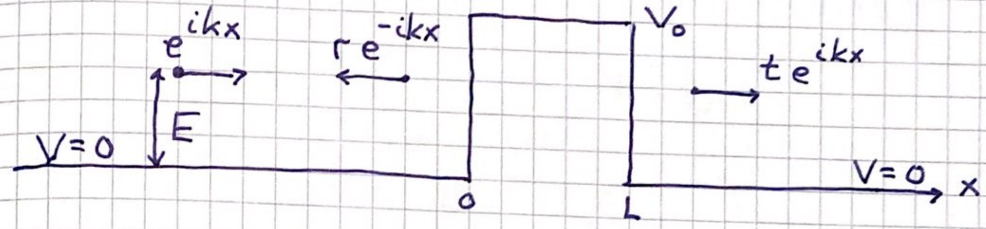
Tunneleffekt



Antar partikkel med skarp impuls $p = \hbar k$ inn fra venstre, energi $E = K = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$:

$$\Psi_i(x) = e^{ikx} \qquad (x<0)$$

To mulige utfall:
Refleksjon, med sanns. R. Transmisjon med sanns. $T = 1-R$, slik at $R+T=1$.

Reflektert bølge: $\Psi_r(x) = re^{-ikx} \qquad (x<0)$

Transmittert —"— : $\Psi_t(x) = te^{ikx} \qquad (x>L)$

Bølgefunksjon i barriereområdet $0<x<L$:

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{\varkappa x} + Be^{-\varkappa x} & ;\ E<V_0 \ ;\ \varkappa = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar \\ ae^{iqx} + be^{-iqx} & ;\ E>V_0 \ ;\ q = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar \end{cases}$$

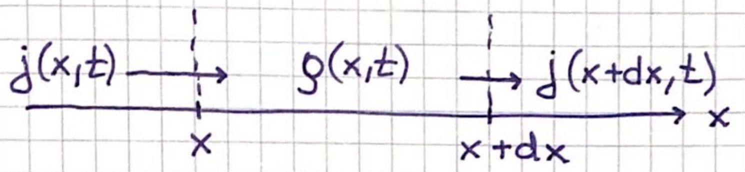
Krav om kontinuerlig Ψ og $d\Psi/dx$ i $x=0$ og $x=L$ gir 4 ligninger som fastlegger A, B, r, t for $E<V_0$ og a, b, r, t for $E>V_0$.
Deretter vil prinsippet om bevaring av sannsynlighet vise at $R = |r|^2$ og $T = |t|^2$.

Sannsynlighetsstrøm og bevaring av sannsynlighet

Fra før: $\rho(x,t) = \dfrac{dP}{dx} = |\Psi(x,t)|^2$

= sanns. pr lengdeenhet

Hvis ρ forandres et sted, skyldes dette en netto strøm j av sanns., inn eller ut:



$$\underbrace{j(x,t) - j(x+dx,t)}_{\text{netto sanns.strøm inn på } dx} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(x,t)\,dx\}}_{\text{sanns.endring pr tidsenhet på } dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{j(x+dx,t) - j(x,t)}{dx} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$ Kontinuitetslign. for sannsynlighet.

Nå kan et generelt uttrykk for j utledes ved å skrive om $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\{\Psi^* \Psi\}$ til $-\dfrac{\partial}{\partial x}\{\text{uttrykk}\}$. Dette gjøres i praksis ved å bruke SL, $i\hbar\, \partial\Psi/\partial t = \hat{H}\Psi$.
Vi identifiserer dermed "uttrykk" som j.
Resultat:

$$j = \mathrm{Re}\left\{\Psi^* \frac{\hat{p}}{m} \Psi\right\} \quad ; \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$