

Oppgaver

Tor Nordam

17. september 2007

Kvalitative oppgaver

Du er ute og sykler på en stor parkeringsplass. Plutselig kommer du på at du har glemt noe. Du tar en u-sving, og sykler tilbake dit du kom fra uten å miste nevneverdig fart. Hva har skjedd med bevegelsesmengden din? Hvordan stemmer dette med bevaringslovene for bevegelsesmengde og energi?

Nettstedet www.worldjumpday.org forsøkte å oppfordre flest mulig til å hoppe rett opp og ned klokken 11:39:13 den 20. juli 2006. Tanken var at hvis de fikk minst 600 millioner mennesker til å hoppe opp og ned på riktig tidspunkt kunne man forandre banen til jorden, og dermed motvirke global oppvarming. Har du noen kommentarer til den som tenkte opp denne idéen?

Regneoppgave

Tenk deg at du har to sprettballer, en med masse m_1 , og en med masse $m_2 = 3m_1$. Du slipper begge to fra en høyde h , på en slik måte at den letteste ballen lander oppå den tyngste umiddelbart etter at den tyngste traff bakken. Hvor høyt spretter den letteste ballen? Du kan se bort fra luftmotstand, og anta at alle støtene er elastiske.

Løsningsforslag

Vi setter opp bevaringslovene for bevegelsesmengde og energi:

$$m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} = m_1 \mathbf{v}_{1e} + m_2 \mathbf{v}_{2e} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2e}^2 \quad (2)$$

der $\mathbf{v}_{1f}$ og $\mathbf{v}_{2f}$ er hastighetene etter at den tyngste ballen har vært i bakken, men før de to ballene har kollidert. Vi definerer positiv retning oppover.

I det den tyngste ballen treffer bakken har den konvertert all den potensielle energien den hadde i utgangspunktet til kinetisk energi. Dette kan vi bruke til å finne farten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 &= m_2 g h \\ \Rightarrow v_{2f} &= \sqrt{2gh} \end{aligned} \quad (3)$$

I det den lette ballen lander oppå den tunge har den også falt 1 meter (hvis vi ser bort fra radiusen til den tunge ballen), og har altså samme fart, men med motsatt retning. De ukjente størrelsene her er altså $\mathbf{v}_{1e}$ og $\mathbf{v}_{2e}$. Vi setter opp et uttrykk for $\mathbf{v}_{1e}$:

$$\mathbf{v}_{1e} = \frac{m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f} - m_2 \mathbf{v}_{2e}}{m_1} \quad (4)$$

Vi kan nå bruke det vi vet til å forenkle dette uttrykket litt. Vi setter inn at $m_2 = 3m_1$, og at $\mathbf{v}_{1f} = -\mathbf{v}_{2f}$:

$$\mathbf{v}_{1e} = 2\mathbf{v}_{1f} - 3\mathbf{v}_{2e} \quad (5)$$

Vi setter dette inn i uttrykket for energibevaring:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 &= \frac{1}{2}m_1 (2\mathbf{v}_{1f} - 3\mathbf{v}_{2e})^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2e}^2 \\ \Rightarrow 4v_{1f}^2 &= (2\mathbf{v}_{1f} - 3\mathbf{v}_{2e})^2 + 3v_{2e}^2 \\ \Rightarrow 8gh &= 8gh - 12\mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2e} + 9v_{2e}^2 + 3v_{2e}^2 \\ \Rightarrow \mathbf{v}_{1f} \cdot \mathbf{v}_{2e} &= v_{2e}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Vi husker at $\mathbf{v}_{1f}$ hadde retning nedover. Altså må også $\mathbf{v}_{2e}$ ha retning nedover for at den siste likheten skal stemme fortegnsmessig. Vi kan så sette inn i (5) for å finne $\mathbf{v}_{1e}$: