

LABORATORIUM I EMNENE

TFY4145 MEKANISK FYSIKK
FY1001 MEKANISK FYSIKK

for studenter ved studieprogrammene

MTFYMA
MLREAL
BFY

NTNU

Høsten 2015

Forord

Dette heftet inneholder tekster til laboratoriekurset i emnene FY1001 Mekanisk fysikk og TFY4145 Mekanisk fysikk. Kurset går over fem økter, med fire praktiske laboratorieoppgaver og en økt med fokus på rapportskriving.

Nettside for laboratoriekurset:

http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fy1001_lab/.

På de tilhørende nettsidene vil studentene finne nødvendig informasjon om påmelding til laboratoriet, timeplaner, romfordelinger og så videre.

De symboler og enheter som brukes for fysiske størrelser har nok en tendens til å variere fra lærer til lærer og fra bok til bok. I dette heftet brukes så langt som mulig enheter som er i overensstemmelse med Norsk standard og SI-systemet. Unntak fra dette forekommer i forbindelse med omtale av instrumenter som brukes i laboratoriet og som ikke er skalert i standard enheter.

Egil Vålandsmyr Herland, Iver Bakken Sperstad, Knut Gjerden, Asle Heide Vaskinn, Mikael Lindgren, Arne Mikkelsen, Thor Bernt Melø

August 2010

Heftet er revidert, omstrukturert og oppdatert.

Egil Vålandsmyr Herland, Iver Bakken Sperstad, Knut Gjerden, Mari Helene Farstad, Troels Arnfred Bojesen, Amund Gjerde Gjendem, Thor Bernt Melø

August 2011

Heftet er revidert, omstrukturert og oppdatert.

Jon Andreas Støvneng

August 2015

Før laboratorieøvelsen

Laboratoriekurset går over fem økter på fire timer hver. Før hver enkelt økt må studentene gjøre følgende forberedelser:

- Labøkt 1, Lineær bevegelse: Les kapittel 1, 2 og 3.
- Labøkt 2, Gravitasjonskonstanten: Les kapittel 4 og 5, og gjør forhåndsoppgavene i delkapittel 5.4.
- Labøkt 3, Rapportskriving: Les kapittel 6 og se igjennom tillegg A.
- Labøkt 4, Rotasjonsbevegelse: Les kapittel 7.
- Labøkt 5, Stående bølger på streng: Les kapittel 8.

Innhold

1	INNLEDNING	1
1.1	Formålet med laboratorieundervisningen	1
1.2	Innhold	2
1.3	Undervisningsform	2
1.4	Skikk og bruk i undervisningslaboratoriet	3
2	LABORATORIEJOURNALEN	5
2.1	Formålet med laboratoriejournalen	5
2.2	Innholdet i en laboratoriejournal	5
2.3	Krav til utforming av laboratoriejournalen	8
2.4	Grafiske fremstillinger	9
2.5	Numeriske beregninger	10
2.5.1	Planlegging av numeriske beregninger	10
2.5.2	Målefeil og signifikante sifre	11
2.5.3	Manuell tallbehandling	12
2.5.4	Tallbehandling med datamaskin	12
2.6	Oppsummering	13
3	LINEÆR BEVEGELSE	15
3.1	Teori	15
3.1.1	Det mekaniske systemet	15
3.1.2	Bevegelsen til M etter at den lille massen har nådd gulvet	15
3.1.3	Bevegelsen før den lille massen har nådd gulvet	16
3.1.4	Energibevarelse	17
3.2	Litt om målesensorene	18
3.2.1	Virkemåten til kraftmåleren	18
3.2.2	Virkemåten til posisjonsmåleren	18
3.2.3	Derivasjon av diskret målte størrelser	18
3.3	Litt om Pasco dataloggingssystem	19
3.4	Eksperimentelt	21
3.4.1	Oppsett av DataStudio	21
3.4.2	Kontroll av ekkolodd	22
3.4.3	Kontroll av kraftmåler	22
3.4.4	Gjennomføring av målingene	23
3.4.5	Dataanalyse	23

4	FEIL I FYSISKE MÅLINGER	25
4.1	Målefeil	25
4.2	Angivelse av resultatet fra en måling av en fysisk størrelse	26
4.3	Analyse av målefeilen	27
4.3.1	Tilfeldige feil	27
4.3.2	Systematiske feil	28
4.3.3	Grove feil	29
4.4	Feilregning	29
4.4.1	Det enkle tilfellet	30
4.4.2	Det generelle tilfellet	31
4.5	Statistiske feilberegninger	35
5	GRAVITASJONSKONSTANTEN	39
5.1	Teoretisk bakgrunn	39
5.1.1	Gravitasjon	39
5.2	Måling av gravitasjonskonstanten	40
5.2.1	Måling av torsjonsvinkelen	42
5.2.2	Bestemmelse av torsjonsstivheten	44
5.2.3	Beregning av gravitasjonskonstanten	44
5.3	Feilanalyse i Cavendisheksperimentet	45
5.3.1	Tilfeldige feil	45
5.3.2	Systematiske feil	45
5.4	Forhåndsoppgaver	46
5.5	Eksperimentelt	47
5.5.1	Apparatur	47
5.5.2	Forsiktighetsregler	48
5.5.3	Måleprosedyre	48
5.5.4	Analyse av resultatene	50
5.5.5	Avslutning	51
5.6	Rapport fra Cavendisheksperimentet	51
6	RAPPORTSKRIVING	53
6.1	Skriving av rapport	53
6.1.1	Rapportering av resultater fra eksperimentelt arbeid	53
6.1.2	Skriveprosessen	54
6.2	Tekstbehandling med Latex	56
6.3	Metoder	56
6.3.1	Tabeller	57
6.3.2	Figurer	58
6.3.3	Kurvedigrammer	59
6.3.4	Matematiske uttrykk	62
6.3.5	Oppsetting av matematiske uttrykk med Latex	63
7	ROTASJONSBEVEGELSE, DREIEMOMENT OG DREIEIMPULS	65

7.1	Teori	65
7.1.1	Treghetsmoment	65
7.1.2	Eksperiment 1: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre dreiemoment . .	66
7.1.3	Eksperiment 2: Bevaring av dreieimpuls	67
7.1.4	Eksperiment 3: Bevaring av dreieimpuls	68
7.2	Eksperimentell gjennomføring	70
7.2.1	Roterende skiver og luftputebanen	70
7.2.2	Oppsett av Pasco DataStudio og kalibrering av sensor	71
7.2.3	Eksperiment 1: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre dreiemoment . .	72
7.2.4	Eksperiment 2: Bevaring av dreieimpuls	72
7.2.5	Eksperiment 3: Bevaring av dreieimpuls	73
7.2.6	Ekstraoppgaver	74
8	STÅENDE BØLGER PÅ STRENG	75
8.1	Teori	75
8.1.1	Bølgeligningen	75
8.1.2	Stående bølger	76
8.2	Utstyr	77
8.3	Eksperimentell gjennomføring	77
A	NOEN RÅD OM SKRIVING AV FYSIKKRAPPORTER	81

Kapittel 1

INNLEDNING

1.1 Formålet med laboratorieundervisningen

Fysikkundervisningen i første og andre klasse ved studieprogrammene MTFYMA, BFY og MLREAL er ved NTNU organisert i fire emner: TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk, TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme, TFY4165/ FY1005 Termisk fysikk og TFY4215/FY1006 Innføring i kvantefysikk. Til de tre første av disse emnene hører et laboratoriekurs som har til formål gjennom eksperimenter å belyse utvalgte fenomener fra sitt emne. Det overordnede målet er å gi en grundig innføring og opplæring i eksperimentelle metoder gjennom tolkning og dokumentasjon av fysiske målinger. Mange av disse arbeidsmåtene, slik som databehandling, feilanalyse og skriving av vitenskapelige tekster, er grunnleggende ferdigheter som også vil komme til nytte utenfor laboratoriet.

