

**FY6019 Moderne fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.  
Et grundigere løsningsforslag til Øving 5, oppgave 2d.**

**Oppgave 2: Kvantemekaniske kommutatorer**

Som i notatene side 52 og 56 lar vi kommutatorene virke (operere) på en (vilkaarlig) bølgefunksjon  $\psi$ , som da generelt må antas å avhenge av de koordinatene som påvirkes av de ulike matematiske operasjonene i den aktuelle kommutatoren:

d) I klassisk mekanikk er dreieimpulsvektoren

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

slik at

$$L_x = yp_z - zp_y$$

og

$$L_y = zp_x - xp_z.$$

Kvantemekaniske operatorer konstrueres nå som vanlig ved å erstatte impulskomponenter med operatorer,

$$p_z \rightarrow \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z},$$

og tilsvarende for  $p_x$  og  $p_y$ . Da har vi

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] \psi &= [\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x] \psi \\ &= \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 \left[ y \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial x} \psi - y \frac{\partial}{\partial z} x \frac{\partial}{\partial z} \psi + z \frac{\partial}{\partial y} z \frac{\partial}{\partial x} \psi + z \frac{\partial}{\partial y} x \frac{\partial}{\partial z} \psi - \right. \\ &\quad \left. z \frac{\partial}{\partial x} y \frac{\partial}{\partial z} \psi + z \frac{\partial}{\partial x} z \frac{\partial}{\partial y} \psi + x \frac{\partial}{\partial z} y \frac{\partial}{\partial z} \psi - x \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial y} \psi \right] \end{aligned}$$

Her kansellerer ledd nr 2 og 7, samt ledd nr 3 og 6. I ledd nr 4 og 5 er det ingen derivasjoner som påvirker annet enn funksjonen  $\psi$ . Men i ledd nr 1 og 8 må vi bruke produktregel for derivasjon, siden "funksjonen"  $z$  står til høyre for  $\partial/\partial z$ . Ledd nr 1 blir

$$y \frac{\partial \psi}{\partial x} + yz \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x},$$

mens ledd nr 8 blir

$$-x \frac{\partial \psi}{\partial y} - xz \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y}.$$

Her vil 2. bidrag til ledd nr 1 kansellere ledd nr 5, og 2. bidrag til ledd nr 8 vil kansellere ledd nr 4. Alt i alt står vi kun igjen med 1. bidrag til ledd nr 1 og 8, dvs

$$y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Og så må vi huske på faktoren  $(\hbar/i)^2$ . Det gir

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] \psi = \frac{\hbar}{i} [y\hat{p}_x - x\hat{p}_y] \psi = i\hbar \hat{L}_z \psi.$$