Dette notatet repeterer noen punkter fra Tillegg 2, og dekker i detalj måling av degenererte egenverdier samt impulsrepresentasjonen av kvantemekanikk.

Tillegg 7

7. Innledning til FY2045/TFY4250

FY2045/TFY4250 *Kvantemekanikk I* er en fortsettelse av — og bygger på — FY1006/TFY4215 *Innføring i kvantefysikk*. Det er derfor svært viktig å ha kontroll på stoffet i sistnevnte. Dette krever rett og slett at en på egen hånd repeterer det mest sentrale stoffet i innføringskurset. I dette "Tillegget" nøyer vi oss med å minne om de grunnleggende postulatene, slik de ble formulert i Tillegg 2. Vi ser så på hvordan målepostulatet kan formuleres i forbindelse med måling av en degenerert egenverdi. Deretter repeterer vi (Fourier-)utviklingen av systembølgefunksjonen i impulsegenfunksjoner, og viser at kvadratet av koeffisientfunksjonen (Fourier-transformen), $|\Phi(p,t)|^2$, er sannsynlighetstettheten i impuls-rommet. Dette danner innledningen til det siste avsnittet, om impuls-representasjonen av kvantemekanikk, der vi viser at $\Phi(p,t)$ fungerer som en bølgefunksjon i impulsrommet.

7.1 Grunnpostulatene (2.1 i Hemmer, 2.2 i Tillegg 2)

Her nøyer vi oss med selve postulatene, slik de ble formulert i Tillegg 2:

A. Operator-postulatet

> Til hver observabel fysisk størrelse F svarer det i kvantemekanisk teori en lineær operator $\widehat{F}$. (T7.1)

B. Tilstandspostulatet

> Tilstanden til et system er (så) fullstendig (som mulig) beskrevet ved systemets bølgefunksjon $\Psi(q_n, t)$. Dennes tidsutvikling bestemmes av Schrödingerligningen,
> $$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi,$$
> der $\widehat{H}$ er systemets Hamilton-operator. (T7.2)

C. Forventningsverdi-postulatet

> Når vi gjør et stort antall målinger av en observabel F på et system som foran hver måling er preparert slik at det er i en tilstand $\Psi(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$, så vil middelverdien $\bar{F}$ nærme seg den teoretiske forventningsverdien
>
> $$\langle\, F \,\rangle_\Psi = \int \Psi^* \widehat{F} \Psi \, d\tau,$$
>
> der $\quad d\tau = dq_1 dq_2 \cdots dq_n \quad$ og integrasjonen går over det aktuelle variasjonsområdet for disse variablene.

(T7.3)

D. Måle-postulatet

> (i) De eneste mulige verdiene som en måling av observabelen F kan gi er en av egenverdiene f_n.
>
> (ii) Umiddelbart etter målingen av F er systemet i en egentilstand til den tilhørende operatoren $\widehat{F}$, nemlig en egentilstand som svarer til den målte egenverdien f_n.

(T7.4)

7.2 Måling av degenerert egenverdi

Dersom den målte egenverdien f_n er ikke-degenerert, dvs dersom egenverdiligningen

$$\widehat{F}\psi_n = f_n \psi_n$$

har bare én løsning ψ_n for egenverdien f_n, følger det av (ii) ovenfor at systemet etter målingen havner i denne tilstanden ψ_n. Denne tilstanden er unik, bortsett fra en ubestemt fasefaktor som er uten fysisk betydning.

I det motsatte tilfellet, når egenverdien f_n er degenerert med degenerasjonsgrad g_n, har egenverdiligningen ovenfor g_n løsninger ψ_{ni} som vi nummererer med den ekstra indeksen i:

$$\widehat{F}\psi_{ni} = f_n \psi_{ni} \; ; \quad i = 1, \cdots, g_n.$$

I dette tilfellet skal vi nå se at punkt (ii) i målepostulatet (om at målingen etterlater systemet i en egentilstand som svarer til den målte egenverdien) må formuleres mer presist.

La oss anta at egenverdisettet f_n er diskret, og at egenfunksjons-settet

$$\{\psi_{ni} |\, n = 1, 2, \cdots ; \, i = 1, \cdots, g_n\}$$

er ortonormert. Siden disse egenfunksjonene danner et fullstendig sett (basis), kan systemtilstanden (før målingen) utvikles i dette settet:

$$\Psi = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_{ni} \psi_{ni}. \tag{T7.5}$$

Ved å projisere Ψ på ψ_{ni},

$$\langle\,\psi_{ni},\Psi\,\rangle=\left\langle\,\psi_{ni}\,,\,\sum_k\sum_j c_{kj}\psi_{kj}\right\rangle=\sum_k\sum_j c_{kj}\delta_{nk}\delta_{ij}=c_{ni},$$

finner vi på vanlig måte at utviklingskoeffisienten er

$$c_{ni}=\langle\,\psi_{ni},\Psi\,\rangle\equiv\int\psi_{ni}^*\Psi d\tau.$$

Som i avsnitt 2.5.d i Tillegg 2 tenker vi oss nå at vi gjør en serie målinger av observabelen F på et ensemble som er preparert i tilstanden Ψ. Ifølge målepostulatet er den teoretiske forventningsverdien av F

$$\langle\,F\,\rangle=\sum_n P_n\,f_n,$$

der P_n er sannsynligheten for å måle egenverdien f_n. Samtidig har vi ifølge forventningsverdi-postulatet at

$$\begin{aligned}\langle\,F\,\rangle_\Psi &= \int\Psi^*\,\widehat{F}\,\Psi d\tau=\int(\widehat{F}\Psi)^*\Psi d\tau\\ &= \int\left(\sum_n\sum_i c_{ni}\,\widehat{F}\psi_{ni}\right)^*\Psi\,d\tau\\ &= \sum_n\sum_i c_{ni}^*f_n\underbrace{\int\psi_{ni}^*\Psi d\tau}_{c_{ni}}=\sum_n\left(\sum_{i=1}^{g_n}|c_{ni}|^2\right)f_n.\end{aligned}$$

Siden de to formlene for forventningsverdien gjelder for en vilkårlig Ψ, kan vi konkludere med at sannsynligheten for å måle egenverdien f_n når systemet er i tilstanden (T7.5) er

$$P_n=\sum_{i=1}^{g_n}|c_{ni}|^2. \tag{T7.6}$$

Merk at det tilsvarende resultatet i det ikke-degenererte tilfellet er gitt ved (T2.80).

Før vi nå reformulerer pkt (ii) i målepostulatet (T7.4) skal vi merke oss at Ψ (ligning (T7.5)) kan skrives som

$$\Psi=\sum_n\Psi_n,\qquad\text{med}\quad\Psi_n\equiv\sum_{i=1}^{g_n}c_{ni}\psi_{ni}.$$

Her merker vi oss videre at Ψ_n — i likhet med de g_n bidragene ψ_{ni} — har egenverdien f_n. Vi kan derfor kalle Ψ_n for den delen av Ψ som er "forenlig med egenverdien f_n". Det viser seg at pkt (ii) i målepostulatet må formuleres slik:

(ii) Umiddelbart etter målingen av egenverdien f_n havner systemet i (den normerte) tilstanden

$$\frac{\Psi_n}{||\Psi_n||}=\frac{\sum_{i=1}^{g_n}c_{ni}\psi_{ni}}{||\ --\ "\ --||}. \tag{T7.7}$$

(I dette uttrykket er nevneren normen av telleren.) Moralen er at den delen av den opprinnelige bølgefunksjonen Ψ som *ikke* er forenlig med den målte egenverdien f_n "skrelles bort" ved målingen. Dette kalles ofte for "kollaps av bølgefunksjonen". (Eng.: wavefunction collapse.) Merk ellers at resultatet ovenfor for sannsynligheten P_n er norm-kvadratet av Ψ_n,

$$P_n = \sum_i |c_{ni}|^2 = ||\Psi_n||^2$$

(slik at $\sum_n P_n = \sum_n ||\Psi_n||^2$=1).

