**Lørdagsverksted i fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.**
Veiledning: 8. september kl 12:15 – 15:00.

# Løsningsforslag til øving 1: Bevegelse. Vektorer. Enheter.

## Oppgave 1

$a$) Strekningen er $s = 800$ m og tiden brukt er $t = 160$ s, slik at gjennomsnittsfarten blir

$$v = \frac{s}{t} = \frac{800\,\mathrm{m}}{160\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m/s}$$

Siden 1 m = $10^9$ nm (nanometer) og 1 s = $10^6$ $\mu$s (mikrosekund), har vi alternativt

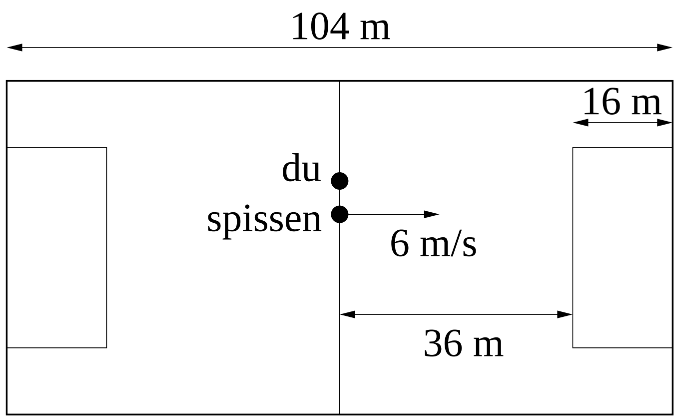
$$v = 5 \cdot \frac{10^9\,\mathrm{nm}}{10^6\,\mu\mathrm{s}} = 5000\,\mathrm{nm}/\mu\mathrm{s}$$

Videre er 1 m = $10^{-3}$ km og 1 s = $(3600)^{-1}$ h (h = hour = time), som betyr at

$$v = 5 \cdot \frac{10^{-3}\,\mathrm{km}}{(3600)^{-1}\,\mathrm{h}} = 18\,\mathrm{km/h}$$

$b$) Kulas hastighetsvektor må peke i samme retning som forflytningen, nedover fra 1 til 2. Følgelig er alternativ C riktig.

$c$) Dette er situasjonen:




Spissen bruker $t_s = s/v_s = (36\text{ m})/(6\text{ m/s}) = 6$ s på å nå fram til 16-meteren. Du kan altså ikke bruke mer tid enn dette på samme distanse. Sammenhengen mellom din akselerasjon $a$ (som her skal være konstant) og din hastighet $v$ er

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Vi ganger med $dt$ og integrerer på begge sider for å finne hastigheten $v(t)$ ved tidspunktet $t$:

$$\int_0^v dv = \int_0^t a\,dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = at$$

Sammenhengen mellom din posisjon $x$ (der $x = 0$ på midtbanen og $x = s = 36$ m på 16-meteren) og din hastighet $v$ er

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Vi setter inn $v = at$ på venstre side, ganger med $dt$ på begge sider, og integrerer på begge sider:

$$\int_0^s dx = \int_0^{t_s} at \cdot dt \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2}at_s^2$$

Her er $s = 36$ m og $t_s = 6$ s, så vi finner

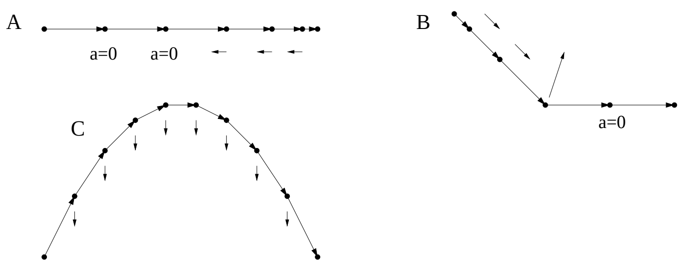
$$a = \frac{2s}{t_s^2} = \frac{72}{36}\,\mathrm{m/s}^2 = 2\,\mathrm{m/s}^2$$

Kommentar: Du får nok ikke plass på landslaget. Toppfarten ser det ikke ut til å være noe i veien med, men *rykket* er for dårlig.

