

**FY6019 Moderne fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2017.**  
**Løsningsforslag til øving 1.**

**Oppgave 1: Interferens med C<sub>60</sub>-molekyler**

a) Sublimasjon betyr at stoffet gjennomgår en faseovergang direkte fra fast stoff til gass. Dette skjer så lenge partialtrykket av stoffet i den omgivende atmosfæren er mindre enn trykket som tilsvarer stoffets trippelpunkt.

b) Massen til 1 karbonatom er ca 12 u, der 1 u er ca  $1.66 \cdot 10^{-27}$  kg. En buckyball har da masse  $60 \cdot 12 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}$  kg  $\simeq 1.2 \cdot 10^{-24}$  kg.

Inspeksjon av en fotball eller et bilde av en fotball eller en buckyball på nett viser at det går ca 5 bindingslengder på lengden mellom diametralt motsatte atomer. Med bindingslengde 1.4 Å er dette ca 7 Å. Et tillegg på 3 Å for elektronskyen på utsiden gir en diameter omkring 1 nm.

c) Impuls:  $p = mv = 1.2 \cdot 10^{-24} \cdot 117 = 1.4 \cdot 10^{-22}$  kg m.

Kinetisk energi:  $K = mv^2/2 = 1.2 \cdot 10^{-24} \cdot 117^2/2 = 8.2 \cdot 10^{-21}$  J = 0.051 eV = 51 meV.

Bølgelengde:  $\lambda = h/p = 6.626 \cdot 10^{-34}/1.4 \cdot 10^{-22} = 4.7 \cdot 10^{-12}$  m = 4.7 pm.

Frekvens:  $\nu = E/h = K/h = 8.2 \cdot 10^{-21}/6.626 \cdot 10^{-34} = 1.2 \cdot 10^{13}$  Hz.

d) Her er  $\lambda/d = 4.7 \cdot 10^{-12}/100 \cdot 10^{-9} = 4.7 \cdot 10^{-5}$ , som er mye mindre enn 1. Dermed er  $\theta = \lambda/d = 4.7 \cdot 10^{-5}$  (radianer) for 1. ordens maksimum. Hvis vi kaller avstanden mellom 0. og 1. ordens maksimum på detektoren for  $z$ , har vi  $\tan \theta = z/L$ , med  $L = 1.2$  m. Med  $\theta \ll 1$  kan vi sette  $\tan \theta = \theta$ , slik at  $z = \theta L = 4.7 \cdot 10^{-5} \cdot 1.2 = 5.7 \cdot 10^{-5}$  m = 57  $\mu$ m. Dette stemmer bra med Fig. 7 i artikkelen.

e) Antall molekyler pr volumenhet i strålen (med partikkelfluks  $I$  og hastighet  $v$ ):  $n = I/v = 3 \cdot 10^{13}/200 = 1.5 \cdot 10^{11}$  m<sup>-3</sup>.

Midlere volum pr molekyl:  $V = 1/n = 6.7 \cdot 10^{-12}$  m<sup>3</sup>.

Dette tilsvarer en boks med sidekanter  $L = V^{1/3} = 1.9 \cdot 10^{-4}$  m = 190  $\mu$ m.

Dette blir da omtrentlig avstand mellom "nabomolekyler" i strålen, og dette er mye lenger enn apparaturens utstrekning i strålens retning. Vi må derfor konkludere med at molekylene stort sett interfererer med seg selv.

**Oppgave 2: Operatorer, egenfunksjoner og egenverdier**

a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \exp(-x^2)}{\partial x} &= -2x \exp(-x^2) \\ \frac{\partial \sin kx}{\partial x} &= k \cos kx \\ \frac{\partial \cos kx}{\partial x} &= -k \sin kx\end{aligned}$$

b)

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \exp(ikx)}{\partial x} = \hbar k \exp(ikx),$$

dvs vi har fått tilbake samme funksjon som vi startet med, multiplisert med en konstant,  $\hbar k$ . Følgelig er funksjonen  $\exp(ikx)$  en egenfunksjon til operatoren  $\hat{p}_x = (\hbar/i)\partial/\partial x$ , og den tilhørende egenverdien er  $\hbar k$ .

c) Vi trenger den 2. deriverte av den oppgitte funksjonen:

$$\begin{aligned}\frac{d \exp(-x^2/2)}{dx} &= -x \exp(-x^2/2), \\ \frac{d^2 \exp(-x^2/2)}{dx^2} &= -\exp(-x^2/2) + x^2 \exp(-x^2/2).\end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}\hat{h} \exp(-x^2/2) &= \left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 \right) \exp(-x^2/2) \\ &= +\frac{1}{2} \exp(-x^2/2) - \frac{x^2}{2} \exp(-x^2/2) + \frac{x^2}{2} \exp(-x^2/2) \\ &= \frac{1}{2} \exp(-x^2/2).\end{aligned}$$

Dette viser at  $e^{-x^2/2}$  er egenfunksjon til operatoren  $\hat{h}$ , med egenverdi  $1/2$ .