Mens man i forelesningene tilnærmer seg fysikken hovedsakelig gjennom matematiske modeller, vil man i laboratoriet tilnærme seg fysikken hovedsakelig gjennom observasjoner og målinger. I laboratoriekursene er oppmerksomheten derfor rettet mot den eksperimentelle prosedyren. For dem som er vant med å betrakte fysikken gjennom matematiske modeller, kan dette virke fremmed. Fysikken er imidlertid ifølge sitt vesen et eksperimentelt naturfag, og det er derfor essensielt under fysikkstudiet også å nærme seg fysikken fra den eksperimentelle siden. Gjennom dette kan en gi studenten anledning til å nyansere sine tolkninger av de matematiske modellene slik at de blir i overensstemmelse med virkeligheten.

Det er under studiet viktig at du tilpasser din kunnskap fortløpende til de fysiske omgivelser gjennom observasjon og eksperimentering. Du har visse muligheter til dette ved å observere fysiske fenomener i dine daglige omgivelser. Men det finnes mange fysiske fenomener som ikke lar seg observere der; mange fysiske fenomener krever måleutstyr for å la seg observere.

Laboratorieundervisningen skal gi en innføring i de ferdigheter og kunnskaper som en fysiker må mestre for selvstendig å kunne tilegne seg kunnskap om naturen gjennom eksperimenter. Eksperimentelle ferdigheter og kunnskaper inkluderer manuelle ferdigheter, organisatoriske ferdigheter, konstruksjonsferdigheter, kunnskap om målemetoder og apparatur og kunnskap om presentasjon, tolking og dokumentasjon av eksperimentelle resultater og prosedyrer. Mestring av disse ferdigheter og kunnskaper er en like nødvendig forutsetning for

å kunne forstå fysikken gjennom eksperimenter og observasjoner som matematiske ferdigheter og kunnskaper er for å forstå fysikken gjennom matematiske betraktninger. Mestring av disse ferdigheter og kunnskaper er også en del av det grunnlag som du behøver for å kunne anvende fysikken i teknikk og industri.

1.2 Innhold

Til dette kurset har vi valgt ut fire eksperimenter: (i) Lineær bevegelse; (ii) Gravitasjonskonstanten; (iii) Rotasjonsbevegelse - dreiemoment og dreieimpuls; og (iv) Stående bølger på streng.

Av praktiske grunner kan du i løpet av et laboratoriekurs kun lære å bruke et begrenset sett med enkeltstående instrumenter og metoder. Dette forhindrer ikke at et laboratoriekurs kan gi deg en generell trening i behandling av måleinstrumenter, anvendelse av målemetoder og innsikt i de muligheter og begrensninger som er knyttet til måling av fysiske størrelser. I dette kurset gir vi deg en innføring i hvordan du ...

- ... bruker matematiske modeller for å predikere utfallet av eksperimentelle undersøkelser.
- ... setter opp og bruker eksperimentelt utstyr.
- ... presenterer måleresultater i tabeller og diagrammer.
- ... analyserer og tolker måleresultater.
- ... estimerer nøyaktigheten i målte tallverdier.
- ... analyserer feilforplantning i matematiske modeller.
- ... skriftlig dokumenterer og rapporterer eksperimentelle resultater nøyaktig, tydelig og konsist.
- ... bruker datatekniske metoder i behandling, presentasjon og dokumentasjon av apparatur og eksperimentelle resultater.

1.3 Undervisningsform

Hver kursenhet er vanligvis lagt opp som eksperimenter og dataanalyse (datalaboratorier). Det er svært viktig at du tilegner deg det relevante stoffet som gjennomgås i dette heftet før du kommer til laboratoriet (se undervisningsplan på nettsiden til kurset).

Undervisning foregår i grupper på ca 12 studenter fordelt på 6 team (to i hvert team, i noen tilfeller tre). Hver gruppe har en egen laboratorielærer som følger gruppa hele semesteret. Slike smågrupper gir på en helt annen måte enn forelesningene en stor mulighet for egenaktivitet og tilbakekoblinger mellom lærer og student, og det fører til at læringsprosessen i

laboratoriet blir mer forpliktende enn i andre læringssituasjoner. Din arbeidsmåte i undervisningsperiodene må derfor, i tillegg til veiledet egenaktivitet, i stor grad preges av refleksjon og diskusjon. Din vekselvirkning med de sosiale omgivelsene i undervisningsperiodene avhenger av ditt bidrag og av det sosiale miljø i undervisningsgruppa. Gjensidig tillit i gruppa er en forutsetning for en åpen og konstruktiv dialog. For at dette skal skapes er det viktig at gruppa er veldefinert og stabil.

I dette heftet og ved muntlige introduksjoner presenteres matematiske modeller av betydning for arbeidet, målemetoder, samt nye metoder og verktøy for databehandling og dokumentasjon. Arbeidsmåten er diskusjoner (korte forelesninger) samt veiledet egenaktivitet og resultatoppfølging.

Det er avsatt fire timer til hver kursdag. Det er tid til pauser innenfor disse timene. Det er svært uheldig å komme til laboratoriet med den innstillingen at man skal jobbe fortest mulig for å bli tidligere ferdig. Det er ikke forenlig med gode eksperimentelle arbeidsvaner. Man skal heller ikke holde på mer enn fire timer. Man regulerer arbeidsmengden og grundigheten slik at man blir ferdig innenfor avsatt tid. Det er imidlertid viktig at en møter godt forberedt til undervisningen, for å kunne gjennomføre innen avsatt tid.

1.4 Skikk og bruk i undervisningslaboratoriet

Laboratoriet skal være en trivelig arbeidsplass hvor vi tar godt vare på hverandre og det utstyr som vi har til rådighet. Vi følger vanlige regler for skikk og bruk som for eksempel å sitte på stolen (ikke på bordet) og beholde føttene på gulvet (ikke på bordet). I tillegg til dette ber vi deg om å respektere noen få spesielle regler som også går på sikkerheten (dette delkapittelet gjelder også for alle laboratoriekurs):

- Ikke spis i laboratoriet.
- Heng yttertøyet i garderoben, og ikke legg det på laboratoriebordet.
- Pass deg for elektriske spenninger.
- Se opp for fareskilt.
- Plasser vesken eller sekken din på gulvet og helst i garderoben, ikke på arbeidsbordet.

Alle likespenninger over 60 V og alle vekselspenninger over 25 V skal ifølge Elektrisitetstilsynets forskrifter være isolerte. Dette er et pålegg som du må sørge for å oppfylle hver gang du kobler opp elektrisk utstyr. Det er ifølge dette for eksempel forbudt å bruke ledninger med bananplugg som kan krysskobles i pluggen når spenningene overskrider de nevnte grenser. Fareskilt som gjør deg oppmerksom på bruk av farlig utstyr eller farlige materialer (for eksempel mikrobølger, laserlys, radioaktive stoffer, gass under trykk) vil som regel bli satt opp når dette utstyr eller materialer er i bruk. En utførlig beskrivelse av sikkerheten i laboratoriet finnes i Laboratorie- og verkstedhåndboken, samt i sikkerhetsinstruksen som er oppslått på laboratoriet.

Instrumentene er ryggraden i laboratoriet. Verdien på de instrumentoppstillinger som du får anledning til å bruke varierer fra 10 000 til 100 000 kr, med en gjennomsnittspris på 50 000 kr. For at instrumentene skal bevare sin pålitelighet og presisjon må du behandle dem profesjonelt. Dette betyr:

- Vær rein på hendene.
- Ha på reine sko.
- Behandle elektriske kontakter forsiktig.
- Ikke brekk elektriske ledninger og kabler og ikke kveil dem tett sammen.
- Behandle alle justeringsskruer forsiktig.
- Unngå å sette riper i presisjonsoverflater.

Mange av instrumentene i laboratoriet er innstilt og oppjustert for å være best mulig tilpasset sin oppgave. Disse justeringene bør du ikke forstyrre. Vi ber deg spesielt om å la være å forandre oppjusteringen av Cavendish-apparaturen som brukes til måling av gravitasjonskonstanten. Oppsett av datamaskinene og -skjermene ber vi deg heller ikke endre.

