Lørdagsverksted i fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.
Veiledning: 22. september kl 12:15 – 15:00.

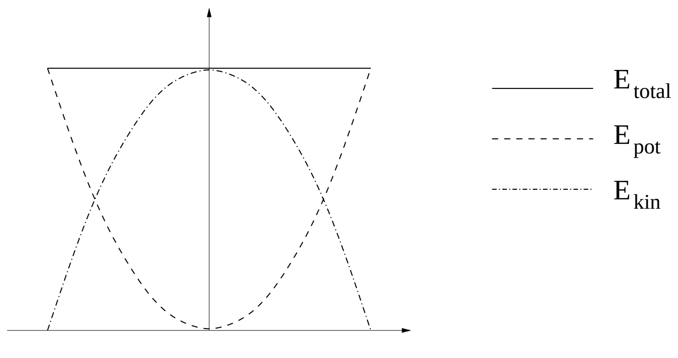
Løsningsforslag til øving 3: Impuls, bevegelsesmengde, energi. Bevaringslover.

Oppgave 1

a) Din bevegelsesmengde er endret fra $\boldsymbol{p}_0$ til $-\boldsymbol{p}_0$, dvs $\Delta\boldsymbol{p} = -2\boldsymbol{p}_0$. Det må bety at jorda har fått en impuls $-\Delta\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p}_0$ fra sykkelen. Denne endringen er nok ubetydelig i forhold til jordas bevegelsesmengde før du snudde!
Din kinetiske energi er uendret, og lik $p_0^2/2m$. Jorda har fått en liten endring i sin kinetiske energi, så det ser ut som om du må ha gjort et lite arbeid på jorda i det du snudde.

b) Bevegelsesmengden til alle disse menneskene er null, både før og etter hoppet. Dermed endres ikke jordas bevegelsesmengde heller.

c) Figuren i oppgaven viser øyeblikksbilder av en kloss som er festet i enden av ei fjær. Tidsaksen går nedover. Første bilde angir ei sammenpressa fjær med klossen i ro ($v = 0$), og siste bilde angir nøyaktig samme "tilstand". Det er da klart at systemets totale energi ikke kan ha endret seg med tiden, og dermed heller ikke som funksjon av hvor klossen er. Altså: $E_{\text{tot}}(x) = \text{konstant}$. Videre er det ikke sagt noe om hva slags fjær vi har, så vi får vel gå ut fra at det er ei såkalt *ideell* fjær som oppfyller Hookes lov, $F = -kx$. Med andre ord: Når fjæra verken er strukket ($x > 0$) eller sammenpresset ($x < 0$), virker fjæra ikke med noen kraft på det som måtte være festet i endene på den. Det tilsvarer (f.eks.) at høyre ende av fjæra er i posisjon $x = 0$. Med sammenpresset fjær, som i det første bildet der $x = -x_0$, virker fjæra på klossen med en kraft rettet mot høyre, $F = -k(-x_0) = kx_0 > 0$. Med strukket fjær, som i det midterste bildet der $x = x_0$, virker fjæra på klossen med en kraft rettet mot venstre, $F = -kx_0 < 0$. Den potensielle energien som er lagret i fjæra er $E_{\text{pot}} = kx^2/2$, i det vi (f.eks.) velger null potensiell energi når $x = 0$. Klossens masse m gir opphav til en kinetisk energi dersom klossen er i bevegelse, $E_{\text{kin}} = mv^2/2$, der v er klossens hastighet. Summen av potensiell og kinetisk energi tilsvarer den totale energien, som altså er konstant. Vi må da få følgende diagram:

