

Pga bevaring av sannsynlighet må vi ha:

(65)

$$j_i = |j_r| + |j_t| \quad (j_r < 0)$$

Vi regner ut:

$$j_i = \operatorname{Re} \left\{ e^{-ikx} \frac{\hbar}{im} \frac{d}{dx} e^{ikx} \right\} = \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_r = \operatorname{Re} \left\{ r^* e^{ikx} \frac{\hbar}{im} \frac{d}{dx} r e^{-ikx} \right\} = -|r|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_t = \operatorname{Re} \left\{ t^* e^{-ikx} \frac{\hbar}{im} \frac{d}{dx} t e^{ikx} \right\} = |t|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

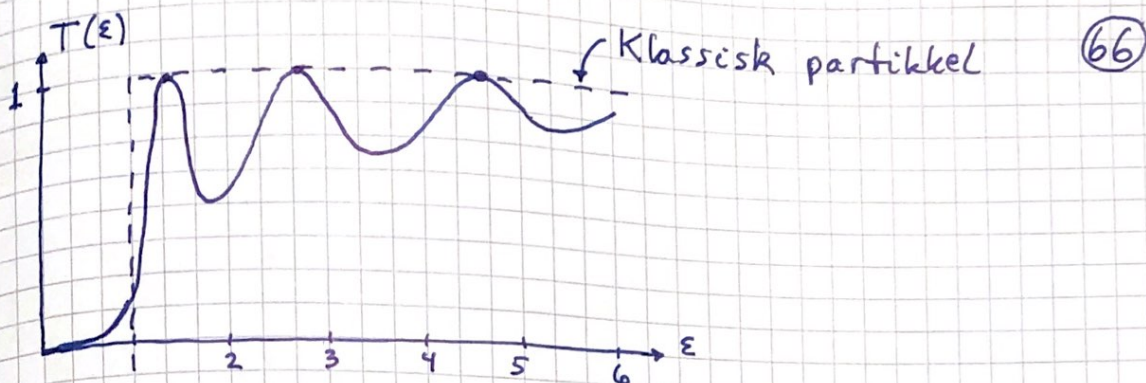
Dvs, $|r|^2$ og $|t|^2$ er hhv andel reflektert og andel transmittert sannsynlighet, slik at

$$R = |r|^2, \quad T = |t|^2, \quad R + T = 1$$

For firkantbarrieren med bredde L og høyde V_0 :

Vi definerer $\epsilon = E/V_0$ og $k_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar$.

$$T = \begin{cases} \left[1 + \frac{\sinh(k_0 L \sqrt{1-\epsilon})}{4\epsilon(1-\epsilon)} \right]^{-1} & \text{for } \epsilon < 1 \\ \left[1 + \frac{\sin^2(k_0 L \sqrt{\epsilon-1})}{4\epsilon(\epsilon-1)} \right]^{-1} & \text{for } \epsilon > 1 \end{cases}$$

