Lørdagsverksted i fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2007.
Veiledning: 29. september kl 12:15 – 15:00.

Løsningsforslag til øving 4: Coulombs lov. Elektrisk felt. Magnetfelt.

Oppgave 1

a) C. Elektrisk felt i negativ y-retning betyr kraft på positiv ladning i negativ y-retning. Dermed vil protonet bremses opp, snu, og komme ut av området med elektrisk felt, med hastighet v_0 i negativ y-retning.

b) A. Pil nr 1 angir riktig retning for total kraft på ladningen i nedre høyre hjørne. Løses ved å tegne kraftpiler fra hver av de fire andre, og legge sammen.

c) C. Faktisk eneste alternativ med riktig enhet: $[(\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2)\ \mathrm{C}^2\ /\ (\mathrm{kg\ m})]^{1/2} = \mathrm{m/s}$, ettersom $\mathrm{N} = \mathrm{kg\ m/s}^2$. Regnes ut f.eks. på følgende måte: Hvert av de to faste protonene påvirker det bevegelige protonet med en kraft som har x-komponent

$$F_x = k\frac{e^2}{d^2}\cos\theta = k\frac{e^2}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Her er $d = \sqrt{x^2+a^2}$ avstanden mellom fast og bevegelig proton når sistnevnte har kommet til posisjon x, mens θ er vinkelen mellom x-aksen og $\boldsymbol{F}_x$. Av symmetrigrunner er bare x-komponenten av interesse. Arbeidet som utføres på det bevegelige protonet, når det flyttes fra $x = 0$ til $x = \infty$, blir dermed

$$W = \int_0^\infty 2F_x dx = 2ke^2 \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{2ke^2}{a}$$

der vi brukte det oppgitte integralet fra Oppgave 10. Dette må bli det bevegelige protonets kinetiske energi uendelig langt ute på x-aksen, dermed

$$v = \sqrt{2W/m_p} = \sqrt{4ke^2/m_p a}$$

d) A.

$$F = k\frac{e^2}{r^2} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{\left(1.6\cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(4\cdot 10^{-9}\right)^2} = 1.44\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} = 14.4\ \mathrm{pN}$$

e) C. Tiltrekkende kraft mot venstre: 1 (Vi dropper faktorene $4\pi\varepsilon_0$ og q^2 og setter lengden av kvadratets sidekant lik 1.) Tiltrekkende kraft nedover: 3. Frastøtende kraft på skrå oppover mot høyre: $(2\sqrt{2}/(\sqrt{2}^2) = \sqrt{2}$. Horisontalkomponenten av denne er $\sqrt{2}\cdot\sin\pi/4 = 1$, som dermed akkurat kansellerer den tiltrekkende kraften mot venstre (fra ladningen i øvre venstre hjørne). Vertikalkomponenten av kraften på skrå oppover mot høyre blir også lik 1, slik at total kraft blir lik 2, rettet nedover. Dermed pil nr 3.

f) A. I punktene A og C bidrar de to ladningene til det elektriske feltet med vektorer som peker i samme retning. Det totale feltet der kan da ikke bli null. I punktet B peker feltbidragene fra q_1 og q_2 i motsatt retning, så der kan det totale feltet tenkes å bli null.

g) A. Total kraft på ladningen Q med masse M:

$$F = \frac{kQ^2}{a^2} - \frac{kQ^2}{4a^2} = \frac{3kQ^2}{4a^2}$$

som gir akselerasjonen

$$a = F/M = \frac{3kQ^2}{4Ma^2}$$

h) C. Tiltrekkende kraft fra ladningen øverst: kq^2/a^2. Nedoverkomponent av tiltrekkende kraft fra en av ladningene nederst: $k\alpha q^2 \cos(\pi/4)/a^2$. Vi har to slike, og $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Dermed: $2\alpha \cdot \sqrt{2}/2 = 1$, dvs $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

i) B.

$$F = k/r^2, \quad F' = k/(1.2r)^2 = k/1.44r^2 = 0.69k/r^2 = 0.69F$$

j) C. Elektron har negativ ladning, følgelig representerer uniformt elektrisk felt med retning mot høyre en uniform kraft på elektronet, med retning mot venstre. Altså, akselerasjon mot venstre, i følge Newtons 2. lov.

k) C. Underskudd på negativt ladde elektroner må bety en netto positiv ladning. Og med underskudd på 5 milliarder elektroner, hver med ladning $-1.6 \cdot 10^{-19}$ C, ender vi opp med en netto ladning $8 \cdot 10^{-10}$ C $= 0.8$ nC.