Eksempel La oss som et eksempel se på en tredimensjonal isotrop harmonisk oscillator, med det ortonermerte egenfunksjonssettet

$$\psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z) \equiv \psi_{n_x n_y n_z}$$

og energiegenverdiene

$$\hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2) \equiv \hbar\omega(N + 3/2).$$

Anta at oscillatoren ved $t = 0$ er preparert i tilstanden

$$\Psi = \underbrace{\sqrt{0.5}\,\psi_{000}}_{\Psi_0} + \underbrace{\sqrt{0.1}(\psi_{100} + \psi_{010} + \psi_{001})}_{\Psi_1} + \underbrace{\sqrt{0.1}(\psi_{200} + i\psi_{020})}_{\Psi_2}.$$

Her ser vi at normkvadratene av de tre bidragene til Ψ er

$$||\Psi_0||^2 = 0.5\,, \quad ||\Psi_1||^2 = 3\cdot 0.1\,, \quad ||\Psi_2||^2 = 2\cdot 0.1,$$

slik at $||\Psi||^2 = 1$. Så Ψ er normert. Videre har Ψ_0, Ψ_1 og Ψ_2 hhvis $N = 0$, 1 og 2. Så de mulige måleverdiene for energien er $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $(N = 0)$, $E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega$ $(N = 1)$ og $E_2 = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $(N = 2)$. De respektive sannsynlighetene er

$$P_0 = ||\Psi_0||^2 = 0.5\,, \qquad P_1 = 0.3 \quad \text{og} \quad P_2 = 0.2.$$

De normerte tilstandene umiddelbart etter målingen er hhvis

$$\frac{\Psi_0}{||\Psi_0||} = \psi_{000}\,, \qquad \frac{\Psi_1}{||\Psi_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_{100} + \psi_{010} + \psi_{001}) \quad \text{og} \quad \frac{\Psi_2}{||\Psi_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{200} + i\psi_{020}).$$

I neste avsnitt skal vi repetere hvordan utviklingskoeffisientene tolkes i det kontinuerlige tilfellet, ved å ta som eksempel utviklingen av systembølgefunksjonen Ψ i impulsegenfunksjoner.

7.3 Fysisk tolkning i det kontinuerlige tilfellet

Den fysiske tolkningen av utviklingskoeffisientene i det kontinuerlige tilfellet er veldig klart og konsist beskrevet side 33–34 i Hemmer. (Se også Tillegg 2, Griffiths side 106–107 og B&J side 208.)

Med det kontinuerlige spektret av impulsegenfunksjoner

$$\psi_p(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{ipx/\hbar}, \qquad \widehat{p}_x\psi_p(x) = p\psi_p(x), \qquad p \in (-\infty, \infty) \qquad \text{(T7.8)}$$

blir utviklingen av en vilkårlig kvadratisk integrerbar funksjon her et Fourier-integral. For den tidsavhengige systemtilstanden $\Psi(x,t)$ for et endimensjonalt kvantemekanisk system har vi f.eks

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p,t)\,\psi_p(x)\,dp. \tag{T7.9}$$

Siden denne funksjonen avhenger av tiden vil også Fourier-transformen $\Phi(p,t)$ gjøre det:

$$\Phi(p,t) = \langle\, \psi_p, \Psi(t)\,\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x)\,\Psi(x,t)\,dx. \tag{T7.10}$$

I analogi med forrige avsnitt tenker vi oss nå at vi ved tiden t gjør en serie med målinger av impulsen p_x på et ensemble som er preparert i tilstanden $\Psi(x,t)$. Siden de mulige måleresultatene er kontinuerlig fordelt over hele spektret, kan forventningsverdien skrives på formen

$$\langle\, p_x\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)\,p\,dp,$$

der $P(p,t)dp$ er sannsynligheten for å finne p_x i intevallet $[p, p+dp]$ og $P(p,t)$ er sannsynlighetstettheten i "p-rommet", ved tiden t. Samtidig har vi fra forventningsverdipostulatet at

$$\begin{aligned}\langle\, p_x\,\rangle_\Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Psi^*(x,t)\,\widehat{p}_x\,\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(\widehat{p}_x\Psi(x,t))^*\,\Psi(x,t)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\widehat{p}_x\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\Phi(p,t)\,\psi_p(x)\right)^*\Psi(x,t).\end{aligned}$$