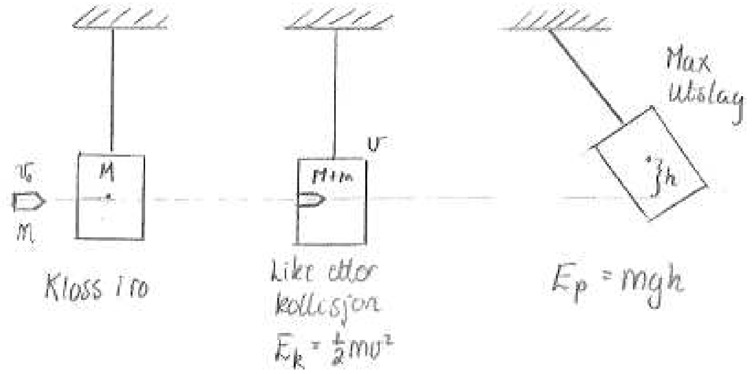


d) Energibevarelse (dvs: *etter* at prosjektilet har boret seg inn i klossen):

$$E_p = mgh = \frac{1}{2}mv^2 = E_k \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

Bevaring av bevegelsesmengde (dvs: rett før og etter kollisjonen):

$$mv_0 = (m+M)v = (m+M)\sqrt{2gh} \Rightarrow v_0 = \frac{(m+M)\sqrt{2gh}}{m} \tag{2}$$



e)

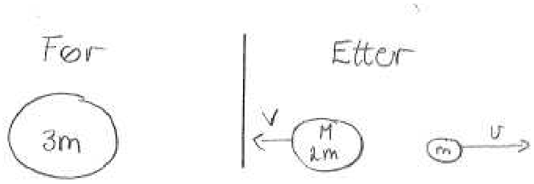
1. Galt. Vi har at den mekaniske energien er bevart. Ved å sette nullpunktet for potensiell energi ved punktet B, vil kinetisk energi ved B være lik den potensielle energien gjenstandene hadde ved A. (Siden begge startet med null kinetisk energi). $E_p = Mgh$. g og h er like for begge gjenstander, så $E_p \propto M$. Siden M er ulik for de to gjenstandene så vil E_p være ulik, og dermed også E_k ved punktet B.

2.
$$\begin{aligned} E_p &= E_k \\ Mgh &= \frac{1}{2}Mv^2 \\ v &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

   Vi ser at sluttfarten er uavhengig av massen til gjenstanden, så de har lik fart ved B. Bevegelsesmengden til gjenstand i er gitt ved $p_i = M_i v_i$. Siden $v_1 = v_2$ vil $p_1 = 2p_2$ siden $m_1 = 2m_2$. Altså var utsagnet riktig.

3. Vi fant i forrige punkt at hastigheten ved punktet B var lik for begge de to gjenstandene. Men det er ikke noe spesielt med punktet B, hastighetene vil alltid være like. Siden hastighetene alltid er like må de derfor bruke like lang tid på strekningen fra A til B, så utsagnet er derfor galt.

f)



1. <u>Galt</u> siden eksplosjonen nødvendigvis må gi fart til minst et legeme, og da oppstår det kinetisk energi (som alltid er positiv).
2. <u>Galt</u>. Bevaring av bevegelsesmengde gir at $MV + mv = 0 \Rightarrow v = -2V$ siden $M = 2m$.

$$E_{k1} = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(2m)V^2 = mV^2 \tag{3}$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}m(-2V)^2 = 2mV \tag{4}$$

   Altså er den kinetiske energien forskjellig.

3. <u>Riktig</u> siden $\sum_{\text{før}} P = 0$ pga at legemet opprinnelig var i ro og det kan antas et ytre kraftstøt lik 0.
4. <u>Galt</u> Se punkt 2.
5. Motsatt retning men like i absoluttverdi: $P_1 = -P_2$, men $|P_1| = |P_2|$.

Oppgave 2

La oss f.eks. velge positiv retning for hastigheter, impulser og bevegelsesmengder *mot* veggen. Håndballen har hastighet +70 km/t før den kolliderer med veggen og hastighet −60 km/t etter den har kollidert med veggen. Bevegelsesmengden før kollisjonen er

$$p_{\text{før}} = mv_{\text{før}} = 0.4\,\text{kg} \cdot \frac{70}{3.6}\,\text{m/s} \simeq 7.78\,\text{kgm/s}$$

og etter kollisjonen

$$p_{\text{etter}} = mv_{\text{etter}} = -0.4\,\text{kg} \cdot \frac{60}{3.6}\,\text{m/s} \simeq -6.67\,\text{kgm/s}$$

Impulsen I som veggen har overført til håndballen er dermed

$$I = p_{\text{etter}} - p_{\text{før}} \simeq -14.4\,\text{kgm/s}$$

Med andre ord, 14.4 kgm/s med retning *fra* veggen. Og det er vel rimelig: Veggen *skyver* på ballen, den trekker den ikke til seg.