l) C. Den negativt ladete kula faller ned når den elektrostatiske tiltrekningskraften blir mindre enn tyngdekraften. Verdien av $h + 0.2$ (dvs h i meter) bestemmes derfor av ligningen

$$\frac{kq_- \cdot q_+}{(h+0.2)^2} = mg$$

Vi løser ligningen med hensyn på h, setter inn oppgitte verdier og finner

$$h = \sqrt{\frac{kq_- \cdot q_+}{mg}} - 0.2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9}{0.050 \cdot 9.8}} - 0.2 \simeq 1.51$$

m) C. Totalt elektrisk felt i P er vektorsummen av bidragene fra de fire punktladningene. Konfigurasjonen i figur 3 gir den største feltstyrken. (Ingen feltbidrag har her komponent oppover.)

n) D. Av symmetrigrunner.

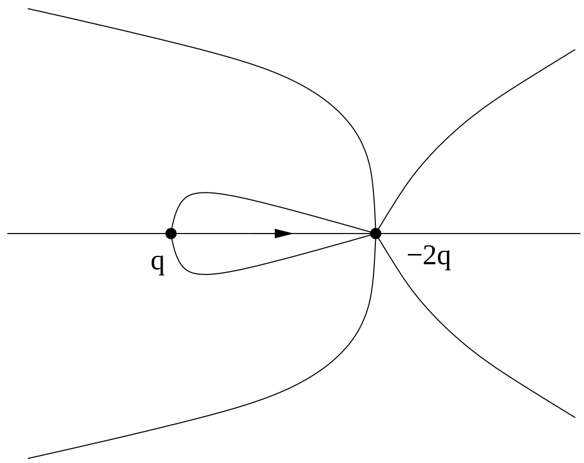
o) C. Av symmetrigrunner.

p) B. Newtons 3. lov: Kraft og motkraft er like store.

q) D. Den magnetiske kraften må stå vinkelrett på hastighetsvektoren $\boldsymbol{v}$, som her har retning mot nord. Retning mot nordøst er *ikke* vinkelrett på retning mot nord.

Oppgave 2

a) Noe i denne stilen:



Kommentar: Må ha et bestemt antall feltlinjer pr ladningsenhet. Dermed: Hvis det går 4 feltlinjer ut fra ladningen q, må det komme 8 feltlinjer inn mot ladningen $-2q$.

b) Tiltrekkende kraft mellom q_1 og q_2 (dvs kraft mot høyre på q_1):

$$F_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6.0 \cdot 10^{-6} \cdot 4.0 \cdot 10^{-6}}{3.0^2} = 0.024 \text{ N}$$

Frastøtende kraft mellom q_1 og q_3 (dvs kraft mot venstre på q_1):

$$F_{13} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6.0 \cdot 10^{-6} \cdot 6.0 \cdot 10^{-6}}{6.0^2} = 0.009 \text{ N}$$

Alt i alt en kraft 0.015 N mot høyre på ladningen q_1.

c) Frastøtende elektrisk kraft mellom to protoner i innbyrdes avstand r:

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2}$$

Tiltrekkende gravitasjonskraft mellom to partikler med masse m i innbyrdes avstand r:

$$F_g = \frac{Gm^2}{r^2}$$

Skal disse være like store i absoluttverdi, må massen være

$$m = e\sqrt{k/G}$$

Her er $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2 gravitasjonskonstanten. Innsetting av tallverdier gir

$$m = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot \sqrt{9 \cdot 10^9/(6.67 \cdot 10^{-11})} = 1.9 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

I virkeligheten har protonet en masse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, så forholdet mellom F_g og F_e er i virkeligheten

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{Gm_p^2}{ke^2} = 8.1 \cdot 10^{-37}$$

Oppgave 3

a) Stangas totale ladning:

$$Q = \lambda L = 3.5 \cdot 10^{-9} \cdot 5 = 17.5 \text{ nC}$$

b) Feltbidrag i posisjon x fra liten bit av stanga dx' i posisjon x':

$$dE = \frac{kdq'}{(x-x')^2} = \frac{k\lambda dx'}{(x-x')^2}$$

Totalt felt i posisjon x fra hele stanga:

$$E(x) = \int dE = \int_0^L \frac{k\lambda dx'}{(x-x')^2} = k\lambda \left[\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right] = \frac{k\lambda L}{x(x-L)} = \frac{kQ}{x(x-L)}$$

