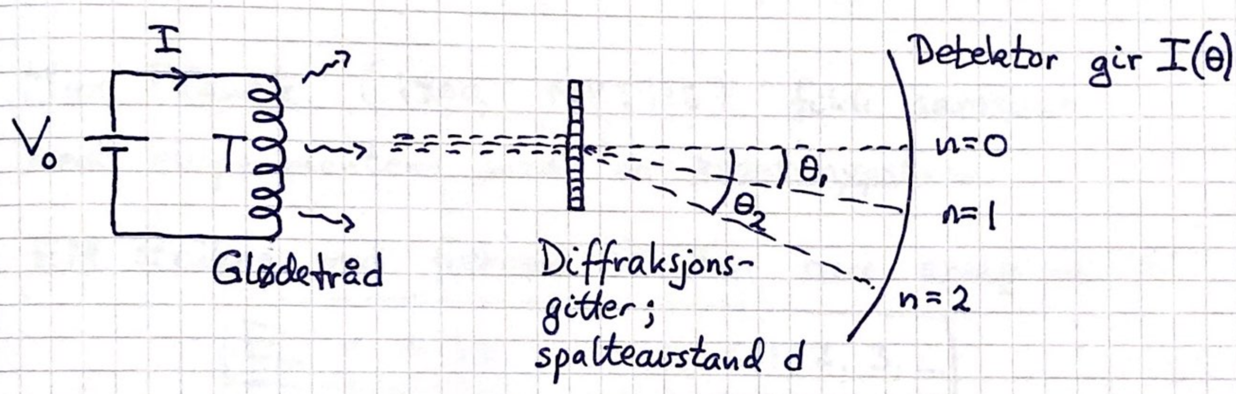
$j(T)$ er total emittert intensitet. Fordeler seg over "alle mulige" bølgelengder og frekvenser:

$$j(T) = \int_0^\infty I_\lambda(\lambda, T)\,d\lambda = \int_0^\infty I_\nu(\nu, T)\,d\nu$$

I_λ = emittert intensitet pr bølgelengdeenhet $\left(\frac{W}{m^2 \cdot m}\right)$

I_ν = ———— " ———— frekvensenhet $\left(\frac{W}{m^2 \cdot Hz}\right)$

Måling av I_λ (eller I_ν):



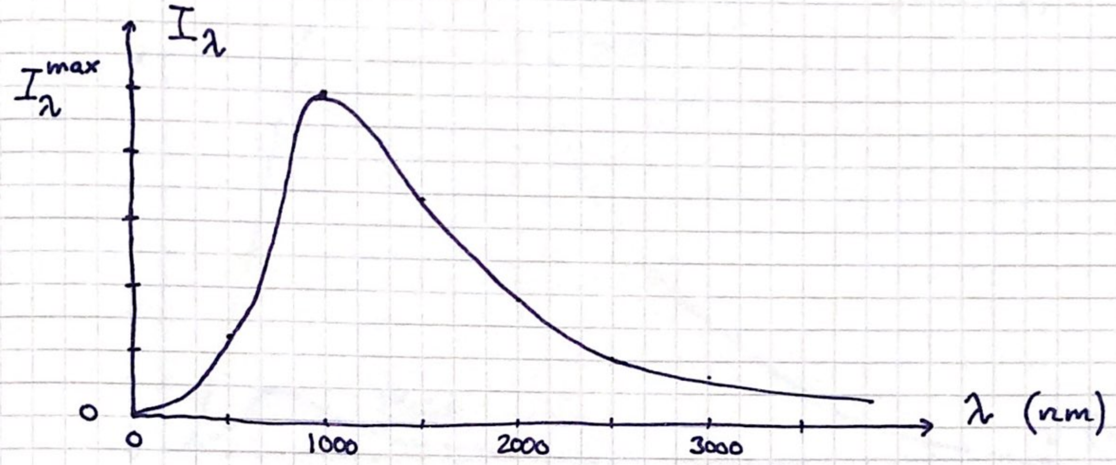
Konstruktiv interferens i retninger som oppfyller

$$d \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda$$

Kan måle $I_1(\theta)$ omkring θ_1 (gjennom 1. orden) og regne om til I_λ med

$$\lambda = d \cdot \sin\theta \qquad (n=1)$$

Halogenlampe med wolframtråd, $T = 3000\ K$ (shimadzu.com) :



Max Planck (1900, NP 1918) fikk samsvar med eksperimentene med en <u>kvantehypotese</u> :

ÉM stråling med frekvens ν har bare energiene

$$\boxed{E_n = n \cdot h\nu \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots}$$

med $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js

Dette gir frekvensfordelingen for et svart legeme :