Vi kan jo her bemerke at kollisjonen ikke var fullstendig elastisk, ettersom ballens kinetiske energi var større før enn etter kollisjonen (hhv 75.6 J og 55.6 J).
Til slutt skal vi bestemme den maksimale kraften som ballen opplever i løpet av støtet. Vi vet at impulsen kan relateres til kraften $F(t)$ fra veggen på ballen slik:

$$I = \int F(t)dt$$

Fra figuren i oppgaven ser vi at dette integralet blir lik halvparten av maksimalkraften F_{max} ganget med tidsintervallet $\tau = 0.1$ s. Dermed blir maksimalkraften lik

$$F_{\text{max}} = \frac{2I}{\tau} = -\frac{2 \cdot 14.4\,\text{kgm/s}}{0.1\,\text{s}} = -289\,\text{N}$$

Minustegnet betyr nok en gang ikke annet enn at kraften fra veggen på ballen har retning bort fra veggen. Dessuten ser vi at vi har fått riktig SI-enhet i og med at kgm/s^2 er det samme som N.

Oppgave 3

Oppgaver som denne kan løses på (minst) to måter, enten ved å bruke Newtons andre lov eller ved å bruke prinsippet om energibevarelse. Dersom sistnevnte metode kan brukes, er det som regel den enkleste.
Etter at skipen har sluppet taket i stenen, er det tre krefter som virker på stenen: Tyngdekraften (fra jorda, rettet vertikalt nedover), normalkraften (fra isen, rettet vertikalt oppover) og friksjonskraften (fra isen, rettet horisontalt, og med retning slik at stenens bevegelse motvirkes). Stenens forflytning $\boldsymbol{L}$ foregår utelukkende horisontalt, så verken tyngdekraften $\boldsymbol{G}$ eller normalkraften $\boldsymbol{N}$ vil gjøre noe *arbeid* på stenen:

$$\boldsymbol{G} \perp \boldsymbol{L} \quad , \quad \boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{L} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{L} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{L} = 0$$

Friksjonskraften $\boldsymbol{F}_R$ har retning mot forflytningen og er proporsjonal med normalkraften. Friksjonskoeffisienten μ_k er lik forholdet mellom disse to:

$$\mu_k = F_R/N$$

Her er stenen i bevegelse, så vi må benytte den *dynamiske* (evt *kinetiske*) friksjonskoeffisienten μ_k, som typisk er en del mindre enn den statiske friksjonskoeffisienten μ_s. Når stenen sklir en lengde L, utfører friksjonskraften et (negativt) arbeid på stenen,

$$W_R = -F_R \cdot L = -\mu_k \cdot mg \cdot L$$

der vi har brukt at normalkraften N og tyngdekraften $G = mg$ må være like store i tallverdi (men med motsatt retning). Dette arbeidet har sørget for å redusere stenens kinetiske energi, fra sin startverdi

$$E_k = \frac{1}{2}mv_0^2$$

til sluttverdien null. Setter vi nå

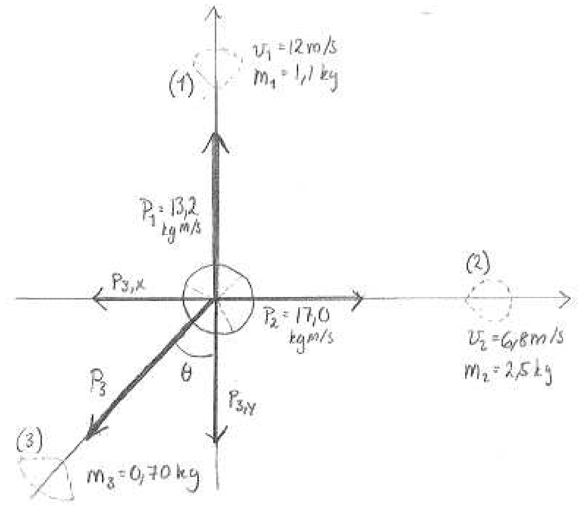
$$W_R = \Delta E_k = E_k^{\text{etter}} - E_k^{\text{før}} = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

finner vi følgende uttrykk for lengden L:

$$L = \frac{v_0^2}{2\mu_k g} = \frac{3.54^2}{2 \cdot 0.0168 \cdot 9.81} \simeq 38\,\mathrm{m}$$