*d*) Ser vi på et vilkårlig punkt $n$ i et slik bevegelsesdiagram, vil pilen fra punkt $n$ til punkt $n+1$ representere midlere (dvs gjennomsnittlige) hastighet $\boldsymbol{v}_n$ på denne strekningen, ettersom tidsintervallet $\Delta t$ mellom to påfølgende punkter er konstant. La oss for enkelhets skyld sette $\Delta t = 1$. Da vil midlere akselerasjon $\boldsymbol{a}_n$ på bevegelsen fra $n-1$ til $n+1$ kunne skrives

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}_{n-1}$$

og vi kan tegne inn akselerasjonspiler i de tre diagrammene:

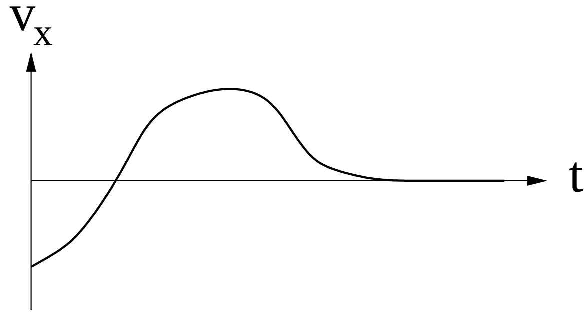



Eksempler på situasjoner som kan ha slike bevegelsesdiagram:
A: Bil som bremser med konstant akselerasjon.
B: Kloss som sklir ned bakke uten friksjon.
C: Ball som kastes på skrå oppover i tyngdefeltet.

*e*) Diagrammet viser at bevegelsen starter i en posisjon $x > 0$, og at den foregår med konstant negativ hastighet langs $x$-aksen. Graf C passer med dette.

*f*) Vi har at $v_x(t) = dx/dt$ dvs stigningskoeffisienten til kurven $x(t)$. Denne er konstant og positiv i starten, deretter null en stund, deretter konstant og negativ, og endelig konstant og positiv. Graf D stemmer med dette.

$g$) Kurven for $v_x(t)$ skal tilsvare stigningskoeffisienten til kurven $x(t)$. Noe i denne duren:



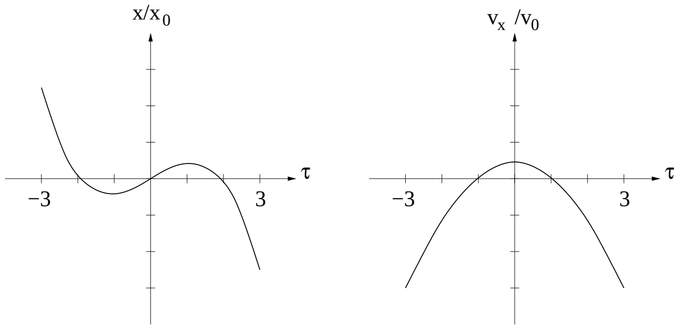

$h$) Partikkelens hastighet er

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{4x_0}{t_0} - \frac{3x_0 t^2}{t_0^3} = v_0 \left(1 - \frac{3}{4}\tau^2\right)$$

der vi har forenklet skrivingen ved å innføre $v_0 \equiv 4x_0/t_0$ og $\tau \equiv t/t_0$. Bruker vi $\tau$, kan vi også skrive

$$x(t) = x_0 \left(4\tau - \tau^3\right)$$

Skisser, med $\tau$ mellom -3 og 3:




$i$) Fra oppgitt kurve ser vi at

$$v_x(t) = 10 - 5t$$

med $v_x$ i enheten m/s og $t$ i enheten s. Da er det umiddelbart klart at bilen snur når $t = 2$ s, for da er $v_x = 0$. Vi ønsker å finne et uttrykk for bilens posisjon $x$ som funksjon av $t$ og starter med $v_x = dx/dt$. Vi ganger denne med $dt$ og integrerer:

$$\int_{x_i}^{x} dx = \int_0^t v_x(t)dt = \int_0^t (10 - 5t)dt = 10t - \frac{5}{2}t^2$$