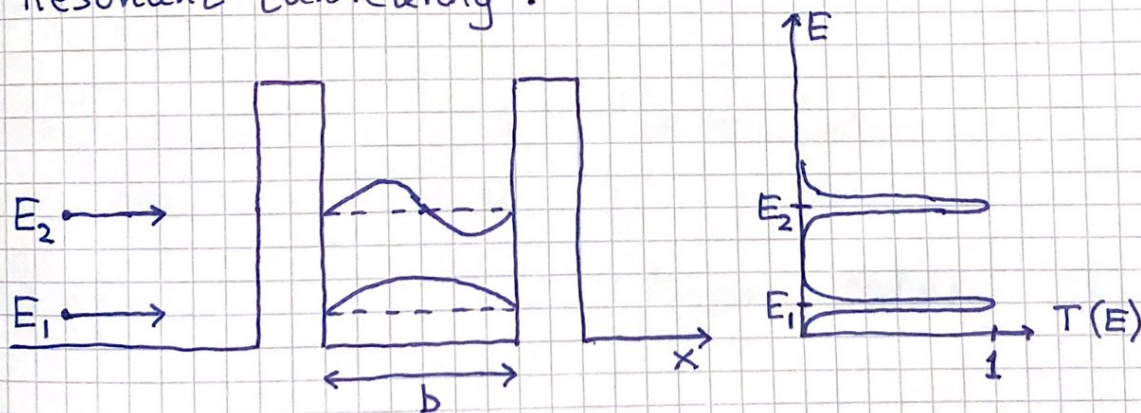


- Tunneleffekt: $T > 0$ for $E < V_0$ ($\epsilon < 1$). Dessuten $R > 0$ for $E > V_0$.
- $T = 1$ når $\sin(k_0 L \sqrt{E-1}) = 0$, dvs $k_0 L \sqrt{E-1} = n\pi$ og dermed

$$E - V_0 = K = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

som er energinivåene for partikkel i boks;
dvs stående bølger med $\lambda_n = 2L/n$ ($n=1,2,3,\dots$)

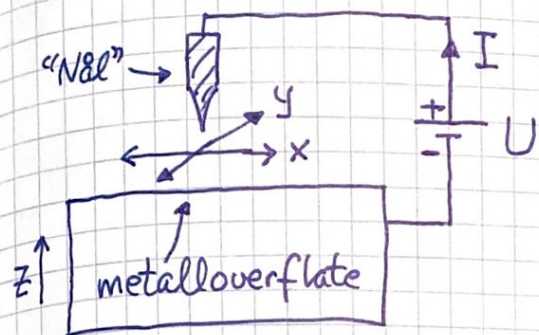
- Resonant tunnelering:



Resonans og stående bølger mellom de to barrierene gir $T=1$ når

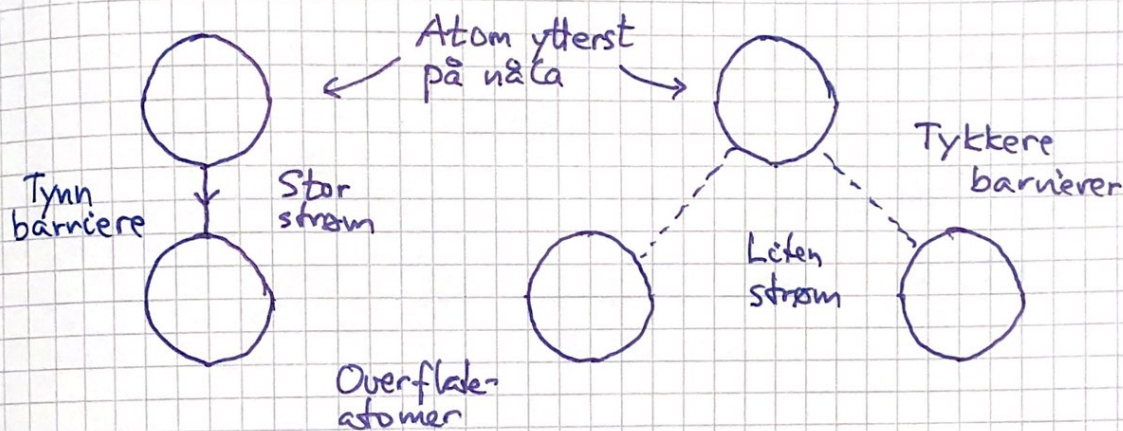
$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m b^2} ; \lambda_n = \frac{2b}{n} ; n=1,2,\dots$$

STM : Scanning Tunneling Microscopy



Nåla scanner
metalloverflaten og
strømmen $I(x, y)$ måles.
Elektronene må tunnelere
mellom nåla og overflaten.

På atomær skala:



$I(x, y)$ gir avbildning av overflaten
med atomær oppløsning.