Stenen vil gå for langt, og det hjelper ikke å koste. Merk at stenens masse ikke spiller noen rolle her. (I hvert fall så lenge vi neglisjerer luftmotstand.)

Oppgave 4



Før eksplosjonen: $\sum P_x = \sum P_y = 0$
Etter eksplosjonen:

$$P_{2,x} = P_2 = m_2 v_2 = 2,5kg \cdot 6,8m/s = 12,0kgm/s$$

$$P_{1,y} = P_1 = m_1 v_1 = 1,1kg \cdot 12m/s = 13,2kgm/s$$

Del(1) har ingen x-komp: $p_{1,x} = 0$
Del(2) har ingen y-komp: $p_{2,y} = 0$
Eksplosjonen antas å skje uten noe ytre kraftstøt, da må den samlede bevegelsesmengden i x-retning og i y-retning være bevart:

$$0 = P_{1,x} + P_{2,x} + P_{3,x} \Rightarrow P_{3,x} = -P_{2,x} = -17,0kgm/s \tag{5}$$

$$0 = P_{1,y} + P_{2,y} + P_{3,y} \Rightarrow P_{3,y} = -P_{1,y} = -13,2kgm/s \tag{6}$$

Altså får del (3) en bevegelsesmengde:

$$P_3 = \sqrt{P_{3,x}^2 + P_{3,y}^2} = \sqrt{(-17,0)^2 + (13,29^2}kgm/s = 21,52kgm/s \tag{7}$$

Dette gir oss farten:

$$v_3 = \frac{P_3}{m_3} = \frac{21,52}{0,70}m/s = 31m/s \tag{8}$$

Oppgave 5

Vi har uttrykket for kraften

$$F = \Delta I/\Delta t = v \cdot \Delta m/\Delta t$$

Merk: Her er det en masseendring som gir opphav til impulsen, og ikke en hastighetsendring. For at McGyver skal holde seg svevende, må denne kraften minst oppheve gravitasjonen, altså

$$F = m \cdot g$$

Dette gir oss den nødvendige utløpshastigheten

$$v = m \cdot g/(\Delta m/\Delta t) = (100kg \cdot 9.81m/s^2)/(0.5kg/s) = 1.962 \cdot 10^3 m/s$$

Dette tilsvarer 5.8 ganger lydhastigheten.

Oppgave 6

Hvis vi løfter pakken rett opp, uten bruk av talje, må vi løfte med en kraft $F = mg$, der m er pakkens masse. Og vi må løfte en lengde L tilsvarende høydeendringen for pakken.
Hvis vi bruker taljen i figuren, bruker vi bare en kraft $mg/4$. Til gjengjeld må vi trekke tauet en lengde $4L$, slik at utført arbeid blir det samme, $W = (mg/4) \cdot 4L = mgL$.

Oppgave 7

a) Før vi slipper kassene, har systemet en total energi bestående av potensiell energi (i forhold til om kassene var nede ved bakken) for hver av massene, dvs

$$E_{\text{før}} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$

I det kasse nr 2 treffer bakken, har den hastighet v (nedover) mens kasse nr 1 har hastighet $-v$ (dvs oppover). Videre er kasse nr 2 nå ved bakken, og har derfor null potensiell energi. Kasse nr 1 er nå i høyden $h_1 + h_2$, og har derfor potensiell energi $m_1 g(h_1 + h_2)$. Total energi nå er dermed

$$E_{\text{etter}} = m_1 g(h_1 + h_2) + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