Undervisningsperiodene er lange og fortsetter ofte til sent på dagen. Du må sørge for å ta godt vare på deg selv hvis du skal «holde koken» i gjennom hele perioden. Vær godt uthvilt den dagen du skal delta i laboratoriekurset og ta pauser i løpet av undervisningsperiodene. Et av de små laboratorierommene vil som regel være disponibelt som pauserom. Der kan du lage varm drikke og spise av matpakken om du vil. Bruk gjerne pausene til å arbeide med det sosiale forholdet i gruppa. Rolig og hyggelig atmosfære gir i det lange løp høyest effektivitet og størst utbytte av laboratoriearbeidet. Konsentrer alt utenomfaglig snakk til pausene. Hold mobiltelefonen avslått og bruk ikke datamaskinen til lesing av privat e-post eller surfing på nettet.

Forlat arbeidsplassen mer ryddig enn den var da du kom.

Kapittel 2

LABORATORIEJOURNALEN

2.1 Formålet med laboratoriejournalen

Alt laboratoriearbeid som utføres som en del av vitenskapelig eller industriell virksomhet er målrettet og blir utført i den hensikt å oppnå bestemte resultater, som senere skal rapporteres i en eller annen form. Det samme gjelder det arbeidet du utfører i undervisningslaboratoriet. For at denne rapporteringen skal være mest mulig pålitelig, må du dokumentere resultatene fortløpende. Dette gjør du ved å føre en journal over alle relevante opplysninger, mens du arbeider. Tas dette seriøst, blir det veldig lett å finne igjen resultater, samt lettere å planlegge forbedringer til neste forsøk.

Journalen er et kronologisk dokument som hovedsakelig inneholder faktiske opplysninger. Du må ikke forveksle den med en *rapport* fra laboratoriearbeidet, som er et ikke-kronologisk dokument. Opplysningene i journalen danner imidlertid grunnlaget for sammenfatning av resultatene i en rapport. I tillegg til faktiske opplysninger inneholder rapporten en bredere teoretisk fremstilling, referanser til tidligere beslektet arbeid og en evaluering/diskusjon av resultatene. Det er derfor en vesensforskjell på en journal og en rapport, selv om begge dokumenter tildels inneholder samme informasjon. De grunnleggende prinsippene for skriftlig rapportering gjennomgås senere i laboratoriekurset i kapittel 6.

2.2 Innholdet i en laboratoriejournal

Journalinnføringen for hver laboratorieøkt skal alltid begynne med en hovedoverskrift som inneholder informativ tittel på journalføringen, dato og navnet på den eller de personer som fører journalen. Like under overskriften skrives en kort formulering av målsetningen for dette laboratoriearbeidet. En laboratoriejournal blir mer oversiktlig og mer lettlest hvis du deler innføringene inn i bolker med overskrifter som indikerer hvilken informasjon bolken inneholder, for eksempel *Beskrivelse*, *Resultater*, *Feilanalyse*. Se kapittel 2.6 for en oppsummering av anbefalt struktur for journalføringen.

Innholdet i en laboratoriejournal kan i grove trekk kategoriseres som (1) lister, (2) tabeller,

(3) figurer, (4) kurvediagrammer, (5) numeriske beregninger og (6) kommentarer, beskrevet i det følgende:

(1) Lister

En liste er en systematisk vertikalt ordnet oppstilling av informasjon i form av tekst og tall. Eksempler på informasjon som er hensiktsmessig å listeføre i en journal er:

- Opplysninger om instrumenter og utstyr.

Disse kan inneholde opplysninger om fabrikat, type, måleområde, presisjon og faste innstillinger.

- Definisjoner av symboler og størrelser.

Disse kan inneholde definisjoner, eller henvisninger til definisjoner av symboler og størrelser, for eksempel hvis symbolene og størrelsene er definert i en figur. Sett fra starten av god plass for lister, og bygg listene ut etter hvert som du fører journalen.

(2) Tabeller

En tabell er en systematisk horisontalt og vertikalt ordnet oppstilling av informasjon i form av tall og tekst. Tabeller kan være formelle eller uformelle. Vi har valgt at alle tabeller skal være formelle av to grunner: For å lære hvordan man lager slike, og fordi journalen blir mer oversiktlig jo mer konsekvent man er. Eksempler på informasjon som er hensiktsmessig å tabulere i en journal er:

- Måleresultater.
- Resultater fra beregninger, inkludert mellomresultater.

Tabeller skal inneholde tabellnummer, en overskrift og tabelloversikt med kolonner og rader der det kun brukes horisontale linjer, ikke vertikale. Standardtabellen har én linje som sier at tabellen starter, én som sier at overskriftene er ferdige og at innholdet begynner, og én som markerer at tabellen er ferdig. Ved riktig bruk er tabeller et hensiktsmessig verktøy for systematisering og fremstilling av data. Et eksempel finnes i tabell 6.1 på side 57.

(3) Figurer

Gode figurer er et meget effektivt hjelpemiddel for å dokumentere arbeidet i laboratoriet. Du oppfordres derfor spesielt til å bruke figurer flittig i føring av journalen. Eksempel på informasjon som anbefales journalført vha. figurer er:

- Apparatuoppstillinger.
- Elektriske koblinger.

Alle figurer skal inneholde en figurtekst under figuren, med figurnummer og selvstendig beskrivelse av figur. Se kapittel 2.4 for mer informasjon, og se forøvrig figurene i dette heftet for eksempler.

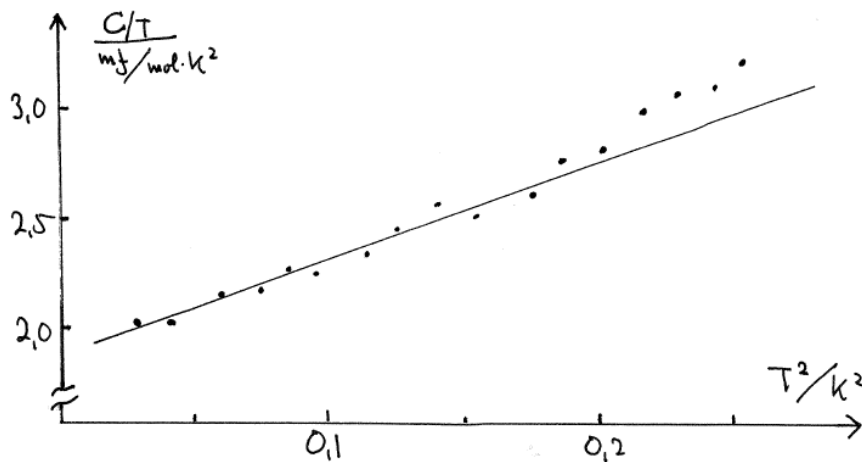
(4) Kurvediagrammer

Kurvediagrammer er en spesiell type figurer¹ som i et koordinatsystem fremstiller sammenhengen mellom variabler. Fremstilling av resultater i form av kurvediagrammer er nyttig når du ønsker å:

- Sammenligne to sett med verdier for eksempel målte og beregnede.
- Få oversikt over trender i resultatene.
- Identifisere inkonsistente måleresultater.

Under arbeidet i laboratoriet kan det dessuten ofte være hensiktsmessig å plotte måleresultater fortløpende sammen med beregnede resultater. Uventede trender, avvik fra beregninger og inkonsistente resultater kan da oppdages mens det ennå er anledning til å gjenta målingene, i den hensikt å avgjøre om avvikene skyldes feil i måleprosedyren eller en fysisk effekt.

Eksempel på et kurvediagram er vist i figur 2.1. Se forøvrig kapittel 2.4.



Figur 2.1: Et eksempel på et kurvediagram som illustrerer avvik fra linearitet. Kurven forestiller varmekapasitet C som for metaller ved svært lav temperatur forventes å variere som $C(T) = aT + bT^3$ med temperaturen T . For å gjøre sammenligningen mellom målingene og den forventede variasjonen lettere plottes C/T vs. T^2 som forventes å variere lineært ($C/T = a + bT^2$).