### Oppgave 3: Noen kontrollspørsmål og små oppgaver

1. Til operatoren  $\hat{p}_x = (\hbar/i)(\partial/\partial x)$  svarer  $x$ -komponenten av partikkelens impuls  $\mathbf{p}$ .
2. Operatoren for kinetisk energi  $K(p)$  bestemmes ved å erstatte  $\mathbf{p}$  med operatoren  $(\hbar/i)\nabla$  i det klassiske uttrykket for  $K$ . Dermed:

$$\widehat{K} = \frac{(\hbar/i)^2 \nabla^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}.$$

3. Siden  $\Psi_3$  kun avhenger av  $x$ , og ikke av  $y$  eller  $z$ , er det klart at egenverdiene  $p_y$  og  $p_z$  begge er lik null. Derivasjon av  $\Psi_3$  mhp  $x$  gir  $ip\Psi_3/\hbar$ , som multiplisert med  $\hbar/i$  gir egenverdien  $p_x = p$ . Derivasjon to ganger mhp  $x$  gir  $-p^2\Psi_3/\hbar^2$ , som multiplisert med  $-\hbar^2/2m$  gir egenverdien  $K = p^2/2m$ .
4. Sammenlignet med  $\Psi_3$  så gir en gangs derivasjon samme resultatet, men med motsatt fortegn, slik at her er  $p_x = -p$ , en plan bølge som forplanter seg i negativ  $x$ -retning (hvis  $p > 0$ ). To gangers derivasjon gir samme resultat som med  $\Psi_3$ , slik at  $K$  blir den samme.
5.  $\Psi_3$  svarer til fysisk impuls  $\mathbf{p} = p\hat{x}$ ,  $\Psi_4$  svarer til fysisk impuls  $\mathbf{p} = -p\hat{x}$ .
6. Derivasjon av cosinus gir sinus, dermed kan ikke  $\cos kx$  være egenfunksjon til  $\hat{p}_x$ .

7.

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = -\frac{ip^2}{2m\hbar} \Psi_3$$

og

$$\nabla^2 \Psi_3 = \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi_3.$$

Dermed er

$$i\hbar \Psi_3 = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \Psi_3,$$

som vi skulle vise.

8. Realdelen av  $\Psi_3$  er en cosinus-funksjon. En gangs derivasjon mhp  $t$  gir som resultat en sinus, mens to gangers derivasjon mhp  $x$  gir som resultat en cosinus. Dermed kan realdelen av  $\Psi_3$  umulig oppfylle SL.

9.

$$\begin{aligned}\widehat{K}\Psi_9 &= \frac{p^2}{2m}\Psi_9, \\ \widehat{p}\Psi_9 &= p(\Psi_3 - \Psi_4).\end{aligned}$$

Med andre ord,  $\Psi_9$  er egenfunksjon til  $\widehat{K}$  (med egenverdi  $p^2/2m$ ), men ikke egenfunksjon til  $\widehat{p}$  eller  $\widehat{p}_x$ . Dermed kan  $\Psi_9$  ikke beskrive en fysisk tilstand med veldefinert impuls.

10. Ved temperatur 300 K har vi  $K = 3k_B T/2 = 3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300/2 = 6.2 \cdot 10^{-21}$  J, dvs ca 39 meV. Med  $K = p^2/2m$  og  $p = h/\lambda$  har vi  $\lambda = h/p = h/\sqrt{2mK} = h/\sqrt{3mk_B T} = 6.626 \cdot 10^{-34} / \sqrt{(3 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} = 1.45 \cdot 10^{-10}$  m = 1.45 Å.

11.  $\widehat{p}\psi = (\hbar/i)\nabla\psi = (\hbar/i)(ik)\hat{x}\psi = \hbar k\hat{x}\psi$ , som viser at  $\psi$  er egenfunksjon til impulsoperatoren, med egenverdi  $\hbar k\hat{x}$ .