Vi bruker prinsippet om energibevarelse, $E_{\text{før}} = E_{\text{etter}}$ som gir

$$(m_2 - m_1) g h_2 = \frac{1}{2}(m_2 + m_1) v^2$$

etter at vi har strøket bidraget $m_1 g h_1$ på begge sider. Vi løser for slutthastigheten v og finner

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1) g h_2}{(m_2 + m_1)}} = 0.9\,\text{m/s}$$

b) Forskjellen nå er at hjulet begynner å rotere, og dermed vil også hjulet få kinetisk energi. Siden tauet ikke sklir på hjulfelgen, vil alle punkter på felgen få samme hastighet v som de to kassene. Det betyr at felgmassen m_3 vil ha kinetisk energi $m_3 v^2/2$ i det kasse nr 2 treffer bakken. Eneste forskjell i uttrykket for v i oppgave a) blir at nevneren $m_2 + m_1$ må erstattes av $m_2 + m_1 + m_3$. Dermed

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh_2}{(m_2 + m_1 + m_3)}} = 0.8\,\mathrm{m/s}$$

Oppgave 8

a) Energibevarelse gir

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_b^2 \quad \Rightarrow \quad v_b = \sqrt{2gH}$$

b) Vi bruker også her energibevarelse:

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_t^2 + Mg \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad v_t = \sqrt{2g(H - 2R)}$$

c) På toppen av loopen virker to krefter på bilen: Normalkraften fra loopen (N) og tyngdekraften fra jorda (Mg). Begge peker loddrett nedover. Dersom bilen her skal følge den sirkulære loopen, må den ha en akselerasjon Mv_t^2/R, rettet mot loopens sentrum, dvs nedover. I følge Newtons andre lov må vi dermed ha:

$$N + Mg = Mv_t^2/R$$

d) Det at bilen følger loopen, betyr at den har kontakt med underlaget, dvs $N > 0$. Den vil akkurat miste kontakten med underlaget dersom N blir null. Minste hastighet i loopens topp-punkt er derfor gitt ved

$$Mg = Mv_t^2/R$$

dvs

$$v_t^2 = gR$$

Samtidig har vi fra punkt b) at

$$v_t^2 = 2g(H - 2R)$$

slik at minste starthøyde er gitt ved

$$gR = 2g(H - 2R)$$

eller

$$H = \frac{5}{2}R$$

Oppgave 9

Hvis vi ser på situasjonen like etter at den tunge ballen har vært i bakken, men før den lette ballen treffer den, er det essensielt et rett, elastisk støt vi ser på. Vi definerer positiv fart oppover, og setter opp bevaringslovene for bevegelsesmengde og energi:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} &= m_1 v_{1e} + m_2 v_{2e} && (9) \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2e}^2 && (10) \end{aligned}$$

Vi flytter litt rundt på (9) og (10):

$$\begin{aligned} m_1(v_{1f} - v_{1e}) &= -m_2(v_{2f} - v_{2e}) && (11) \\ m_1(v_{1f} + v_{1e})(v_{1f} - v_{1e}) &= -m_2(v_{2f} + v_{2e})(v_{2f} - v_{2e}) && (12) \end{aligned}$$

og ved å dividere (12) på (11) får vi følgende nyttige sammenheng:

$$v_{1f} + v_{1e} = v_{2f} + v_{2e} \tag{13}$$

Fra (9) får vi at

$$v_{1e} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} - m_2 v_{2e}}{m_1} \tag{14}$$

Vi setter så inn at $v_{2e} = v_{1f} + v_{1e} - v_{2f}$:

$$\begin{aligned} v_{1e} &= \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} - m_2(v_{1f} + v_{1e} - v_{2f})}{m_1} \\ v_{1e}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) &= v_{1f} + \frac{m_2}{m_1}\left(2v_{2f} - v_{1f}\right) && (15) \end{aligned}$$

I det den tyngste ballen treffer bakken har den konvertert all den potensielle energien den hadde i utgangspunktet til kinetisk energi. Dette kan vi bruke til å finne farten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 &= m_2 g h \\ \Rightarrow v_{2f} &= \sqrt{2gh} && (16) \end{aligned}$$