(5) Numeriske beregninger

Vha. numeriske beregninger kan du ut i fra matematiske modeller trekke konklusjoner om forventede verdier for måleresultater. For å kunne bedømme om et måleresultat er ventet eller uventet må du, før du begynner å måle, etablere en forventet verdi. For å kunne sammenligne måleresultater innbyrdes eller med beregnede verdier må du ha en idé om målefeilen. Grunnlaget for estimering av målefeil og analyse av feilforplantning blir gjennomgått i kapittel 4. Inntil da må du basere deg på sunn fornuft når du estimerer målefeil.

Under målingene bør du gjøre fortløpende beregninger for å kontrollere at resultatene er som forventet og gjenta målingene når resultatene er uventet. Her kan det være nyttig å bruke et regneark, der du fortløpende skriver inn data og får opp et kurveforløp.

¹Men det er fortsatt figurer! Følgelig skal samme figurnummerering som beskrevet i punkt (3) brukes også her.

Alle forberedende og fortløpende beregninger bør dokumenteres i journalen med å oppgi referanser til uttrykk og definere alle symboler som brukes. *Husk å ta med enheten* i tillegg til måltallet, og velg hensiktsmessige enhetsprefikser². Se kapittel 2.5 for flere detaljer og nyttige tips.

(6) Kommentarer

I tillegg til de nevnte elementene bør journalen inneholde fyldige kommentarer som knytter sammen de tidligere angitte enheter til en helhet. Herunder kan du også ta med dokumentasjon av spesielle observasjoner av betydning for laboratoriearbeidet og en tolking av resultatene. Særlig viktig er det at du beskriver den eksperimentelle gjennomføringen underveis (fremgangsmåte) og at du helt til slutt kommenterer resultatene med tanke på hva som var målsetningen (konklusjon).

2.3 Krav til utforming av laboratoriejournalen

Laboratoriejournalen skal være:

- Lett leselig.

Bruk godt leselig håndskrift. Det er spesielt viktig at du skriver godt leselige tall.

- Oversiktlig og klar.

Bidra til dette ved å:

- tabulere måleresultater,
- tegne enkle figurer og diagrammer med hensiktsmessige variable og akseinnndelinger,
- avsette god plass mellom forskjellige emner,
- ikke skrive oppi det som du har skrevet før,
- bruke klart, entydig og enkelt språk.

- Pålitelig.

Du fremmer pålitelighet ved å:

- skrive nøyaktig det du gjør, selv om det ikke skulle stå i laboratorieheftet,
- skrive fortløpende alle kommentarer og resultater direkte i journalen uten å bruke løse ark med henblikk på senere innføring,
- bygge opplysningene på direkte observasjoner i laboratoriet – for eksempel bør instrumentlistene dine være en fortegnelse over instrumentene du finner i laboratoriet og ikke bygge på de opplysningene som en kan finne om instrumentene i laboratorieheftet,

²De mest vanlige prefikser: T = tera = 10^{12} ; G = giga = 10^9 ; M = mega = 10^6 ; k = kilo = 10^3 ; c = centi = 10^{-2} ; m = milli = 10^{-3} ; μ = mikro = 10^{-6} ; n = nano = 10^{-9} ; p = piko = 10^{-12} . Merk at prefiksene skrives med opprettet type (ikke *kursiv*).

- kontrollere avlesning av instrumenter etter at resultatet er ført i journalen – bruk for eksempel følgende prosedyre: les av – noter – les av igjen og kontroller,
- skrive alle målte tallverdier inn i journalen nøyaktig slik som de ble lest av måleinstrumentet (ikke rund av) og presiser enheten,
- utføre alle omregninger eksplisitt i journalen med eksplisitt angivelse og forklaring av omregningsfaktorer,
- gjøre alle beregninger, tabeller, diagrammer og skisser med tilhørende forklaringstekster ferdige i journalen.

«Kosmetiske» forandringer hører ikke hjemme i en journal! Hvis du har skrevet feil i journalen, skal du kun trekke en enkelt strek over feilen og skrive teksten på nytt på riktig måte. Unngå å bruke korrekturlakk. Det du på et visst tidspunkt tror er feil, kan senere vise seg å være riktig. Korreksjoner som fører til at det korrigerte blir uleselig kan da føre til at du mister viktige opplysninger.

Du skal føre journalen med penn, med unntak av diagrammer som bør tegnes med blyant. Erfaring tilsier at du her må viske ut en del, for eksempel når det viser seg at du har valgt feil skala på en akse. Dette er et unntak fra regelen om ikke å utføre «kosmetiske» forandringer.

Journalen skal du føre i en innbundet protokoll i A4-størrelse. Merk helst forsiden med (i) navn, (ii) gruppenummer, (iii) kursbetegnelse, (iv) semester og (v) år, i alle fall med (i) og (ii).

For å holde oversikt over laboratoriejournalens innhold og muliggjøre kryssreferanser, skal du nummerere sidene i journalen fortløpende. Reserver omtrent de første seks sidene i journalen for en innholdsfortegnelse over oppgavene, som du bygger ut etter hvert som du fører journalen.

Alle kurvediagrammer og figurer som fremstilles på data skal skrives ut for å inkluderes i journalen. Alle løse ark skal renskjæres rektangulært og limes inn i journalen.

2.4 Grafiske fremstillinger

I naturvitenskapelige og tekniske dokumenter er grafiske fremstillinger i form av formelle tabeller, diagrammer, figurer og frittstående matematiske uttrykk ofte viktigere som informasjonsbærere enn selve teksten. Disse elementene bør derfor utformes som mest mulig selvstendige enheter.

Det lønner seg allerede på journalstadiet i dokumentasjon av et arbeide å fremstille slike grafiske fremstillinger som selvstendige enheter. Dette rasjonaliserer journalføringen og forbereder videre tilrettelegging av de grafiske fremstillingene i en eventuell senere rapport. Derfor inkluderes det her en kort presentasjon av retningslinjer for grafiske fremstillinger. En mer fyldig innføring i bruk av grafiske fremstillinger i rapporter finnes i kapittel 6.3.3.

Identifikasjonsnummer

Tabeller, figurer og frittstående matematiske uttrykk tilordnes et eget identifikasjonsnummer som det kan refereres til i teksten. Hver av disse identifiseres med separate nummerfølger, som tabell 1, tabell 2, ..., (1), (2), ... (for ligninger), og figur 1, figur 2, ...

Forklarende tekster

Tabeller og figurer tildeles også forklarende tekster. Disse forklarer fremstillingens innhold og symbolbruk og gir henvisninger til det kildemateriale som fremstillingene bygger på. For eksempel bør det i teksten til et kurvediagram som regel gis en referanse til en tabell over tallmaterialet som diagrammet bygger på. Forklaringsteksten for tabeller plasseres over tabellen mens forklaringsteksten for diagrammer og figurer plasseres under diagrammet eller figuren.

De fleste større forlag, forvaltningsenheter og industribedrifter utarbeider egne detaljerte standarder for hvordan grafiske elementer skal settes opp i egne dokumenter. I tråd med dette skal du følge en bestemt standard når du setter opp tabeller og figurer i journaler og rapporter i forbindelse med arbeidet under laboratoriekursene. Til dette formål har vi valgt å følge standarden for grafiske fremstillinger til forlaget The Institute of Physics Publishing (IOPP). Standarden er i sin helhet tilgjengelig på <http://iop.org/Journals/textstyle>. I kapittel 6 kommer vi tilbake til denne problemstillingen i sin helhet. Alle grafiske fremstillinger i dette heftet er satt opp ifølge denne standarden.