Her er startposisjonen $x_i = 30$ (m), så vi finner

$$x(t) = 30 + 10t - \frac{5}{2}t^2$$

Innsetting av $t = 2$ (s) gir posisjonen der bilen snur:

$$x(2) = 30 + 20 - 10 = 40\,\mathrm{m}$$

Innsetting av $x = 0$ gir tidspunktet $t_0$ for bilens ankomst til posisjonen $x = 0$:

$$0 = 30 + 10t_0 - \frac{5}{2}t_0^2$$

Dette er en 2.gradsligning for den ukjente $t_0$. Vi løser denne, og velger selvsagt den *positive* løsningen:

$$t_0 = \frac{10 + \sqrt{100 + 300}}{5}\,\mathrm{s} = 6\,\mathrm{s}$$

*j*) Vi har at $a_x(t) = dv_x/dt$ dvs stigningskoeffisienten til kurven $v_x(t)$. Graf B for $v_x$ stemmer med den gitte akselerasjonen $a_x$.

*k*) For begge kulene er bevegelsen vertikalt en bevegelse med konstant akselerasjon $a = g$, med samme starthøyde og starthastighet lik null. Kulene treffer derfor bakken samtidig. (Med runde kuler skulle det ikke bli mye forskjell på falltiden selv om vi tok hensyn til luftmotstand.)

*l*) Skiløperen får en konstant akselerasjon nedover langs bakken, gitt ved $a = g\sin\theta$ (se figuren nedenfor). Setter vi $t = 0$ i det hun starter på toppen, med $v = 0$, kan vi skrive hastigheten som $v(t) = at = gt\sin\theta$. Setter vi dessuten posisjonen $s = 0$ på toppen, får vi

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$$

Vi kan eliminere $t$ fra disse uttrykkene ved å kvadrere $v$ og deretter beregne forholdet mellom $v^2$ og $s$:

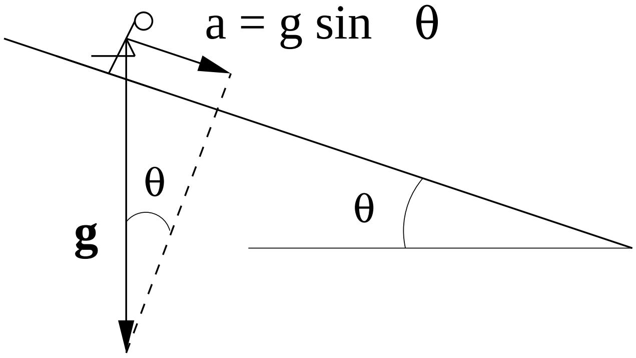
$$\frac{v^2}{s} = \frac{g^2t^2\sin^2\theta}{(1/2)gt^2\sin\theta} = 2g\sin\theta$$

Vi løser denne med hensyn på vinkelen $\theta$ og finner

$$\theta = \arcsin\frac{v^2}{2gs}$$

Nå kan vi sette inn tallverdier for $g$, samt $v$ og $s$ nederst i bakken. Vi finner

$$\theta = \arcsin\frac{400}{2\cdot 9.8\cdot 100} = \arcsin\frac{2}{9.8} \simeq 12°$$



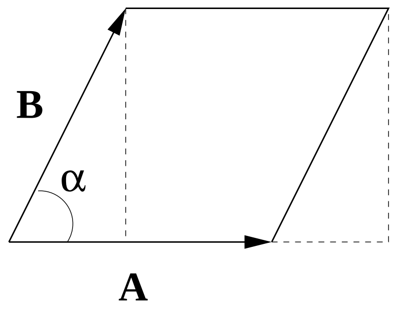
*m*) Uansett om klossen er på vei oppover eller nedover skråplanet, vil den ha konstant akselerasjon, rettet nedover, og lik komponenten av tyngdens akselerasjon $g$ langs planet, jfr forrige oppgave. Figuren viser at positiv $s$-retning er oppover planet, så $a_s$ må ha en konstant negativ verdi. Altså graf D.