I det den lette ballen lander oppå den tunge har den også falt 1 meter (hvis vi ser bort fra radiusen til den tunge ballen), og har altså samme fart, men med motsatt retning. Altså har vi at

$$v_{1f} = -\sqrt{2gh} \tag{17}$$

Vi vet også at $m_2 = 3m_1$, og dermed er det bare å sette inn de størrelsene vi kjenner i (15), og vi finner at

$$v_{1e} = 2\sqrt{2gh} \tag{18}$$

Oppgaven var å finne ut hvor høyt den letteste ballen spretter. Ettersom vi ser bort fra luftmotstand, kan vi igjen bruke energibevaring:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1\left(2\sqrt{2gh}\right)^2 &= m_1gH \\ \Rightarrow H &= 4h \end{aligned} \tag{19}$$

Oppgave 10

a) Kula vil under svingebevegelsen kun bli utsatt for tyngden som en arbeidende kraft (snora perpendikulær på buen), da vil den totale mekaniske energien bli bevart.

$$E_{k,nederst} = E_{p,øverst} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_k^2 = mgL \tag{20}$$

b) Vi forutsetter at klossen kun blir utsatt for tyngden i fallet. Den gjør da tilsvarende et horisontalt kast.

$$s_y = -\frac{1}{2}gt^2 = -0,81m \tag{21}$$

Falltiden:

$$t = \sqrt{\frac{-2s_y}{g}} = \sqrt{\frac{-2(-0,81)}{9,81}}s = 0,406s \tag{22}$$

Utgangsfarten:

$$v_0 = v_{0x} = \frac{s_x}{t} = \frac{0,69m}{0,406s} = 1,70m/s \tag{23}$$

c) Når klossen treffer golvet:

$$v_y = -gt = -9,81m/s^2 * 0,706s = -3,98m/s \tag{24}$$

Vi vet at farten i x-retning er konstant, altså lik utgangsfarten $v_{0x} = 1,70m/s$. Vinkelen med horisontalplanet:

$$tan\theta = |\frac{v_y}{v_x}| = \frac{3,98m/s}{1,70m/s} \Rightarrow \theta = 67grader. \tag{25}$$

d) Forutsetter at støtet skjer uten noe ytre kraftstøt i x-retning. Da vil bevegelsesmengden i x-retning forbli konstant i støtet.

$$M \cdot 0 + mv_k = Mv_0 + mv \tag{26}$$

$$mv = mv_k - Mv_0 \Rightarrow v = v_k - \frac{Mv_0}{m} \tag{27}$$

Kulas rekylfart:

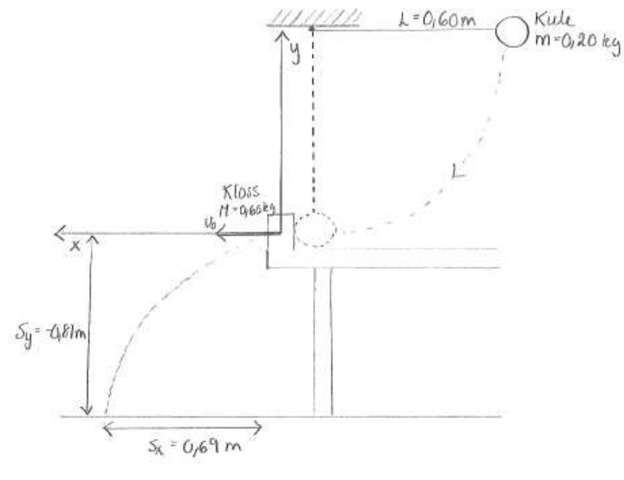
$$v = 3,43m/s - \frac{0,60}{0,20}1,70m/s = -1,67m/s \tag{28}$$

e) Ved elastisk støt er kinetisk energi bevart.