2.5 Numeriske beregninger

Den teoretiske beskrivelse av fysikken er stort sett formulert matematisk slik at konkrete fysiske tilstander kan beskrives i form av tallverdier. Numeriske beregninger er derfor den viktigste prosedyre du har for å trekke konklusjoner om konkrete fysiske tilstander fra teoretiske modeller. Eksperimentelle undersøkelser av konkrete fysiske tilstander består stort sett i å måle disse tallverdier direkte eller indirekte. Numeriske beregninger spiller derfor en sentral rolle i å frembringe og sammenligne eksperimentelle og teoretiske resultater.

2.5.1 Planlegging av numeriske beregninger

Du bør foreta numeriske beregninger slik at mulige beregningsfeil minimaliseres. Et middel til å oppnå dette er å presentere beregninger og resultater systematisk ved å sette opp beregningsprosedyren i tabellform med loddrette kolonner. Videre reduseres antall numeriske regneoperasjoner ved å regne algebraisk så langt som mulig før du går over til numeriske beregninger. Og sist men ikke minst: legg inn kontrollrutiner.

La oss se litt nærmere på gode kontrollrutiner:

- Dimensjonsanalyse.

Kontroller at det er samsvar mellom dimensjonene til alle ledd i hvert algebraisk uttrykk og at sluttsvaret gjengis med riktig dimensjon. For eksempel bør du med en gang se feilen i uttrykket $\ell + \ell^2$ hvor ℓ er en lengde. Likeledes bør du være klar over at en størrelse x må være ubenevnt i alle uttrykk som kan utvikles i potensrekker av x . Dette blir innlysende hvis du betrakter for eksempel utvikling av funksjonene $\exp x \approx 1 + x + x^2/2 + \dots$ og $\sin x \approx x - x^3/6 + \dots$. Med andre ord må du alltid(!) ha dimensjonsløs størrelse x i $\exp x$, $\sin x$, $\tan x$, $\ln x$ og så videre. Radianer er en dimensjonsløs størrelse.

- Grensetilfeller.

Kontroller at algebraiske uttrykk for fysiske størrelser reduseres til korrekt form i spesielle enkle (grense)tilfeller. De bør variere på fysikalsk riktig måte og ha riktig symmetri.

- Uregelmessigheter.

Se etter uregelmessigheter i utviklingen av beregningene. I beregningstabeller kommer uregelmessigheter tydeligst frem i differansen mellom kolonneverdier. Uregelmessigheter kommer også tydelig frem i diagrammatisk fremstilling av resultater når den forventede hovedvariasjonen i resultatene er trukket ut av datamaterialet. Egne sjekk-kolonner med differanse mellom kolonneverdier eller plotting av differansen mellom for eksempel beregnet og målt verdi kan derfor brukes for å se etter uregelmessigheter.

- Størrelsesorden, prefikser.

Kontroller at de beregnede tallverdier er av riktig størrelsesorden. Du kan i mange tilfeller komme langt med enkel hoderegning! Velg hensiktsmessige enhetsprefikser for de enkelte tallverdier. Det beste er å velge enhetsprefiksene slik at måltallet får en størrelse mellom 0,1 og 1000. For eksempel angi 10 mm og ikke 0,010 m. Husk å ta med enheten i tillegg til måltallet!

Kontroll av en beregning ved å gjenta beregningen med samme prosedyre gir vanligvis samme feil. Beregningsprosedyren bør derfor varieres når en beregning sjekkes ved gjentagelse.

2.5.2 Målefeil og signifikante sifre

En viktig avgjørelse du tar angående presentasjon av de enkelte tallverdier er bestemmelse av antall signifikante sifre. I laboratoriesammenheng bør antall signifikante sifre som tas med i sluttsvaret stå i rimelig forhold til den presisjonen som kan oppnås eksperimentelt. Som hovedregel skal du ikke gi inntrykk av at resultatet er mer presist enn det faktisk er. Det finnes også *beregningsmessige forhold* som du bør være oppmerksom på. De viktigste av disse er illustrert i følgende eksempler. En mer detaljert presentasjon av signifikante sifre og feilregning finner du i kapittel 4.

Eksempel 1. Avrundingsfeil.

I en beregning avrundes tallverdiene til et antall sifre som står i stil med målenøyaktighet og nøyaktighet i oppgitte data. Hvis for eksempel størrelsene $x = 1,7305$ og $y = 7,3625$ skal avrundes til fire signifikante sifre, blir disse henholdsvis 1,731 og 7,363. Etter denne avrundingen er presisjonen i angivelsen av det minste tallet ca. $5 \cdot 10^{-4}$, det vil si 0,05%. Summen $x + y$ er lik 9,093 når den angis med fire signifikante sifre, mens summen av de avrundede tallverdiene blir 9,094. For å unngå at beregningsfeil bidrar til feil i fysiske størrelser under

beregning er det vanlig å inkludere *ett eller to ekstra siffer* under beregningsprosessen. De ekstra sifrene blir så strøket i resultatet. I klartekst skal man altså i dette eksemplet summere $1,7305 + 7,3625$ og ikke $1,731 + 7,363$.

Eksempel 2. Antall signifikante sifre i avledede tall.

Tallet $x = 1,32 \cdot 10^{-2} = 0,0132$ har tre signifikante sifre. Det avledete tallet $y = \exp x = 1,0133$ er her angitt med fem signifikante sifre for å gi omtrent samme nøyaktighet. Med kun tre sifre: 1,01 er angivelsen unødvendig unøyaktig. Man skjønner kanskje dette lettere ved å se på rekkeutviklingen $\exp x = 1 + x + x^2/2 \dots$. Konklusjonen er at antall gjeldende sifre i et tall x og et avledet tall $y(x)$ behøver ikke å være det samme.

Eksempel 3. Antall signifikante sifre rundt $1 \cdot 10^n$.

Tallverdier som ligger like over $1 \cdot 10^n$ (n er et vilkårlig heltall) bør angis med ett siffer mer enn tall like under. Dette innses ved å sammenlikne 9,95 og 10,1. Tallene er omtrent like store og har tre signifikante sifre, men 9,95 har nøyaktighet på $\pm 0,005$ mens 10,1 har nøyaktighet på $\pm 0,05$. Sistnevnte bør angis med fire sifre, for eksempel 10,06, altså med like mange sifre etter komma som 9,95.

Eksempel 4. Kumulative feil

Tallene $x = 1,731$ og $y = 1,735$ har begge fire signifikante sifre. Differansen $y - x = 0,004$ har kun ett signifikant siffer som her tilsvarer at en beregningsfeil på $\pm 25\%$ blir innført i beregningen ved å gjennomføre den med kun fire signifikante sifre i x og y . Gjentatte regneoperasjoner av denne typen kan føre til helt meningsløse svar. For å unngå dette bør en her ta med flere signifikante sifre i x og y , hvis dette er mulig. Konklusjon: Du bør være på vakt mot det tap av presisjon som er uunngåelig når to omtrent like tall trekkes fra hverandre!

2.5.3 Manuell tallbehandling

Med manuell tallbehandling forstås beregninger utført med «papir og penn», eventuelt ved hjelp av en kalkulator. Manuelle beregningsmåter brukes for enkle beregninger. Siden beregningene er enkle, dokumenteres mellomregningen ikke og må gjentas hvis beregningen må sjekkes. Som antydnet i Eksempel 3 over bør beregninger gjennomføres med ett eller to sifre utover det presisjonen i angivelsen av tallverdiene tilsier (i målte tallverdier begrenses presisjonen i angivelsen av tallverdier av presisjonen i målingen) for å unngå at avrundingsfeil i beregningene reduserer presisjonen. Du fremmer klarhet ved å sette to streker under et slutt svar og eventuelt en strek under et viktig mellom svar.

2.5.4 Tallbehandling med datamaskin

I laboratoriekurset har du i de fleste arbeidsøktene tilgang til en datamaskin med det numeriske beregningsprogrammet Python. I første omgang skal du lære å bruke programmet for å løse enkle beregningsoppgaver, og videre skal vi fokusere på å bruke det til å behandle måledata og presentere resultatet som grafer.