## Oppgave 2

*a*) Størrelsen til kryssproduktet er per definisjon

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \cdot \sin\alpha$$

der $\alpha$ er vinkelen mellom de to vektorene. Vi ser fra figuren nedenfor at $|\boldsymbol{B}| \cdot \sin\alpha$ er lik parallellogrammets høyde, og arealet er jo nettopp lik "bredden", som her er lik $|\boldsymbol{A}|$ ganget med høyden.




*b*) Vi er her bedt om å vise at

$$C = |\boldsymbol{C}| = \sqrt{A^2 + B^2 \pm 2\,A\,B\,\cos\theta}$$

eller, om vi kvadrerer begge sider,

$$C^2 = A^2 + B^2 \pm 2\,A\,B\,\cos\theta$$

Vi har $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$. Kvadrering av begge sider gir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{C} &= (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) \\ &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \\ &= A^2 + B^2 \pm 2AB\cos\theta\end{aligned}$$

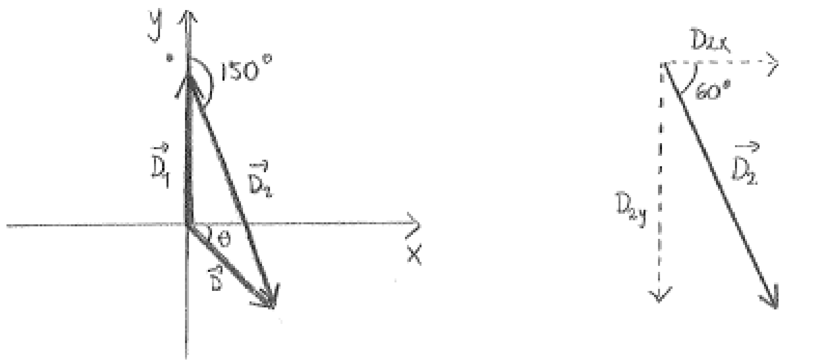
ettersom vi, per definisjon, har

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = AB\cos\theta$$

## Oppgave 3

$$
\begin{aligned}
\hat{x}\cdot\hat{x} &= 1\\
\hat{x}\cdot\hat{z} &= 0\\
\hat{y}\times\hat{z} &= \hat{x}\\
\hat{y}\times\hat{y} &= 0\\
(\hat{x}\times\hat{y})\times\hat{z} &= \hat{z}\times\hat{z} = 0\\
(\hat{x}\times\hat{y})\times\hat{x} &= \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}\\
\hat{x}\cdot(\hat{z}\times\hat{y}) &= \hat{x}\cdot(-\hat{x}) = -1\\
(\hat{z}\times\hat{y})\times(\hat{x}\times\hat{z}) &= (-\hat{x})\times(-\hat{y}) = \hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}
\end{aligned}
$$