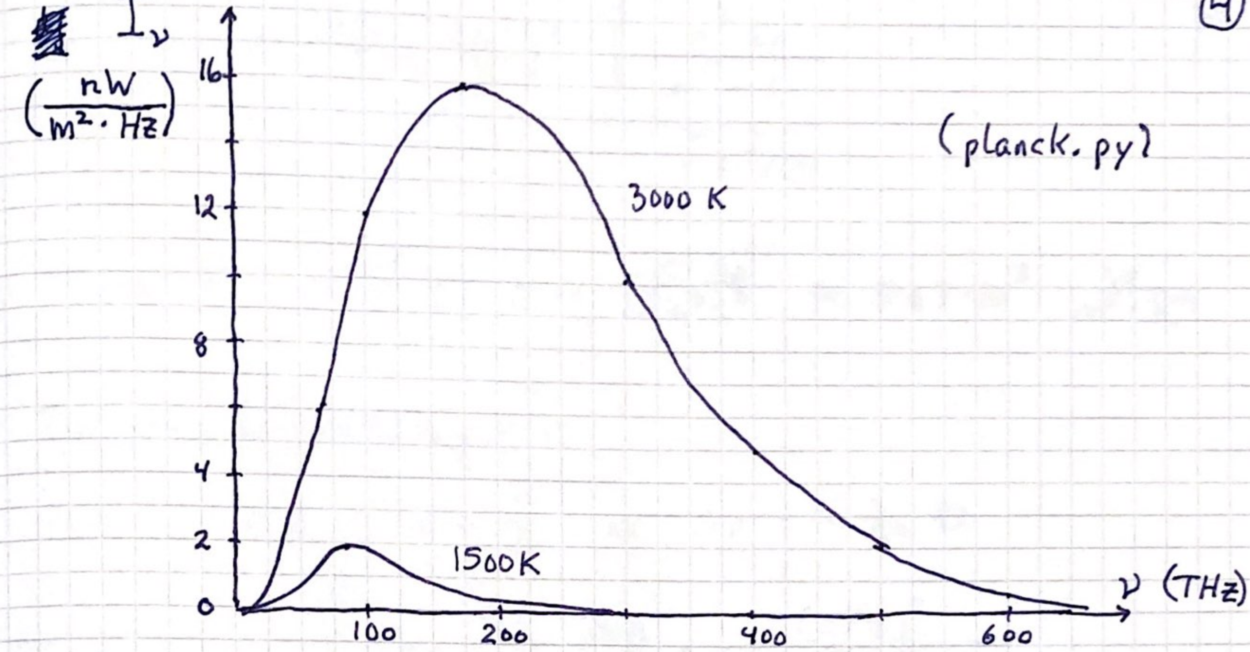
$$\boxed{I_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}}$$

som er Plancks strålingslov. Her er

$h \equiv 6.62607015 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant

$c \equiv 299792458$ m/s = lysfarten i vakuum

$k_B \equiv 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K = Boltzmanns konstant



(planck.py)

Vi ser at

- $j(T)$ øker raskt når T økes
- ν som gir max I_ν øker med T

Dette er hhv Stefan-Boltzmanns Lov og Wiens forskyvningslov

Stefan - Boltzmanns lov:

$$j(T) = \int_0^\infty I_\nu(\nu,T)\,d\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3\,d\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

Vi substituerer med dimensjonsløs $x = h\nu/k_BT$:

$$d\nu = \frac{k_BT}{h}dx \quad ; \quad \nu^3 = \left(\frac{k_BT}{h}\right)^3 x^3$$

$$\Rightarrow \quad j(T) = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1}}_{=\pi^4/15}$$

$$\Rightarrow \quad j(T) = \sigma T^4 \; ; \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \; \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

Bølgelengdefordelingen :

Fra $c = \lambda \cdot \nu$: $\nu = \frac{c}{\lambda}$ og $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$

$$\Rightarrow \quad j(T) = -\int_\infty^0 d\lambda \cdot \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{(c/\lambda)^3}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

$$= + \int_0^\infty d\lambda \; I_\lambda(\lambda, T)$$

$$\Rightarrow \quad I_\lambda(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2/\lambda_5}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

Wiens forskyvningslov :

Max I_λ ved λ_{max} som fastlegges med $\frac{dI_\lambda}{d\lambda} = 0.$

Max I_ν ved ν_{max} ——— " ——— $\frac{dI_\nu}{d\nu} = 0.$

Gir hhv

$$\lambda_{max} \cdot T \approx 2898 \; \mu m \cdot K$$

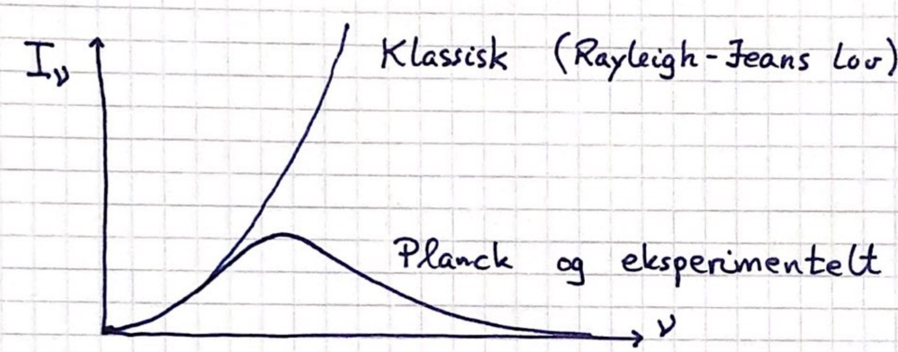
og

$$\frac{\nu_{max}}{T} \approx 5.876 \cdot 10^{10} \; Hz/K$$

Den klassiske grensen: Hvis termisk energi er mye større enn avstanden mellom de kvantiserte energinivåene, dvs $k_B T \gg h\nu$, forsvinner effekter knyttet til kvantisering.

$$h\nu \ll k_B T \quad \Rightarrow \quad e^{h\nu/k_B T} - 1 \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1 = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\Rightarrow I_\nu(\nu, T) \approx \frac{2\pi h\nu^3/c^2}{h\nu/k_B T} = \frac{2\pi k_B T}{c^2} \cdot \nu^2$$



Siden $I_\nu \sim \nu^2$ med klassisk teori, blir

$$j(T) = \int_0^\infty I_\nu \, d\nu \longrightarrow \infty$$

som er ufysisk. ("UV-katastrofen")