Her erstatter vi $\widehat{p}_x\psi_p(x)$ med $p\psi_p(x)$ og bytter rekkefølge på integrasjonene:

$$\begin{aligned}\langle\, p_x\,\rangle_\Psi &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\Phi^*(p,t)\,p\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi_p^*(x)\,\Psi(x,t)\right)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(p,t)\,p\,\Phi(p,t)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} p\,|\Phi(p,t)|^2 dp.\end{aligned}$$

Ved å sammenligne de to formlene for $\langle\, p_x\,\rangle$ ser vi at den fysiske tolkningen av "utviklingskoeffisienten", Fourier-transformen $\Phi(p,t)$, kan formuleres slik:

> Når systemet før målingen er i tilstanden $\Psi(x,t)$, så er sannsynligheten for å måle p_x i intervallet $(p, p+dp)$
>
> $$P(p,t)dp = |\Phi(p,t)|^2 dp = |\langle\, \psi_p, \Psi\,\rangle|^2\,dp \equiv \left|\int \psi_p^*(x)\Psi(x,t)\,d\tau\right|^2 dp. \tag{T7.11}$$

Sannsynlighetstettheten i "p-rommet" er altså kvadratet av Fourier-transformen $\Phi(p,t)$. Dette er analogt med at sannsynlighetstettheten i x-rommet er $|\Psi(x,t)|^2$.

7.4 Impulsrepresentasjonen av kvantemekanikk***[1]

Denne "likheten" mellom sannsynlighetstetthetene i posisjons-og impuls-rommene er ingen tilfeldighet. Som forklart i avsnitt 4.6 i Hemmer, er det lett å formulere en versjon av

[1]Avsnitt merket med *** er ikke pensum i begynnerkurset.

teorien hvor Fourier-transformen $\Phi(p,t)$ av $\Psi(x,t)$ spiller rollen som "bølgefunksjon i impulsrommet". Denne rollen er analog med den som spilles av den ordinære bølgefunksjonen $\Psi(x,t)$ i **posisjonsrom-formuleringen av kvantemekanikk**, som vi nå etter hvert er i ferd med å bli vant med, og som er den som brukes mest på dette nivået.

I den nye formuleringen, **impulsrom-formuleringen av kvantemekanikk**, kjenner vi alt oppskriften for å beregne forventningsverdier av observable som bare avhenger av p_x, som f.eks $K = p_x^2/2m$. Siden sannsynlighetstettheten i impulsrommet er $|\Phi(p,t)|^2$, har vi at

$$\langle\, F(p_x)\,\rangle_\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(p,t)|^2 F(p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(p,t)\, F(p)\, \Phi(p,t)\, dp, \tag{T7.12}$$

som er analog med

$$\langle\, V(x)\,\rangle_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\, V(x)\, \Psi(x,t)\, dx$$

i posisjonsrom-formuleringen. Moralen er at observabelen p_x i impulsrom-formuleringen representeres av en operator som ganske enkelt er multiplikasjon med *tallet* p,

$$\widehat{p}_x = p. \tag{T7.13}$$

Dette er analogt med at $\widehat{x} = x$ i posisjonsrom-formuleringen.

Hva så med operatorene som skal representere x og funksjoner av x (som f.eks $V(x)$) i den nye formuleringen? For å finne svaret på dette kan vi anta at $V(x)$ kan Taylor-utvikles,

$$V(x) = \sum_n v_n x^n,$$

hvor koeffisientene er v_n. Forventningsverdiene av x og potenser av x kan vi finne med utgangspunkt i den gamle formuleringen, hvor forventningsverdien av x^n er

$$\begin{aligned}\langle\, x^n\,\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\, x^n\, \Psi(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^n\Psi)^*\Psi\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(x^n \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \Phi(p,t)\, \psi_p(x)\right)^* \Psi(x,t).\end{aligned}$$

Her benytter vi oss av identiteten

$$x\, e^{ipx/\hbar} = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right) e^{ipx/\hbar}, \tag{T7.14}$$

som betyr at

$$x^n\, \psi_p(x) = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \psi_p(x). \tag{T7.15}$$