Vi har $kQ = 157.5$ Nm^2/C. Innsetting av de ulike posisjonene gir dermed $E(6) = 157.5/(6 \cdot 1) = 26.25$ N/C, $E(9) = 157.5/(9 \cdot 4) = 4.375$ N/C og $E(250) = 157.5/(250 \cdot 245) = 2.57$ mN/C.

c) En punktladning Q i origo gir et elektrisk felt i $x = 250$ m lik

$$E = 157.5/250^2 = 2.52 \text{ mN/C}$$

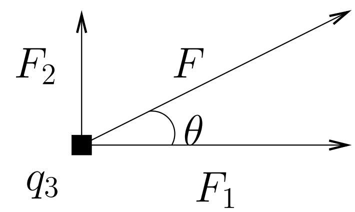
Vi ser at denne tilnærmede verdien bare er ca 2% feil, og at den tilsvarer at vi neglisjerer lengden L i faktoren $x - L$ i nevneren i det eksakte uttrykket:

$$E(x) = \frac{kQ}{x(x-L)} \simeq \frac{kQ}{x^2}$$

når $x \gg L$.

Oppgave 4

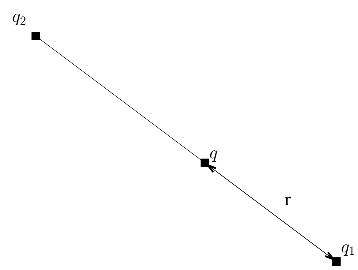
a)



Figur 1: Kreftene som virker på q_3

$F_1 = k\frac{q_1 q_3}{r_1^2}$, $F_2 = k\frac{q_2 q_3}{r_2^2}$, der $r_1 = 4.0$m og $r_2 = 3.0$m.
Vi får da $F_1 = -2.11 \cdot 10^{-6}$ N og $F_2 = -1.25 \cdot 10^{-6}$ N.
$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 2.5 \cdot 10^{-6}$ N.
$\tan\theta = \frac{F_2}{F_1}, \theta = 30.1°$.

b)



Figur 2: Ladningen ligger mellom q_1 og q_2

Avstanden mellom q_1 og q_2 er $\sqrt{(3\text{m})^2 + (4\text{m})^2} = 5$ m.
$F_1 = k\frac{qq_1}{r^2}$ og $F_2 = k\frac{qq_2}{(5-r)^2}$.

$$\sum F = F_1 - F_2 = k\frac{qq_1}{r^2} - k\frac{qq_2}{(5-r)^2} = ma$$

Vi skal finne ut hvor $a = 0$, og får da

$$\begin{aligned}
k\frac{qq_1}{r^2} - k\frac{qq_2}{(5-r)^2} &= 0 \\
kq\left(\frac{q_1}{r^2} - \frac{q_2}{(5-r)^2}\right) &= 0 \\
\frac{q_1}{r^2} &= \frac{q_2}{(5-r)^2} \\
\left(\frac{q_2}{q_1} - 1\right) r^2 + 10r - 25 &= 0
\end{aligned}$$

Vi får to løsninger

$$r = \frac{-10 \pm \sqrt{100 \cdot \frac{q_2}{q_1}}}{2\left(\frac{q_2}{q_1} - 1\right)} \tag{1}$$

$\frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{3}$, så

$$r = \frac{-10 \pm \sqrt{\frac{100}{3}}}{-\frac{4}{3}}$$

$$r_1 \approx 11.83\text{m}, \quad r_2 \approx 3.2\text{m}$$

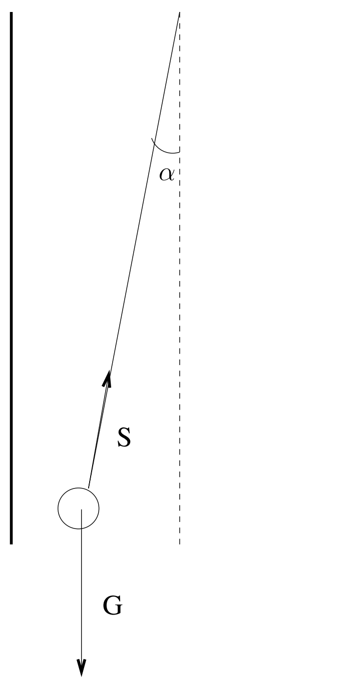
Siden avstanden mellom q_1 og q_2 er 5 m, ser vi at kun r_2 kan være en løsning, så partikkelen er 3.2m fra q_1 når akselerasjonen er 0.