2.6 Oppsummering

Hvordan skrive en journal (eventuelt strukturere arbeidsnotatene dine):

1. Tittel, dato, navn på personene som utfører eksperimentet.
2. Hensikten med eksperimentet.
(Du bør kommentere dette på slutten av føringen)
3. Liste over brukt apparatur.
(Ta med produsent, id-nummer, usikkerhet, etc., ikke ta med penn, blyant, datamaskin, etc.)
4. Skisse av instrumentoppsettet.
5. Beskrivelse.
(Det du faktisk *gjør*, ikke det heftet sier at du skal gjøre)
6. Resultater.
(Samling av målinger i tabeller og figurer, små utregninger)
7. Analyse/diskusjon.
(Usikkerhetsberegninger)
8. Diskusjon/konklusjon.
(Feilkilder, forbedringer)

Husk å skrive ting ned mens de skjer, ikke anta at du kommer til å huske alt et par timer senere eller når du kommer hjem.

Generelle ting å huske på:

- Ta alltid med enheter.
- Bruk penn til tekst og blyant til figurer.
- Stryk over hvis du skriver feil feil.
- Enslige målinger kan skrives under punkt 5, for eksempel, "Først veide vi ting 1, $m_1 = 0,532$ g, som ..."
- Bruk formelle tabeller (ingen vertikale linjer).
- Hold det pent og ryddig slik at du kan finne det du leter etter senere (men ikke sløs med papir).

Kapittel 3

LINEÆR BEVEGELSE

Mål: Hensikten med oppgaven er å måle fysiske størrelser knyttet til et mekanisk system og deretter sammenligne disse med teoretiske verdier. De teoretiske størrelsene følger fra newtonsk mekanikk, og målingene gjøres ved hjelp av et dataloggingsutstyr med sensorer for kraft og posisjon. De målte størrelsene blir videre bearbeidet i regneark. Hensikten er også å gi en bedre forståelse av størrelsene posisjon, fart, akselerasjon og kinetisk og potensiell energi.

3.1 Teori

3.1.1 Det mekaniske systemet

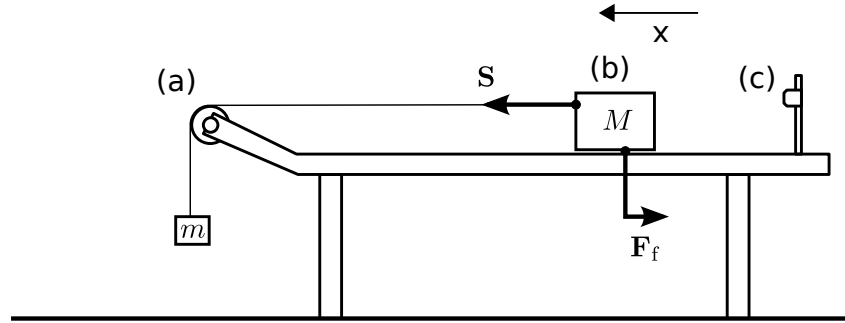
Det mekaniske systemet som skal undersøkes er vist i figur 3.1. Det består av en vogn med masse M og et fallende legeme med masse m .¹ Disse er forbundet med en snor som ruller på en trinse. Du skal i denne oppgaven undersøke posisjon, fart og akselerasjon til vognen med masse M og se på friksjonen mellom vognen og underlaget. Dere skal også undersøke systemets mekaniske energi.

3.1.2 Bevegelsen til M etter at den lille massen har nådd gulvet

Bevegelsen kan deles i to tidsintervaller, før og etter at den lille massen treffer gulvet. Etter at den lille massen har truffet gulvet, skyldes nettokraften på den store massen kun friksjon.² (Normalkraften og tyngden opphever hverandre.) Dynamikkbanen er ikke helt friksjonsfri, slik at etter at den lille massen treffer gulvet, vil bevegelsen bremses litt opp. I dette ekspe-

¹På laboratoriet er det to forskjellige oppsett av dette systemet. Det ene oppsettet er en luftputevogn som glir på en luftputebane, mens det andre oppsettet er en vogn som ruller på en rullebane. Teorien for begge oppsettene er den samme.

²Her og i resten av eksperimentet antar vi at massen til snoren kan neglisjeres.



Figur 3.1: Figur av apparatoppsettet. Masse m er forbundet med snor rundt trinse (a) til masse M . På masse M er det festet en kraftmåler (b) som måler snordraget på masse M . Bevegelsen til masse M registreres med avstandsmåleren (c).

rimentet antar vi at friksjonskraften F_f er proporsjonal med normalkraften N på legemet,³ som i dette tilfellet er tyngden Mg av legemet,

$$F_f = \mu N = \mu Mg, \quad (3-1)$$

der μ er den kinetiske friksjonskoeffisienten. Ved hjelp av Newtons 2. lov får vi for denne delen av bevegelsen

$$-\mu Mg = Ma_2 \quad \text{som gir} \quad a_2 = -\mu g, \quad \text{eller} \quad \mu = -a_2/g. \quad (3-2)$$

Akselerasjonen a_2 regnes med fortegn. Den er konstant i tid, og dette forteller oss at bevegelsen blir jevnt retardert.

3.1.3 Bevegelsen før den lille massen har nådd gulvet

Vi vil først bestemme snordraget S og akselerasjonen a_1 til systemet for den første delen av bevegelsen. Bruker vi Newtons 2. lov på hele systemet, m og M , vil snordraget bli en indre kraft (motsatte og like store på de to massene) og falle bort. De ytre kreftene er tyngden til det lille loddet og friksjonen,

$$mg - \mu Mg = (m + M)a_1, \quad (3-3)$$

som gir akselerasjonen a_1 i første del av bevegelsen,

$$a_1 = g \frac{m - \mu M}{m + M} = g \frac{m/M - \mu}{1 + m/M}. \quad (3-4)$$

Snordraget S kan finnes ved å bruke Newtons 2. lov på M ,

$$S - \mu Mg = Ma_1, \quad (3-5)$$

³Denne antagelsen er god når det gjelder glidefriksjon. I praksis vil også rullefriksjon og luftmotstand bidra til F_f . Disse formene for friksjon har en mer komplisert form enn ligning (3-1), og vil avhenge av flere størrelser (for eksempel er luftmotstanden avhengig av hastigheten v). Her vil vi for enkelhets skyld anta at all friksjon kan modelleres som glidefriksjon.

som gir snordraget

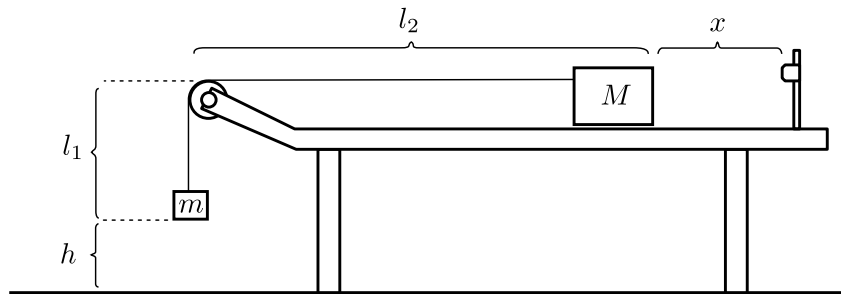
$$S = M(a_1 + \mu g) = mg \frac{1 + \mu}{1 + m/M}. \quad (3-6)$$

Merk at snordraget, som måles av kraftmåleren, ikke er lik tyngden til det fallende legemet. Massen til vogna M inkluderer kraftmåleren, og begge massene M og m finnes ved veiing.

3.1.4 Energibevarelse

Når det ikke er friksjon, vil den mekaniske energien til systemet være bevart i tid. I vårt tilfelle er den mekaniske energien til det samlede systemet før m når gulvet lik

$$E = \frac{1}{2}(M + m)v^2 + mgh. \quad (3-7)$$



Figur 3.2: Skisse av systemet og dynamikkbanen med definisjon av størrelsene h , l_1 , l_2 og x .