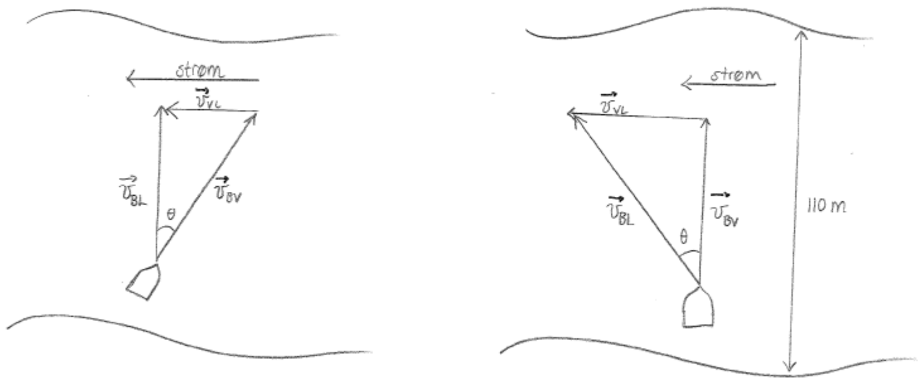
## Oppgave 4




Vi ønsker å finne postbudets avstand fra postkontoret, altså $D$. Vi ser på avstandene postbudet har reist som vektorer og legger disse inn i et koordinatsystem der positiv $x$-akse er øst og positiv $y$-akse er nord. Avstanden til postkontoret vil være summen av de to vektorene $\boldsymbol{D}_1$ og $\boldsymbol{D}_2$. Vi dekomponerer derfor disse i $x$- og $y$-retning og summerer komponentvis.
Siden $\boldsymbol{D}_1$ peker nordover, har denne ingen $x$-komponent:
$D_{1x} = 0$ $D_{1y} = 22.0$ km
$\boldsymbol{D}_2$ danner en vinkel 60 grader i forhold til $x$-retning:
$D_{2x} = (47.0\,\text{km})(\cos 60) = 23.5$ km
$D_{2y} = -(47.0\,\text{km})(\sin 60) = -40.7$ km
Resultantvektoren $\boldsymbol{D}$ har komponentene:
$D_x = D_{1x} + D_{2x} = 0\,\text{km} + 23.5\,\text{km} = 23.5\,\text{km}$
$D_y = D_{1y} + D_{2y} = 22.0\,\text{km} + (-40.7)\,\text{km} = -18.7\,\text{km}$
Lengden på $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(23.5\,\text{km})^2 + (-18.7\,\text{km})^2} = 30.0\,\text{km}$

Vinkel med $x$-retning blir $\theta = \arctan(D_y/D_x) = \arctan(-0.796) = -38.5$ grader.
Kommentar: Her kunne vi ha benyttet oss av et av resultatene i oppgave 2b. Sjekk dette selv, hvis du ikke allerede har gjort det.

**Oppgave 5**




*a*) $\boldsymbol{v}_{BL}$ (båt i forhold til land) er slik vi ønsker at båten skal bevege seg. For å oppnå dette må vi kjøre i en vinkel $\theta$ mot strømmen. Vi ser av figuren at

$$\sin(\theta) = \frac{v_{VL}}{v_{BV}} = \frac{1.20\,\mathrm{m/s}}{1.85\,\mathrm{m/s}} = 0.6486$$

Altså blir $\theta = \arcsin(0.6486) = 40.4$ grader.

*b*) Strømmen drar båten nedover elva. Båtens hastighet i forhold til land, $\boldsymbol{v}_{BL}$, er summen av båtens hastighet i forhold til vannet, $\boldsymbol{v}_{BV}$, og hastigheten av vannet i forhold til land, $\boldsymbol{v}_{VL}$ (se figur):

$$\boldsymbol{v}_{BL} = \boldsymbol{v}_{BV} + \boldsymbol{v}_{VL}$$

Siden $\boldsymbol{v}_{BV} \perp \boldsymbol{v}_{VL}$ finner vi $\boldsymbol{v}_{BL}$ vha. pythagoras:

$$v_{BL} = \sqrt{v_{BV}^2 + v_{VL}^2} = \sqrt{(1.85\,\mathrm{m/s})^2 + (1.20\,\mathrm{m/s})^2} = 2.21\,\mathrm{m/s}$$

Vi finner vinkelen vha. trigonometri: $\tan(\theta) = v_{VL}/v_{BV} = 0.6486$. Dette gir $\theta = 33$ grader (Merk at denne er ulik den vi fant i (a).

*c*) Gitt at bredden på elva er $D = 110$ m får vi

$$t = \frac{D}{v_{BV}} = \frac{110\,\mathrm{m}}{1.85\,\mathrm{m/s}} = 60\,\mathrm{s}$$

På denne tiden har båten drevet $d = v_{VL}\mathrm{t}$ = (1.20 m/s)(60 s) = 72 m nedover elva.

**Oppgave 6**

$a$) La oss f.eks. si at sykkelhjulet har en diameter $d = 72$ cm. Da blir omkretsen

$$O = 2\pi r = \pi d = 226\,\mathrm{cm}$$

Hvis du sykler med en hastighet $v_s = 36$ km/h $= 1000$ cm/s, betyr det at antall omdreininger hjulet foretar per sekund blir

$$N = \frac{1000\,\mathrm{cm/s}}{226\,\mathrm{cm}} = 4.4\,\mathrm{s}^{-1}$$

$b$) Du ser et hjul som roterer med vinkelhastighet

$$\omega = 2\pi N = 27.8\,\mathrm{rad/s}$$

Den hvite flekken i avstand $r = 36$ cm fra hjulets sentrum har da (tangentiell) hastighet

$$v_t = r\omega = 36 \cdot 27.8\,\mathrm{cm/s} = 1000\,\mathrm{cm/s}$$

Og det kunne vi vel ha sagt uten å gå veien om vinkelhastigheten $\omega$, nemlig at hjulkantens hastighet i forhold til deg må være den samme som sykkelens hastighet i forhold til bakken: $v_t = v_s$.