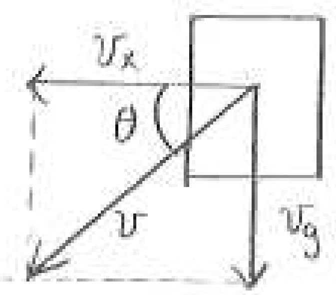
$$E_{k,før} = \frac{1}{2}mv_k^2 = \frac{1}{2}0,20 * 3,43^2J = 1,18J \tag{29}$$

$$E_{k,etter} = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 = (\frac{1}{2}0,50 \cdot 1,70^2 + \frac{1}{2}0,20 \cdot 1,67)J = 1,15J \tag{30}$$

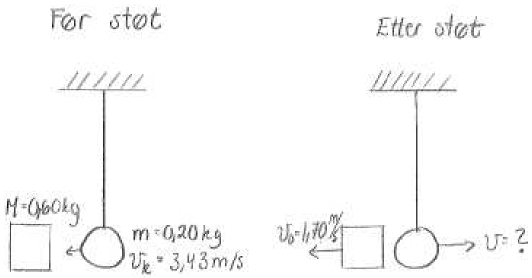
Grad av elastisitet: $\frac{1,15}{1,18} \cdot 100\% = 97,5\%$ (ganske elastisk)



c (3)



d (4)



Oppgave 11

Hele denne oppgaven dreier seg om bevaring av bevegelsesmengde.

a)

$$m_1 v = (m_2 + M)u_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{m_1}{m_2 + M}v$$

b)

$$\Delta p_{\text{sønn}} = m_2 u_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta p_{\text{slede}} = m_2 u_1 = \frac{m_1 m_2}{m_2 + M}v$$

$$\Rightarrow \Delta u_{\text{slede}} = \frac{\Delta p_{\text{slede}}}{M} = \frac{m_1 m_2}{M(m_2 + M)}v$$

$$\Rightarrow u_2 = u_1 + \Delta u_{\text{slede}} = \frac{m_1 M + m_1 m_2}{M(m_2 + M)}v = \frac{m_1}{M}v$$

Uavhengig av m_2, rimelig ettersom sønnen startet i ro og sluttet i ro.

c) Sønn hopper først, med impuls

$$m_2 u_1 = \frac{m_1 m_2}{m_2 + M}v$$

$$\Rightarrow u_{\text{sønn}} = m_2 u_1 / m_2 = u_1 = \frac{m_1}{m_2 + M} v$$

$$\Rightarrow u_{\text{slede+far}} = \frac{m_2 u_1}{m_1 + M} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + M)(m_2 + M)} v$$

(mot høyre)
Deretter hopper far, med impuls $m_1 v$. Dermed:

$$\Delta p_{\text{far}} = m_1 v \quad \Rightarrow \quad \Delta u_{\text{far}} = v \quad \Rightarrow \quad u_{\text{far}} = v \left[\frac{m_1 m_2}{(m_1 + M)(m_2 + M)} - 1 \right]$$

(mot venstre)
Uthoppet av far gir sleden en impuls

$$\Delta p_{\text{slede}} = m_1 v \quad \Rightarrow \quad \Delta u_{\text{slede}} = \frac{m_1 v}{M}$$

Sluttfarten til sleden blir

$$u_{\text{slede,slutt}} = u_{\text{slede,før}} + \Delta u_{\text{slede}} = v \left[\frac{m_1 m_2}{(m_1 + M)(m_2 + M)} + \frac{m_1}{M} \right]$$

Nå er både sønnens og farens fart ulik null etter uthoppet, så sluttfarten til sleden avhenger rimeligvis både av m_1 og m_2. Og vi ser at sledens fart nå er større! Altså: Bedre at den letteste hopper først hvis vi ønsker stor fart på sleden.

d) Samtidig uthopp gir sleden en impuls

$$\Delta p_{\text{slede}} = \Delta p_{\text{far}} + \Delta p_{\text{sønn}} = m_1 v + \frac{m_1 m_2}{m_2 + M} v$$

slik at sleden får farten

$$u_{\text{slede}} = \left[\frac{m_1}{M} + \frac{m_1 m_2}{M(m_2 + M)} \right] v$$

Vi ser at denne er den største av dem alle! Altså: Aller lurest å hoppe samtidig. Rimelig også dette: Ved samtidig uthopp gis bare sleden en impuls i sledens kjøreretning!