Avstanden mellom fartsmåleren og trinsa, og likeledes avstanden mellom trinsa og gulvet, er fast og sammen utgjør disse strekningene en lengde kalt L .

$$(h + l_1) + (x + l_2) = L, \quad (3-8)$$

der l_1 er den vertikale delen av tråden pluss tykkelsen av m , og l_2 er den horisontale delen av tråden pluss tykkelsen av M . Summen av disse kaller vi l , og dette er en konstant lengde helt til m treffer gulvet. Dermed er

$$h + l + x = L \quad \text{eller} \quad h = L - l - x, \quad (3-9)$$

slik at samlet energi uttrykt ved de målte størrelsene v og x blir:

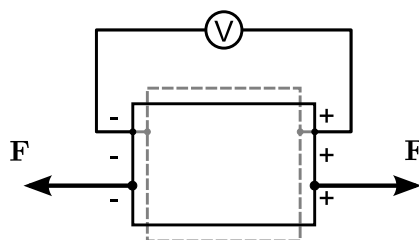
$$E = \frac{1}{2}(M + m)v^2 + mg(L - l - x) = \frac{1}{2}(M + m)v^2 - mgx + mg(L - l). \quad (3-10)$$

Størrelsen $L - l$ er konstant, og siden potensiell energi kan regnes relativt en hvilken som helst høyde, trenger vi ikke å ta med det siste leddet i beregningen.

3.2 Litt om målesensorene

3.2.1 Virkemåten til kraftmåleren

Når en piezoelektrisk krystall utsettes for mekanisk spenning, endres overflateladningen på krystallen, som vist i figur 3.3. Overflateladningene er årsak til en elektrisk potensialforskjell over krystallen, og denne viser seg å være proporsjonal med kraften. Systemet kan kalibreres, slik at den målte spenningen som skyldes kraftpåvirkningen kan omsettes til en kraft.



Figur 3.3: Prinsippskisse for en piezoelektrisk krystall. Stiplet figur viser formen på krystallen før krefter påføres, mens formen under kraftpåvirkning er angitt med heltrukken linje. Under kraftpåvirkning vil overflateladning på krystallen endres, som antydnet på figuren, og den resulterende spenningsforskjellen kan måles.

3.2.2 Virkemåten til posisjonsmåleren

Posisjonsdetektoren i Pasco-loggesystemet inneholder en lydkilde som sender ut kortvarige lyder (ultral lyd) med jevne mellomrom. En bruker det omvendte prinsippet av det som er antydnet for kraftmåleren; en tilført spenning over krystallen skaper deformasjoner, som i sin tur forårsaker lydbølger. I tillegg inneholder posisjonsdetektoren en lydmåler. Posisjonen til objektet, relativt ekkoloddet, er målt tidsforskjell mellom utsendt og reflektert lydimpuls, multiplisert med lydhastigheten og dividert med en faktor to, siden lyden tilbakelegger den dobbelte strekningen. Posisjonsmåleren er altså i prinsippet et ekkolodd. Ekkoloddet, eller posisjonsdetektoren, står i forbindelse med en datalogger, slik at sammenhørende tider for lydutsendelse og posisjon til objektet blir lagret i en datafil som vist i tabell 3.1.

Inversverdien til tiden $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ mellom to periodiske lydsignaler, eller antallet ganger det sendes ut lyd i sekundet, kalles loggfrekvensen, $f = 1/\Delta t$. Denne, i tillegg til det totale antallet målinger n en ønsker å gjøre, også kalt loggeperioden, bestemmes av brukeren.

3.2.3 Derivasjon av diskret målte størrelser

Størrelser som er målt slik som beskrevet ovenfor og vist i tabell 3.1 sier vi er målt ved diskrete tidspunkt. Størrelser som teoretisk kan avledes av disse ved bruk av infinitesimale

Tabell 3.1: En skjematisk datafil for posisjonsmålinger.

Måling nr. i	Tidspunkt for måling, t_i	Posisjon ved måling, x_i
1	t_1	x_1
2	t_2	x_2
\vdots	\vdots	\vdots
i	t_i	x_i
\vdots	\vdots	\vdots
n	t_n	x_n

differanser, det vil si derivasjon eller integrasjon, vil nå måtte beregnes ved bruk av endelige differanser.

For eksempel vil hastigheten v som er den tidsderivate av posisjonen x beregnes som følger,

$$v = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (3-11)$$

der Δx er tilbakelagt strekning i tidsrommet Δt . Utregningen gjøres for alle posisjoner x_i som er logget. For å få symmetri om tidspunktet t_i , der i er loggeindeksen, kan følgende størrelse brukes,

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}. \quad (3-12)$$

For akselerasjonen har en et tilsvarende uttrykk gitt ved hastigheten.

3.3 Litt om Pasco dataloggingssystem

Alle fysiske størrelser kan måles, og det fins mange forskjellige instrumenter for å gjøre dette. I et instrument blir ofte den fysiske størrelsen, for eksempel en kraft, omsatt til et elektrisk signal som avleses. Det er da viktig at det er en lineær sammenheng mellom størrelsen (kraften) en skal måle og avlest elektrisk signal (spenningen) og at instrumentet er kalibrert. Kalibrering av et instrument vil si at en utsetter instrumentet for kjent størrelse, for eksempel kraften 1 N, og fastslår den tilhørende styrken på det elektriske signalet.

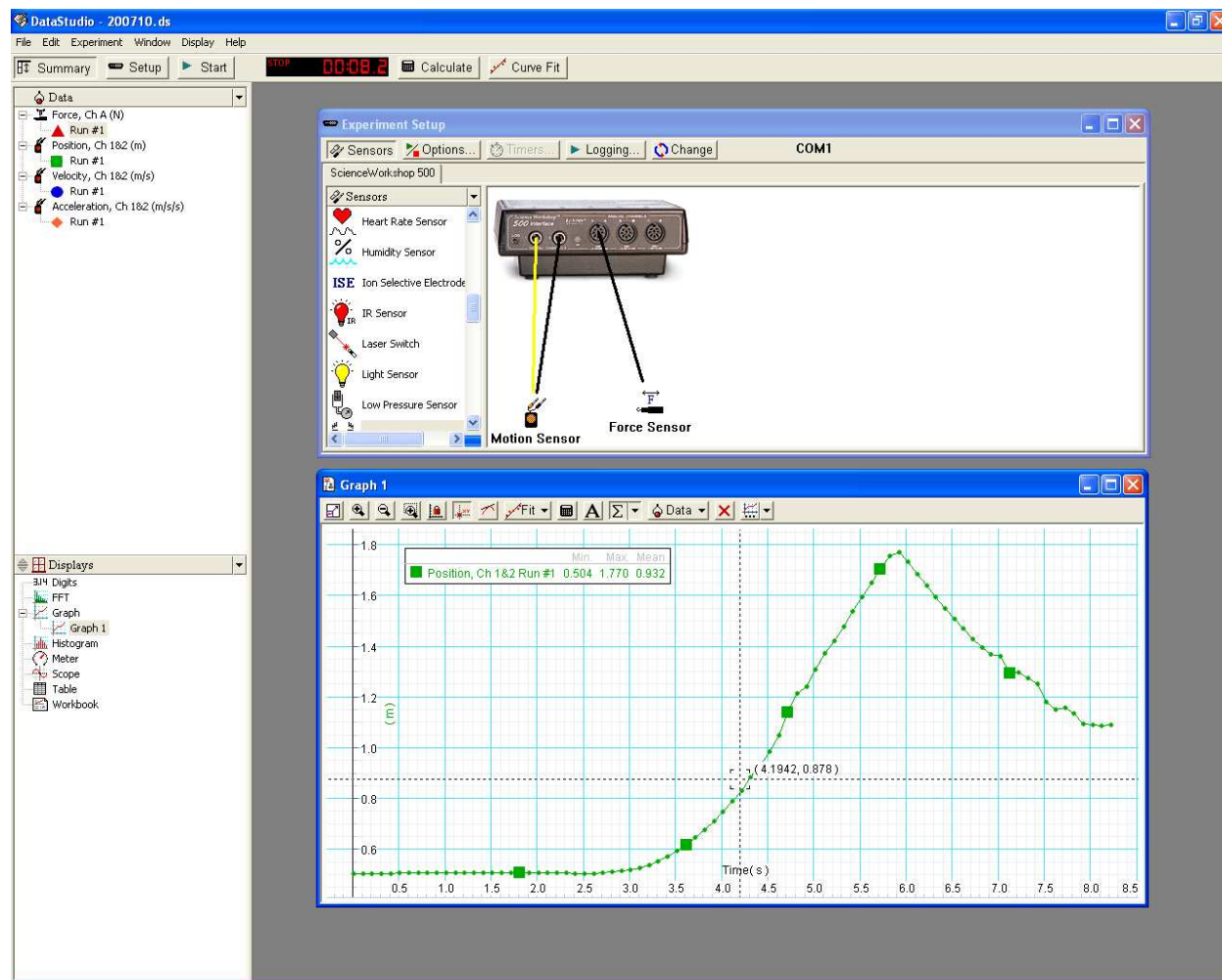
I et dataloggingssystem er avlesningen av instrumentet automatisert, slik at avlesningen fremkommer som et tall, og at dette skjer med jevne mellomrom. Instrumentene for måling av forskjellige fysiske størrelser kalles ofte sensorer av ulike slag; for eksempel kraftsensor, temperatursensor, og så videre.