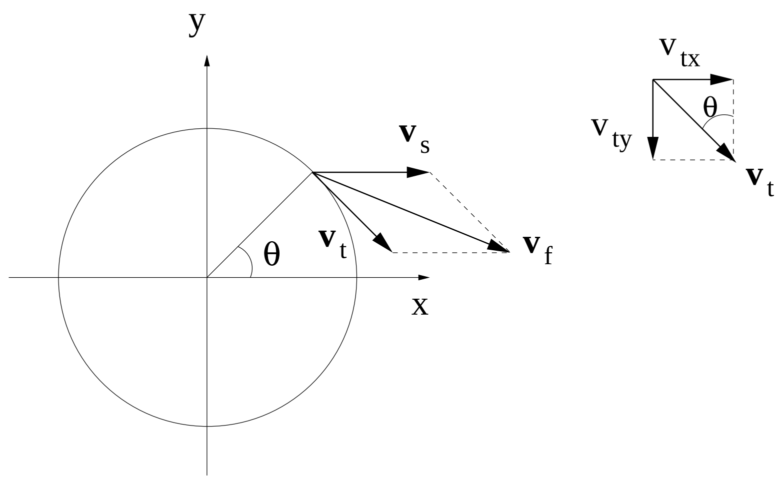
$c$) Tanken med denne oppgaven var først og fremst at man skal tegne opp hjulet med hastighetsvektorer for ulike posisjoner på periferien. Da innser en, i hvert fall hvis en har gjort $a$ og $b$ riktig, for eksempel at flekkens hastighet må være null nede ved bakken, at den er 2000 cm/s med retning framover øverst på hjulet, osv.

Hvis vi tegner opp hjulet i syklistens koordinatsystem, er det ikke så vanskelig å overbevise seg om at hastigheten til den hvite flekken når den er i en posisjon tilsvarende en vinkel $\theta$ i forhold til $x$-aksen (dvs framoverretningen) må bli

$$\boldsymbol{v}_t = \hat{x} v_s \sin\theta - \hat{y} v_s \cos\theta$$

Syklisten beveger seg med hastighet $\boldsymbol{v}_s = v_s \hat{x}$ i forhold til kråka. Kråka ser dermed en hvit flekk som beveger seg med hastighet

$$\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{v}_t = \hat{x} v_s (1 + \sin\theta) - \hat{y} v_s \cos\theta$$



## Oppgave 7

*a*) 8400 rpm innebærer 140 "rps" (revolutions per second). 1 rps tilsvarer en vinkelhastighet $2\pi$ radianer per sekund, så 8400 rpm tilsvarer en vinkelhastighet $280\pi \simeq 880$ rad/s. Dette tilsvarer en hastighet, ved $r_i = 24$ mm, $v_i = 280\pi \cdot 0.024$ m/s $\simeq 21$ m/s.
Hvis dette også skal være hastigheten til DVD-en over laseren når den er ved $r_y = 58$ mm, må den da rotere $8400 \cdot 24/58$ ganger per minutt, dvs ca 3476 rpm.
*b*) Her er vinkelhastigheten den samme hele tiden, tilsvarende 9200 rpm. Da har vi

$$\omega = \frac{9200}{60} \cdot 2\pi \simeq 963\,\mathrm{rad/s}$$

Hastighet ved $r_i$:

$$v_i = r_i\omega \simeq 23\,\mathrm{m/s}$$

Hastighet ved $r_y$:

$$v_y = r_y\omega \simeq 56\,\mathrm{m/s}$$

Akselerasjon ved $r_i$:

$$a_i = \frac{v_i^2}{r_i} = r_i\omega^2 \simeq 22\,\mathrm{km/s^2}$$

Akselerasjon ved $r_y$:

$$a_y = \frac{v_y^2}{r_y} = r_y\omega^2 \simeq 54\,\mathrm{km/s^2}$$

Altså flere tusen ganger tyngdens akselerasjon.

