FY6019 Moderne fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Øving 6.

Oppgave 1: Endelig potensialbrønn

a) Fra forelesningene har vi følgende ligning for bestemmelse av energien E_1 til grunntilstanden:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2mE_1}L}{2\hbar}\right) = \sqrt{\frac{V_0 - E_1}{E_1}}.$$

I denne oppgaven kjenner vi alle størrelser unntatt massen m, så vi må løse ligningen mhp m:

$$m = \frac{1}{2E_1}\left[\frac{2\hbar}{L}\arctan\left(\sqrt{\frac{V_0 - E_1}{E_1}}\right)\right]^2 = 7.17 \cdot 10^{-32}\ \text{kg} = 0.079 m_e.$$

b) Både for partikkel i boks og for partikkel i endelig potensialbrønn vil grunntilstandsenergien (og energien for andre bundne tilstander) avta med økende partikkelmasse.

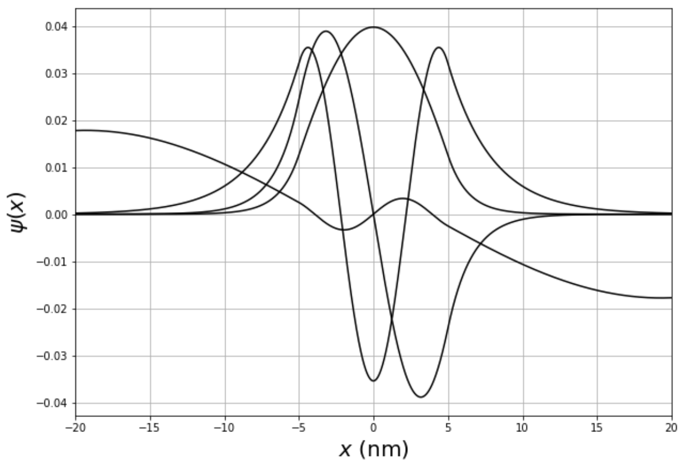
c) I det aktuelle tilfellet har vi

$$\frac{\sqrt{2mV_0}L}{\pi\hbar} \simeq 2.52,$$

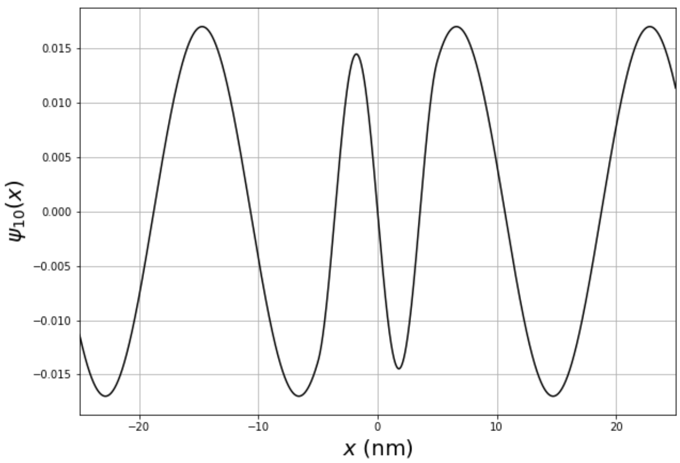
som har heltallsverdien 2. Dette gir $N = 1+2 = 3$. Med programmet `singlewell.py` kan vi bestemme energien til 1. og 2. eksiterte tilstand:

$$E_2 = 117\ \text{meV} \quad , \quad E_3 = 246\ \text{meV}.$$

d)



- Grunntilstanden: Symmetrisk, ingen nullpunkter.
  1. eksiterte tilstand: Antisymmetrisk, ett nullpunkt.
  2. eksiterte tilstand: Symmetrisk, to nullpunkter.
  Vi ser at 3. eksiterte tilstand (med 3 nullpunkter) er en kontinuumtilstand der også området utenfor brønnen er et klassisk tillatt område; bølgefunksjonen krummer *mot* x-aksen. Utenfor brønnområdet er den kinetiske energien temmelig liten, slik at bølgelengden blir stor.



- Her vil tallverdiene (og $\psi_{10}(x)$ i figuren ovenfor) avhenge av hvor brede "kontakter" du har valgt å bruke. Med kontakter med bredde hhv 20, 30 og 40 nm (dvs Nc lik hhv 2000, 3000 og 4000 i programmet) blir E_{10} hhv 0.441 eV, 0.372 eV og 0.343 eV. Jeg har her valgt $Nc = 3000$. Da blir mine estimater slik:

  Utenfor er bølgelengden ca 16.23 nm. I brønnområdet er bølgelengden ca 7.12 nm. $E_{10} = 372$ meV, som betyr at

$$
\begin{aligned}
k &= \sqrt{2mE_{10}}/\hbar = 8.80 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}, \\
K &= \sqrt{2m(E_{10} - V_0)}/\hbar = 3.87 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1},
\end{aligned}
$$

  som gir bølgelengder hhv $2\pi/k = 7.14$ nm og $2\pi/K = 16.23$ nm. Meget godt samsvar!

e) Bølgelengden blir $\lambda = c/\nu = ch/E = 2\pi c\hbar/E$, der E er energiforskjellen mellom to bundne tilstander. De tre mulige energiforskjellene er her 87 meV, 129 meV og 216 meV, som gir bølgelengder hhv 14.2, 9.6 og 5.7 μm. Dette er i det såkalt infrarøde området. ("Varmestråling" – termisk energi k_BT for et legeme med temperatur 310 K er til sammenligning ca 27 meV.

Oppgave 2: Tunneleffekt

Uttrykket for transmisjonssannsynligheten T er:

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 \kappa L} = \frac{1}{1 + (V_0^2/(4E(V_0 - E))) \sinh^2 \kappa L}.$$

Her er $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Her er

$$\kappa = \sqrt{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot (0.30 - 0.15) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}/1.05 \cdot 10^{-34} = 1.99 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1} = 0.199 \text{ Å}^{-1},$$

slik at den dimensjonsløse faktoren κL blir 1.99 og 7.97 når L er hhv 10 Å og 40 Å. Faktoren $V_0^2/4E(V_0 - E)$ får her verdien 1, slik at

$$\begin{aligned} T(10 \text{ Å}) &= \frac{1}{1 + \sinh^2 1.99} \simeq 0.072 \\ T(40 \text{ Å}) &= \frac{1}{1 + \sinh^2 7.97} \simeq 4.8 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Vi ser at T avtar raskt (eksponentielt) med økende barrierebredde. (Hvis en ikke har funksjoner som $\sinh(x)$ og $\cosh(x)$ på kalkulatoren, kan en med god tilnærmelse sette $\sinh(x) \simeq \cosh(x) \simeq \exp(x)/2$ når x er en del større enn 1. Dette vil her gi $T = 0.070$ for den tynne barrieren, allerede en god tilnærmelse med $x = 1.99$, med andre ord.)