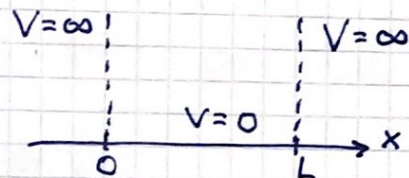


Partikkel i 1D boks [OS 7.4; YF 40.2]

(33)

Anta at en partikkel, masse m , befinner seg i potensialet

$$V(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 < x < L \\ \infty & ; \text{ellers} \end{cases}$$



Klassisk: $E = K = \frac{1}{2}mv^2$, med alle $E \geq 0$ tillatt.
Hastighet $v = \pm \sqrt{2E/m}$; partikkelen seiler fram og tilbake mellom to harde vegger.

Kvantemekanisk: SL har stasjonære løsninger

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

der $\psi(x)$ og E er hhv egenfunkt. og egenverdier til operatoren

$$\hat{H} = \hat{K} + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

dus

$$\hat{H} \psi(x) = E \psi(x)$$

Utenfor boksen: $V = \infty \Rightarrow |\psi|^2 = 0$; dus null sannsynlighet for at partikkelen er der $V = \infty$.

Inni boksen: $V = 0$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \quad ; \quad E = K \geq 0$$

$$\Rightarrow \psi'' + k^2\psi = 0 \quad ; \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

Generell løsning: $\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$

(34)

Vi krever at sanns.fordelingen $|\psi|^2$ og bølgefunksjonen ψ er kontinuerlige funksjoner :

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \psi(x) = A \sin kx$$

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi ; n = 1, 2, 3, \dots$$

Dermed er også energien kvantisert :

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m L^2}$$

Normering av sannsynlighet: $\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1$

$$\begin{aligned} \sin^2(k_n x) &= \left\{ \frac{1}{2i} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) \right\}^2 \\ &= -\frac{1}{4} (e^{2ik_n x} + e^{-2ik_n x} - 2) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2k_n x \end{aligned}$$

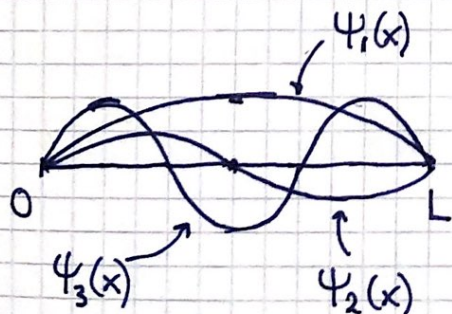
Dermed, med $\psi_n(x) = A_n \sin k_n x$:

$$|A_n|^2 = \int_0^L \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2k_n x \right) dx = 1$$

$$\Rightarrow |A_n|^2 \cdot \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Normerte egenfunksjoner er da, med $k_n = n\pi/L$:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$



$$E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2$$

$$E_2 = 4E_1$$

$$E_3 = 9E_1$$

$$\vdots$$

$$E_n = n^2 E_1$$