## Oppgave 8

*a*)

$$\begin{aligned}
1 &: \quad v_x = -v \quad , \quad v_y = 0 \\
2 &: \quad v_x = 0 \quad , \quad v_y = -v \\
3 &: \quad v_x = v \quad , \quad v_y = 0 \\
4 &: \quad v_x = 0 \quad , \quad v_y = v \\
5 &: \quad v_x = -v\sin\alpha \quad , \quad v_y = v\cos\alpha
\end{aligned}$$

*b*)

$$\begin{aligned}
1 &: \quad x = 0 \quad , \quad y = -1 \\
2 &: \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
3 &: \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
4 &: \quad x = \cos\alpha \quad , \quad y = \sin\alpha
\end{aligned}$$

**Oppgave 9**

La oss velge koordinatsystem med $x$-akse mot høyre, $y$-akse nedover og origo der ballen starter. Bevegelsen horisontalt er bevegelse med konstant hastighet $v_0$, dvs

$$x(t) = v_0 t$$

Bevegelsen vertikalt er bevegelse med konstant akselerasjon $g$ og null starthastighet, dvs

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Vi bruker disse ligningene til å bestemme tidsforbruket som gir $y = L$:

$$L = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{2L/g}$$

Dette settes inn i ligningen for $x$ med $x = 2L$:

$$2L = v_0 t \quad \Rightarrow \quad v_0 = 2L/t = \sqrt{2Lg}$$

$x$-komponenten av $\boldsymbol{v}$ er den samme hele tiden, $v_x = v_0 = \sqrt{2Lg}$. Ved bakken er $y$-komponenten av hastigheten lik

$$v_y = gt = g \cdot \sqrt{2L/g} = \sqrt{2Lg}$$

dvs den samme som $v_x$. Det betyr at ballen treffer bakken under en vinkel 45 grader. Størrelsen på hastigheten når ballen treffer bakken er

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4Lg}$$

Har uttrykkene riktig enhet? Enheten til $L/g$ er $\mathrm{m}/(\mathrm{m/s^2}) = \mathrm{s}^2$, som stemmer bra i forhold til $t = \sqrt{2L/g}$. Enheten til $Lg$ er $\mathrm{m{\cdot}m/s^2} = (\mathrm{m/s})^2$, som stemmer bra i forhold til $v_0 = \sqrt{2Lg}$. Setter vi inn $L = 1.0$ m og $g = 9.8$ m/s$^2$, finner vi at $v_0 = 4.4$ m/s, $v = 6.3$ m/s og $t = 0.45$ s.

Vi skal deretter finne den utgangsvinkelen $\alpha$ (i forhold til horisontalen) som gjør at vi treffer hullet med minst mulig starthastighet $v_0$.
Vi starter med å se på bevegelsen mens ballen er på vei oppover. La oss her velge positiv $y$ oppover. Da har vi:

$$y(t) = tv_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Dette gir vertikalhastighet

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt$$

Toppen nås når $v_y = 0$, dvs

$$t_{\text{topp}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Horisontalt har vi da kommet fram til

$$x_{\text{topp}} = v_{0x} t_{\text{topp}} = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

mens vi vertikalt er ved

$$y_{\text{topp}} = t_{\text{topp}} v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_{\text{topp}}^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Herfra og ned til bakken er det en avstand $y_{\text{topp}} + L$. Vertikalt, fra toppen og ned, har vi fritt fall, med null (vertikal) starthastighet. Tiden det tar å komme seg ned til bakken skulle dermed bli

$$t_{\text{ned}} = \sqrt{\frac{2(y_{\text{topp}} + L)}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(L + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)}$$

Total tid for hele ballens flytur blir

$$t_{\text{total}} = t_{\text{topp}} + t_{\text{ned}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2}{g}\left(L + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)}$$