Oppgave 5

a) Elektrisk feltstyrke er elektrisk kraft per enhet ladning:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

b)



Figur 3: Pendelen med krefter tegnet inn

Siden pendelkulen er i ro, må summen av kreftene som virker på den være lik 0. Vi kan dekomponere kreftene og se på x-retningen og y-retningen hver for seg.

$$F_y = S \cdot \cos\alpha - mg$$
$$F_x = S \cdot \sin\alpha - F_e$$

$F_e = Eq$, der E er feltstyrken vi skal finne. Ved å dele de to ligningene på hverandre finner vi

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{S \cdot \sin\alpha}{S \cdot \cos\alpha} = \frac{Eq}{mg}$$
$$E = \frac{mg}{q}\tan\alpha$$

Oppgave 6

a) Vinkelrett ut av papiret.

b) Vi må ha at $F_e = F_m$

$$Eq = qvB$$
$$E = vB$$
$$v = \frac{E}{B} = 2.0 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) Isotopen går nå i en sirkelbane, og den eneste kraften er F_m. Vi får $F_m = ma = m\frac{v^2}{r}$.

$$m\frac{v^2}{r} = F_m = qvB$$
$$\frac{mv}{r} = qB$$
$$m = \frac{qrB}{v}$$

v fant vi i punkt b), og vi har at $q = e$ siden vi har oppgitt at ionene har en positiv elementærladning. Vi finner da

$$m \approx 3.5 \cdot 10^{-26}\mathrm{kg} \tag{2}$$

Oppgave 7

a)

$$F = qvB = ma = mv^2/r$$

som gir

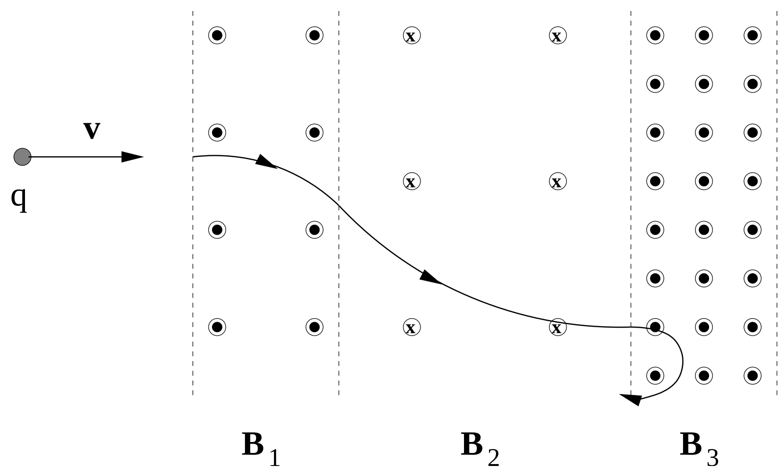
$$r = mv/qB$$

Her er $m = m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $B = 4 \cdot 10^{-7}$ T og $v = 10^7$ m/s. Innsetting gir da $r = 142$ m.

b) Innsetting gir nå $r = 2.8$ m.

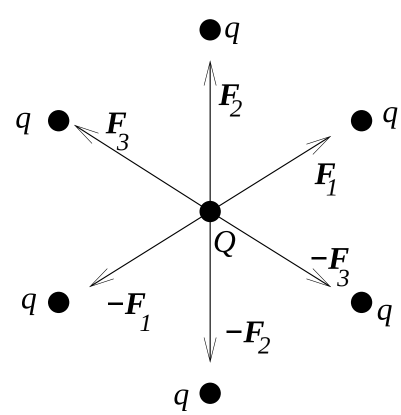
Oppgave 8

Den ladde partikkelen vil, i hvert av de tre områdene, følge en sirkulær bane med krumningsradius som er omvendt proporsjonal med den magnetiske feltstyrken, jfr oppgaven over. Dermed skulle banen bli omtrent slik:

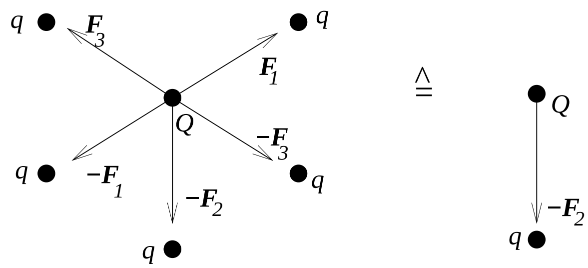


Oppgave 9

a) På grunn av symmetrien i problemet er det vel innlysende at testladningen Q blir utsatt for null nettokraft, idet kreftene fra to og to ladninger kansellerer hverandre:



