

FY6019 Moderne fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.

LF til oppgavesett1.pdf

1

Computertomografi (CT) utføres med røntgenstråling, og en typisk bølgelengde for fotonene kan være 73 pm. Hva er da fotonenergien?

$$E = hc/\lambda = 2.71 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 17 \text{ keV}$$

2

Eksperimenter viser at fluorofulleren-molekyler med kjemisk formel $\text{C}_{60}\text{F}_{48}$ har bølgeegenskaper. (Phys Rev Lett 91 (2003)) Hva er (den termiske de Broglie-) bølgelengden til slike molekyler ved en absolutt temperatur 560 K? (Bruk atomære masser 12u og 19u for hhv C og F.)

Molekylets masse er $(12 \cdot 60 + 19 \cdot 48) \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} = 2.71 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$ slik at $\lambda = h/\sqrt{3mk_B T} = 2.6 \text{ pm}$

3

Hva er omtrent rms-hastigheten i en gass av $\text{C}_{60}\text{F}_{48}$ -molekyler ved 560 K?
(Se BB - Undervisningsmateriell - Diverse bakgrunnsstoff - Kinetisk gassteori.)

Midlere translasjonsenergi er $3k_B T/2$ (3 kvadratiske frihetsgrader), slik at $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T/m} = 92 \text{ m/s} \simeq 0.1 \text{ km/s}$

4

Hva er midlere rotasjonsenergi pr $\text{C}_{60}\text{F}_{48}$ -molekyl ved 560 K?
(Se BB - Undervisningsmateriell - Diverse bakgrunnsstoff - Kinetisk gassteori.)

Molekylet er ikke lineært og har dermed 3 kvadratiske rotasjonsfrihetsgrader, slik at midlere rotasjonsenergi pr molekyl er $3k_B T/2$, det samme som midlere translasjonsenergi. Ved 560 K er dette 72 meV

5

Kreftsvulster kan ødelegges med ulike typer partikler. I protonterapi akselereres protoner slik at de oppnår en kinetisk energi opp mot 250 MeV. Et proton har hvileenergi 939 MeV. Hva er da impulsen til et proton med kinetisk energi 250 MeV?

Total energi: $E = K + m_p c^2 = 1189 \text{ MeV}$. Fra $E^2 = (pc)^2 + (m_p c^2)^2$ følger det at impulsen er $p = (1/c)\sqrt{E^2 - (m_p c^2)^2} = 729 \text{ MeV}/c$, eventuelt $3.9 \cdot 10^{-19} \text{ kg m/s}$

6

På CERN finner vi The Proton Synchrotron, som akselererer ulike typer partikler til en kinetisk energi 25 GeV. Et eksempel er svovelskjermer, med masse 32u. Hva er hastigheten til en svovelskjerne med kinetisk energi 25 GeV?

Masse 32u gir hvileenergi ca 30 GeV, og dermed total energi ca 55 GeV. Impulsen kvadrert blir da $p^2 = 2125 \text{ GeV}^2/c^2$. Omskriving av uttrykket for relativistisk impuls gir $v^2/c^2 = 1/(1 + (mc/p)^2)$ hvorefter innsetting av tallverdiene $mc = 30 \text{ GeV}/c$ og utregnet verdi for p^2 til slutt gir $v/c \simeq 0.838$, dvs $v \simeq 2.5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

7

Oppgave 7-10:

Et elektron befinner seg i en endimensjonal uendelig dyp potensialbrønn med bredde 6.5 nm og konstant

potensial $V = 0$. Anta at elektronet foretar en overgang fra 1. eksiterte tilstand til grunntilstanden slik at det sendes ut et foton. Hva er fotonets bølgelengde?

Dette er partikkel i boks, med boksbredde $L = 6.5$ nm. Kvantiserte energinivåer er $E_n = n^2 \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2$. Dermed: $\lambda = hc / (E_2 - E_1) = 47$ μm

8

Anta nå at elektronet befinner seg i en tilstand som kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av grunntilstanden og 2. eksiterte tilstand, nærmere bestemt

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-iE_1 t / \hbar} - \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_3(x) e^{-iE_3 t / \hbar}$$

Med hvilken frekvens vil sannsynlighetstettheten $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$ oscillere?

Absoluttkvadratet av $\psi(x, t)$ blir på formen $f(x) + g(x) \cos\left(\frac{(E_3 - E_1)t}{\hbar}\right)$, som oscillerer med frekvens $f = 1/T = (E_3 - E_1) / 2\pi\hbar = 17$ THz

9

Anta i neste omgang at et elektron i denne potensialboksen er preparert i en antisymmetrisk og normert starttilstand $\Psi(x, 0) = \sqrt{4/L}$ for $3L/8 < x < 4L/8$, $\Psi(x, 0) = -\sqrt{4/L}$ for $4L/8 < x < 5L/8$ og $\Psi(x, 0) = 0$ ellers. Hva er sannsynligheten for at en måling av elektronets energi gir resultatet E_1 ?

Siden $\psi_1(x)$ er symmetrisk mens $\Psi(x, 0)$ er antisymmetrisk (om $L/2$), blir $c_1 = 0$

10

Med samme starttilstand som i forrige oppgave, hva er sannsynligheten for at en måling av elektronets energi gir resultatet E_2 ?

Sannsynligheten for å måle E_2 er $|c_2|^2$, der

$$c_2 = \int_0^L \psi_2^*(x) \Psi(x, 0) dx.$$

Med $\psi_2^*(x) = \psi_2(x) = \sqrt{2/L} \sin(2\pi x/L)$ og $\Psi(x, 0)$ som oppgitt i oppgave 9 har vi

$$c_2 = (\sqrt{32}/L) \cdot \int_{3L/8}^{4L/8} \sin(2\pi x/L) dx = (\sqrt{8}/\pi) \cdot (1 - 1/\sqrt{2}) = 0.2637.$$

Dermed er $|c_2|^2 = 0.0695 \simeq 7\%$

11

I moderne transmisjonselektronmikroskop (TEM) kan elektroner oppnå relativistiske hastigheter. Hva er impulsen til elektroner med kinetisk energi 300 keV?

Total energi: $E = K + m_e c^2 = 1.3 \cdot 10^{-13}$ J. Impuls: $p = (1/c) \sqrt{E^2 - (m_e c^2)^2} = 3.36 \cdot 10^{-22}$ kg m/s = 630 keV/c

12

I Bohr-modellen, hva er sammenhengen mellom elektronets kinetiske energi K og den potensielle energien (potensialet) V ?

Coulombpotensialet er $V(r) = -e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$, og i Bohr-modellen er total energi $E = -e^2 / 8\pi\epsilon_0 r$ (som med $r = a_0$ gir -13.6 eV). Dermed er $K = e^2 / 8\pi\epsilon_0 r = -V/2$