I løpet av denne tiden skal ballen komme seg til $x = 2L$. Hastigheten horisontalt er hele tiden $v_0 \cos\alpha$. Dermed:

$$2L = t_{\text{total}} \cdot v_{0x} = v_0 \cos\alpha \left[\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2}{g}\left(L + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\right)}\right]$$

Denne ligningen må vi nå løse med hensyn på (for eksempel) $v_0^2$. Strategi: Flytt første ledd på høyre side over til venstre, kvadrer begge sider og ordne slik at bare $v_0^2$ står igjen på venstre side. Hvis jeg har regnet riktig, får vi da

$$v_0^2 = \frac{2gL}{\cos^2\alpha + \sin 2\alpha}$$

der vi har brukt at

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

Minimumsverdi for $v_0^2$ (og dermed for $v_0$) finner vi til slutt ved å derivere $v_0^2$ med hensyn på vinkelen $\alpha$ og sette lik null. Litt regning gir da svaret

$$\tan 2\alpha = 2$$

dvs

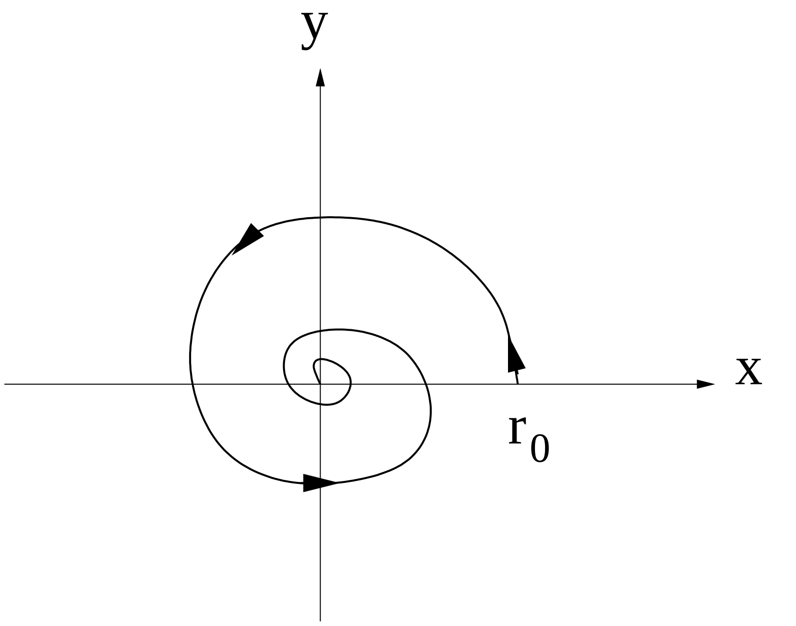
$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan 2 \simeq 32^\circ$$

**Oppgave 10**

$a$) Produktet av $a$ og $t$ står oppe i eksponenten og må være dimensjonsløst. Altså er $a$ en invers tid, med enhet $\mathrm{s}^{-1}$. Produktet $bt$ gir en vinkel, som (f.eks) måles i radianer, men som ikke egentlig har noen enhet i den forstand. Enheten til $b$ blir derfor 1/s. $r_0$ er en lengde, med enhet m.

$b$) Innsetting av $t = 0$ gir $r = r_0$ og $\theta = 0$. Polarkoordinatene $r$ og $\theta$ angir hhv avstand fra origo og vinkel på posisjonsvektoren $\boldsymbol{r}$ i forhold til $x$-aksen. Partikkelen starter altså i $(x, y) = (r_0, 0)$. Innsetting av $t = \infty$ gir $r = 0$. Partikkelen ender dermed i origo.

$c$) Partikkelbanen vil avhenge av forholdet mellom $a$ og $b$. La oss anta at $a$ er forholdsvis liten sammenlignet med $b$. Da vil partikkelen foreta flere runder rundt i planet, med stadig avtagende avstand til origo. Med andre ord, en spiralformet bane som ender opp i origo.




$d$) Vi regner rett og slett ut:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -ar_0 e^{-at}$$

og

$$v_\theta = r\,\frac{d\theta}{dt} = br$$

Hastighetsvektoren kan dermed skrives, i polarkoordinater,

$$\boldsymbol{v} = -ar_0 e^{-at}\hat{r} + br\hat{\theta}$$