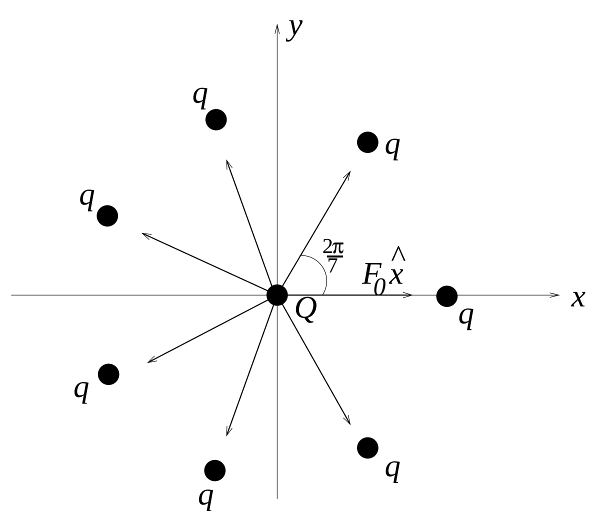
b) Vi fjerner en av ladningene, f.eks. den "øverste":



Det er da umiddelbart klart at nettokraften på Q blir lik kraften fra den ladningen vi fjernet, med motsatt fortegn, altså -$\boldsymbol{F}_2$.
Vi har her brukt *superposisjonsprinsippet*. Matematisk kunne vi f.eks. formulere løsningen slik: La $\sum_{(6)} \boldsymbol{F}_i$ angi nettokraften med alle 6 ladningene til stede og $\sum_{(5)} \boldsymbol{F}_i$ nettokraften etter vi har fjernet ladningen som påvirket Q med kraften $\boldsymbol{F}_2$. Da er

$$\sum_{(5)} \boldsymbol{F}_i = \sum_{(6)} \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{F}_2 = 0 - \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_2$$

c) Også med et odde antall q-ladninger, f.eks. 7, må nettokraften på testladningen Q i sentrum bli lik null. Anta at nettokraften *ikke* var null. En dreining av systemet på $360/7\,°$ i papirplanet ville da medføre at nettokraften endret retning. Men systemet er uendret som følge av en slik dreining, så kraften på Q kan heller ikke ha endret seg og må følgelig være null.
Hvis noen mot formodning ikke er overbevist, er det jo bare å regne ut nettokraften. Legg Q i origo og (f.eks.) den ene q på x-aksen:



Nettokraften på Q blir da:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= F_x\hat{x} + F_y\hat{y} \\
&= F_0\,(1 + 2\cos 2\pi/7 + 2\cos 4\pi/7 + 2\cos 6\pi/7)\,\hat{x} + \\
&\quad F_0\,(0 + \sin 2\pi/7 + \sin(-2\pi/7) + \sin 4\pi/7 + \sin(-4\pi/7) + \sin 6\pi/7 + \sin(-6\pi/7))\,\hat{y} \\
&= F_0\,(1 + 1.247 - 0.445 - 1.802)\,\hat{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Her har vi satt absoluttverdien av kraften mellom q og Q lik F_0 og benyttet at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$.

Oppgave 10

De tynne ringene har omkrets $2\pi r$ og "tykkelse" dr, slik at arealet av dem blir $2\pi r \cdot dr$. Ladningen på en slik ring blir derfor $\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr$. Avstanden fra en slik ring til et punkt på symmetriaksen blir $\sqrt{r^2 + L^2}$ når punktet ligger i en avstand L fra det ladde planet. Pga symmetri vil bare komponenten av det elektriske feltet som står vinkelrett på planet "overleve". Denne komponenten får vi ved å multiplisere med en faktor $\cos\theta = L/\sqrt{r^2 + L^2}$. Dermed har vi det vi trenger for å bestemme det totale elektriske feltet i avstand L fra et uendelig stort ladd plan:

$$E = \int dE = \int_0^\infty \frac{k \cdot \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{r^2 + L^2} \cdot \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} = 2k\pi\sigma L \int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2 + L^2)^{3/2}} = 2k\pi\sigma$$

Her har vi brukt det oppgitte integralet, med $x \to r$ og $a \to L$. Vi ser at feltstyrken blir *uavhengig av avstanden* L!