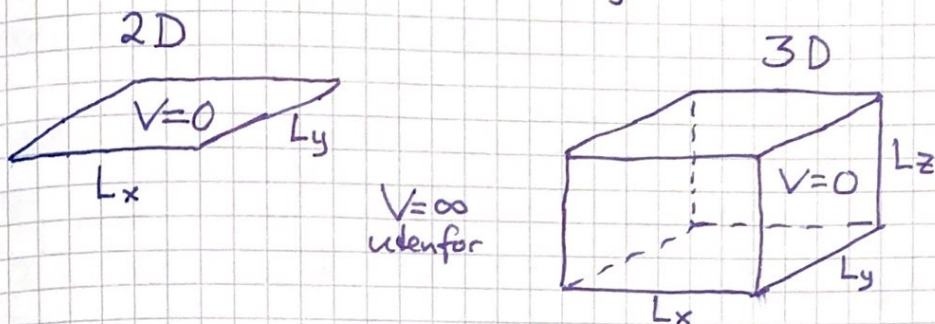
Binnig og Rohrer, IBM Zürich, Nobelpriis 1986

Se youtube:

"A boy and his atom"

"Moving atoms: Making the world's smallest movie"

Partikkel i boks i 2D og 3D



TUSL separerer i hhv 2 og 3 uavh. ligninger, og løsningene er på produktform. Med $\psi=0$ på de 4 kantene evt. 6 grenseflatene:

$$\psi_{n_x n_y}(x, y) = \sqrt{\frac{2^2}{L_x L_y}} \sin \frac{n_x \pi x}{L_x} \cdot \sin \frac{n_y \pi y}{L_y} \quad (2D)$$

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2^3}{L_x L_y L_z}} \sin \frac{n_x \pi x}{L_x} \cdot \sin \frac{n_y \pi y}{L_y} \cdot \sin \frac{n_z \pi z}{L_z}$$

$$E_{n_x n_y n_z} = (\pi^2 \hbar^2 / 2m) (n_x^2 / L_x^2 + n_y^2 / L_y^2 + n_z^2 / L_z^2) \quad (3D)$$

med $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, 4, \dots$

Degenerasjon: Med kvadratisk evt kubisk boks, $L_x = L_y (= L_z) = L$, blir det mulig med flere bølgefunksjoner som tilsvarende samme energi. Degenerasjonsgraden g = antall ulike tilstander som alle gir en gitt energi.

Eks: Kubisk boks, $L_x = L_y = L_z$

$$E_1 = E_{111} = 3\pi^2 \hbar^2 / 2mL^2 ; g_1 = 1$$

$$E_2 = E_{211} = E_{121} = E_{112} = 6\pi^2 \hbar^2 / 2mL^2 ; g_2 = 3$$

$$E_{123} = E_{132} = E_{213} = E_{231} = E_{312} = E_{321} = 14\pi^2 \hbar^2 / 2mL^2 ; g = 6$$

Eks 1: Hva er total energi for 10 ikke-vekselvirkende ⁽⁶⁹⁾elektroner i grunntilstanden i en boks med sidekanter 3nm ?

Løsn 1: Pga spindegenerasjon $g_s=2$ for hver orbital $\psi_{n_x n_y n_z}$ har 2 av elektronene energi $3\pi^2\hbar^2/2mL^2$, 2·3 har energi $6\pi^2\hbar^2/2mL^2$, og de 2 gjenværende har energi $9\pi^2\hbar^2/2mL^2$.

$$E_{\text{tot}} = (6+36+18)\pi^2\hbar^2/2mL^2 = 30\pi^2\hbar^2/mL^2 = \underline{\underline{2.49\text{eV}}}$$

Eks 2: Omtrent hvor tett ligger energinivåene for elektroner i en boks med $L = 1\text{mm}$?

Løsn 2: ΔE er av størrelsesorden $\pi^2\hbar^2/2mL^2$, som med $L=10^{-3}\text{m}$ blir $3.7\cdot 10^{-13}\text{eV}$.

Med andre ord, praktisk talt et kontinuerlig spektrum.