Innsetting og ordning gir da

$$\begin{aligned}\langle\, x^n\,\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \Phi(p,t) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \psi_p(x)\right)^* \Psi(x,t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \Phi^*(p,t) \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_p^*(x)\Psi(x,t)}_{\Phi(p,t)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \Phi^*(p,t) \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \Phi(p,t).\end{aligned} \tag{T7.16}$$

Ved å sammenligne med den generelle "sandwich-oppskriften" for forventningsverdier,

$$\langle\, F\,\rangle_\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\Phi^*(p,t)\,\widehat{F}\,\Phi(p,t), \tag{T7.17}$$

kan vi konkludere med at observabelen x^n i impulsrom-formuleringen representeres av $n^{\rm te}$ potens av operatoren

$$\widehat{x} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}. \tag{T7.18}$$

For en funksjon av x som f.eks $V(x) = \sum v_n x^n$ finner vi at

$$\langle\, V(x)\,\rangle_\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\Phi^*(p,t)\,\left[\sum_n v_n \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n\right]\,\Phi(p,t). \tag{T7.19}$$

Den potensielle energien representeres altså av operatoren

$$\sum_n v_n \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \equiv \widehat{V}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right).$$

Dette kalles en **operatorfunksjon**, og Taylor-utviklingen på venstresiden viser hva vi mener med dette begrepet. Som et eksempel svarer det harmoniske oscillator-potensialet $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ til operatoren $\widehat{V} = \frac{1}{2}m\omega^2(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p})^2$.

Vi har nå lært oss å beregne forventningsverdier av observable som avhenger av x og p_x i den nye formuleringen, vha "bølgefunksjonen" $\Phi(p,t)$. Men kan vi være sikre på at denne funksjonen inneholder all mulig informasjon om systemet, slik $\Psi(x,t)$ gjør ifølge tilstandspostulatet side 1? Svaret er ja: Kjenner vi $\Phi(p,t)$, så kjenner vi også $\Psi(x,t)$, via Fourier-integralet

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p,t)\,\psi_p(x)\,dp,$$

og vice versa, via Fourier-transformen

$$\Phi(p,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x)\,\Psi(x,t)\,dx.$$

Så de to funksjonene inneholder den samme informasjonen.

Men står ikke $\Psi(x,t)$ i en særstilling, siden den oppfyller en bølgeligning, Schrödingerligningen? Svaret er nei: Det eksisterer en bølgeligning også for $\Phi(p,t)$. Denne kan vi finne ved å starte med den deriverte $i\hbar(\partial/\partial t)\Phi(p,t)$ og håpe på det beste: Ved å sette inn formelen ovenfor finner vi

$$\begin{aligned}
\underline{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(p,t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x)\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)\,dx \qquad \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left[\widehat{p}_x^2/2m + V(x)\right]\Psi\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x)\underbrace{\left[\widehat{p}_x^2/2m + V(x)\right]}_{\text{hermitesk}}\Psi(x,t)\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[\widehat{p}_x^2/2m + \sum_n v_n x^n\right]\psi_p(x)\right)^*\Psi(x,t)\,dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[p^2/2m + \sum_n v_n\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n\right]\psi_p(x)\right)^*\Psi(x,t)\,dx.
\end{aligned}$$

Her har vi brukt at

$$\widehat{p}_x\psi_p(x) = p\psi_p(x) \qquad \text{og} \qquad x\,\psi_p(x) = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)\,\psi_p(x).$$

I det siste uttrykket kan vi flytte operatoren [ ]* til venstre for integraltegnet, fordi den ikke avhenger av x, og får:

$$\begin{aligned}
\cdots &= \left[p^2/2m + \sum_n v_n\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)^n\right]\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\psi_p^*(x)\Psi(x,t)\,dx}_{\Phi(p,t)} \\
&= \underline{\left[p^2/2m + \widehat{V}\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\Phi(p,t)} \equiv \underline{\widehat{H}\Phi(p,t)}. \qquad \text{(T7.20)}
\end{aligned}$$

Dette må vi jo si er en suksess: Φ oppfyller en bølgeligning, og formen er jo slik at vi kan kalle også denne en Schrödingerligning!