12. SL:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \widehat{H}\Psi(\mathbf{r},t),$$

med

$$H = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}).$$

TUSL:

$$H\Psi(\mathbf{r},t) = E\Psi(\mathbf{r},t).$$

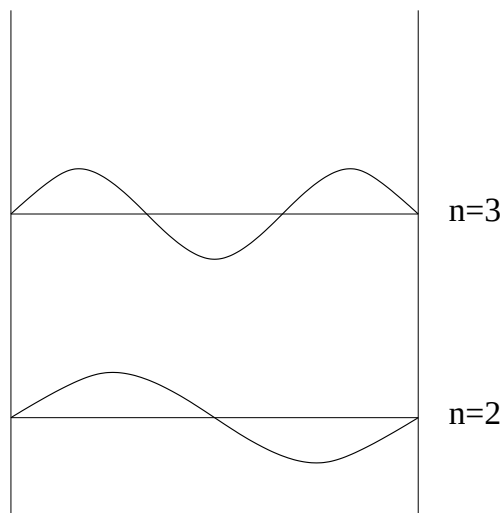
13. Tilsvarende som i 12, men med  $\partial^2/\partial x^2$  i stedet for  $\nabla^2$  og  $V(x)$  i stedet for  $V(\mathbf{r})$ .

#### Oppgave 4: Partikkel i boks

a) Grunntilstanden,  $n = 1$ , har ingen nullpunkter, 1. eksiterte tilstand,  $n = 2$ , har ett nullpunkt, osv. Dvs at tilstand  $n$  har  $n - 1$  nullpunkter.

b) Grunntilstanden og alle eksiterte tilstander med odde  $n$  er symmetriske omkring boksens midtpunkt  $x = L/2$ . Tilstander med like  $n$  er antisymmetriske omkring  $L/2$ . Absoluttkvadratet av bølgefunksjonen er symmetrisk omkring  $L/2$  for alle  $n$ .

c) Her er  $\psi_n''/\psi_n = -2mE_n/\hbar^2 < 0$  for alle  $n$ . Det betyr at  $\psi_n$  krummer inn mot  $x$ -aksen. Skisse:



d) Vi finner den ønskede sannsynligheten ved å integrere  $|\psi_1(x)|^2$  fra  $L/4$  til  $3L/4$ :

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{L/4}^{3L/4} \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \\
 &= \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 u du \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2} (1 - \cos 2u) du \\
 &= \frac{1}{\pi} \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} \left( u - \frac{1}{2} \sin 2u \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin(3\pi/2) + \frac{1}{2} \sin(\pi/2) \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} (\pi/2 + 1/2 + 1/2) \\
 &= 1/2 + 1/\pi \\
 &\simeq 0.82,
 \end{aligned}$$

dvs ca 82%. Her har vi substituert  $u = \pi x/L$  og brukt den trigonometriske identiteten  $\sin^2 u = (1 - \cos 2u)/2$ .

e) Energinivåene er

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Med  $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg,  $L = 5 \cdot 10^{-9}$  m og  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$  Js finner vi

$$E_1 = 2.39 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 15 \text{ meV},$$

og videre  $E_2 = 4E_1 = 60 \text{ meV}$  og  $E_3 = 9E_1 = 150 \text{ meV}$ .

Er dette små eller store energier og energiforskjeller? For å si noe om det, må vi ha noe å sammenligne med, og vi kan knytte det til vår makroskopiske verden ved å sammenligne med typisk termisk energi  $k_B T$ . Ved romtemperatur, ca 300 K, er  $k_B T \simeq 25 \text{ meV}$ . Dette er mindre enn, men av samme størrelsesorden som avstanden fra grunntilstanden til 1. eksiterte tilstand,  $E_2 - E_1 = 45 \text{ meV}$ . Med andre ord, denne boksen vil "oppføre seg kvantemekanisk": Selv ved romtemperatur vil elektronet befinne seg i grunntilstanden, og det er knapt nok termisk energi tilgjengelig til å eksitere elektronet opp i 1. eksiterte tilstand. Og dersom vi senker temperaturen til f.eks 77 K (som tilsvarer flytende nitrogen), vil elektronet med stor sannsynlighet befinne seg i boksens grunntilstand.

f) Med  $m = 70$  kg og  $L = 1$  m blir  $E_1 = 7.8 \cdot 10^{-70} \text{ J} = 5 \cdot 10^{-48} \text{ meV}$ . Det betyr at avstanden fra grunntilstanden til 1. eksiterte tilstand er ca  $10^{-47} \text{ meV}$ . Setter vi dette lik termisk energi  $k_B T$ , finner vi at det tilsvarer en temperatur  $6 \cdot 10^{-47} \text{ K}$ . Med andre ord: Ingen fare for at du ville merke noe til kvantisering i en slik situasjon.