Vi har altså to ekvivalente utgaver av kvantemekanikken, posisjonsrom-formuleringen (posisjonsrepresentasjonen) og impulsrom-formuleringen (impulsrepresentasjonen). Denne situasjonen oppsummeres av tabellen side 81 i Hemmer, hvor formalismen er generalisert til 3 dimensjoner. Med betegnelsene x, y, z (eller x_i, $i = 1,..,3$) for de kartesiske koordinatene ser tabellen ut som nedenfor, hvor vi ser at begge bølgefunksjonene oppfyller Schrödingerligningen, med en Hamilton-operator gitt ved den generelle formelen

$$\widehat{H}(\widehat{x}_i, \widehat{p}_i) = \frac{\widehat{p}_x^2 + \widehat{p}_y^2 + \widehat{p}_z^2}{2m} + \widehat{V}(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}).$$

	Posisjonsrepresentasjonen	Impulsrepresentasjonen
Bølgefunksjon	$\Psi(x, y, z, t)$	$\Phi(p_x, p_y, p_z, t)$
Operator $\widehat{x}_i$	x_i	$-\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial p_i}$
Operator $\widehat{p}_i$	$\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$	p_i
Bølgeligning	$i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{H}(\widehat{x}_i, \widehat{p}_i)\Psi$	$i\hbar\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = \widehat{H}(\widehat{x}_i, \widehat{p}_i)\Phi$

I Tillegg 10 skal vi se at både impulsrepresentasjonen av kvantemekanikk og den opprinnelige posisjonsrepresentasjonen er spesialtilfeller av en mer generell formulering.

Eksempel: Fri partikkel

For en fri partikkel i én dimensjon ($V = 0$) ser Schrödingerligningen i impulsrepresentasjonen slik ut:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(p,t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m}\,\Phi(p,t) \qquad (p = p_x)\,.$$

Her betyr $\partial/\partial t$ derivasjon med fastholdt p. Da er det lett å se (f.eks ved innsetting) at den tidsavhengige bølgefunksjonen i impulsrommet blir

$$\Phi(p,t) = \Phi(p,0)\, e^{-i(p^2/2m)t/\hbar}. \qquad \text{(T7.21)}$$

Her er $\phi(p,0)$ impulsbølgefunksjonen ved $t = 0$, som vi i prinsippet kan preparere på en vilkårlig måte, men slik at den er normert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(p,0)|^2 dp = 1.$$

Fra løsningen (T7.21) ser vi at sannsynlighetstettheten i impulsrommet blir *tidsuavhengig* for den frie partikkelen,

$$|\Phi(p,t)|^2 = |\phi(p,0)|^2,$$

og dette bør vel ikke overraske. Det samme vil da gjelde for alle forventningsverdier av rent p-avhengige observable, som f.eks

$$\langle\, p\,\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(p,t)\, p\, \Phi(p,t)\, dp = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(p,0)\, p\, \Phi(p,0)\, dp = \langle\, p\,\rangle_{t=0}\,,$$

$\langle\, p^2\,\rangle$, Δp, osv. Vi kan også finne ut hvordan forventningsverdien av posisjonen oppfører seg: Fra (T7.21) finner vi

$$\begin{aligned}
\langle\, x\,\rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(p,t) \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right) \Phi(p,t)\, dp \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(p,0) e^{i(p^2/2m)t/\hbar} \left[-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\,\Phi(p,0) - \Phi(p,0)\,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{ip^2 t}{2m\hbar}\right)\right] e^{-i(p^2/2m)t/\hbar}\, dp \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(p,0) \left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\right) \Phi(p,0)\, dp + \frac{t}{m}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(p,0)\, p\, \Phi(p,0)\, dp \\
&= \langle\, x\,\rangle_{t=0} + \frac{\langle\, p\,\rangle}{m}\, t.
\end{aligned}$$

Forventningsverdien $\langle\, x\,\rangle_t$ beveger seg altså *jevnt*, fra $\langle\, x\,\rangle_{t=0}$ ved $t = 0$, og med hastigheten $\langle\, p\,\rangle/m$. Dette harmonerer med Newtons første lov.