Når du skal måle forskjellige fysiske størrelser ved hjelp av Pasco dataloggingsutstyret, går du frem som følger:

1. Start DataStudio og velg «Create new experiment»

Du får frem et skjermbilde som vist i figur 3.4.

- **Experiment Setup:** Her styrer/kontrollerer du dataloggeren. Til venstre i dette vinduet er det en alfabetisk liste med ulike typer sensorer som kan legges til.
- **Data:** Her vises de ulike størrelsene som kan måles (alt etter hvilke sensorer som er lagt til), og de måledata som hittil er samlet inn.
- **Displays:** Her vises ikoner for ulike måter å presentere data. Når et sett med måledata blir fremvist ved hjelp av denne menyen, vil det dukke opp i skjermen, for eksempel som en graf, slik som vist i figur 3.4.



Figur 3.4: Skjerm bilde av Pasco dataloggingsystem.

2. Velg målesensorer

Sensorene for måling av ulike størrelser ligger listet alfabetisk i vinduet til venstre i *Experimental Setup*-vinduet og har illustrative symboler. Programvaren til Pasco virker etter «dra-og-slipp»-prinsippet. Du kan også **dobbelklikke på symbolene** for å aktivere sensorene, og koblingene til dataloggeren vil vises. Hvis det ikke allerede er koblet opp, kobles ledningene fra sensorene til dataloggeren (fysisk) slik at det stemmer med bildet i *Experimental Setup*-vinduet.

3. Velg målefrekvens

Dobbelklikk på en sensor i *Experimental Setup*-vinduet. Du får frem en side der du kan

kontrollere loggefrekvensen.

4. Start målingene

Trykk **start** og målingene starter. Trykk **stopp** når du er ferdig. Du kan også starte og stoppe målingene automatisk. Dette gjøres fra menylinjen, ved bruk av: *Experiment/ Set Sampling Options*. Hver gang du trykker start kommer det frem en ny måleserie i Data-vinduet (Run 1, Run 2 og så videre) for hver sensor. Disse kan slettes dersom du ønsker å fjerne en måleserie. Dersom du ønsker å fjerne en måleserie, kan du også gjøre dette fra menylinjen: *Experiment/ Delete All Data Runs*.

5. Velg fremvisning av data (displays)

En kan velge ulike måter for fremvisning av målte data:

- Dobbeltklikk på symbolet i *displays*-vinduet (for eksempel en graf).
- Dra datasymbolet fra *data*-vinduet og ned på et symbol i *displays*-vinduet (for eksempel graph).
- Dra et display-symbol inn i *setup*-vinduet.

3.4 Eksperimentelt

3.4.1 Oppsett av DataStudio

Du skal nå sette opp dataloggingssystemet, slik at du får logget målingene fra de to sensorene i forsøket, kraftmåleren og ekkoloddet. Se kapittel 3.3 for nærmere detaljer.

- Kople til «Force Sensor» og «Motion Sensor».
- Dobbeltklikk på bevegelsessensoren (Motion Sensor). Velg for eksempel en loggefrekvens på 10 eller 20 Hz.
- Dobbeltklikk på kraftsensoren. Velg samme loggefrekvens.
- Pass på at automatisk start/stopp er avslått.
- Husk å lagre det du gjør i tilfelle du skulle få bruk for det eller må gjenopprette senere. Alt du gjør elektronisk i laboratoriekurset skal lagres på hjemmeområdet ditt og ikke på maskinen på laboratoriet. For å få tilgang til hjemmeområdet ditt fra maskinen du sitter på må du først koble opp hjemmeområdet ditt. Det gjør du ved å gå på 'Min datamaskin'. Der velger du 'Tools/Map network drive'. Velg en plassering, og skriv inn '\\sambaad.stud.ntnu.no\brukernavn'. Deretter passord i neste vindu. Du vil nå kunne velge hjemmeområdet ditt når arbeidet skal lagres. (Dette bør du også gjøre på din egen PC/Mac. Det er tryggere å lagre data på hjemmeområdet enn på din bærbare maskin.

3.4.2 Kontroll av ekkolodd

Ekkoloddet måler posisjonen til vognen med masse M . Du skal nå undersøke ekkoloddet.

- Gjør en måling av posisjonen til vognen, mens vognen holdes i samme posisjon. Sjekk at resultatet som dataloggingssystemet gir, stemmer sånn noenlunde med avstanden fra sensoren. Denne kan dere måle med målebåndet ved rullebanen/luftputebanen. Noter ned differansen mellom det ekkoloddet viser og avstanden gitt ved målebåndet. Du vil få bruk for dette senere.
- Gjennomfør en måling av posisjonen til vognen der vognen først holdes i ro ved 50,0 cm, og deretter flyttes til 150,0 cm og holdes i ro der (bruk målebåndet til å avlese posisjonen). Avstanden mellom disse to posisjonene er 100,0 cm. Sjekk at dataloggingssystemet gir det samme. (Merk at selve posisjonsverdien kan være annerledes i dataloggingssystemet avhengig av hvor ekkoloddet er plassert i forhold til nullpunkt på målebåndet, men differansen mellom posisjonene skal være den samme, dersom ekkoloddet er riktig kalibrert.). Dersom avstanden mellom posisjonene funnet med dataloggeren avviker fra posisjonen funnet med målebåndet, kan det hende at ekkoloddet ikke er nøyaktig kalibrert.⁴ Ta kontakt med laboratorieveileder.
- Les av posisjonen som vognen M har idet masse m treffer gulvet.

3.4.3 Kontroll av kraftmåler

Kraftmåleren i forsøket er festet til vognen og måler snordraget som snoren utfører på vognen. Merk at kraftmåleren måler positive verdier når den blir presset inn, mens verdien er negativ under strekk. Vi skal nå undersøke at denne gir riktige verdier ved å teste mot en kjent kraft.

- Vei kontrolloddet med vekten. Som kontrollodd kan du bruke det lille loddet med masse m .
- Ta kraftsensoren av vognen.
- Nullstill kraftføleren ved å trykke «Tare» når det ikke er noe belastning (hold knappen inne mer enn 2 s).
- Heng kontrolloddet opp etter kraftmåleren, og logg resultatene fra kraftmåleren med dataloggingssystemet.
- Sjekk at resultatene stemmer overens med det du ville forventet utfra $F = mg$, for kontrolloddet.

⁴Ekkoloddet regner ut avstanden ved bruk av en innlagt verdi for lydhastigheten. Lydhastighet i lufta varierer med temperaturen. For eksempel er lydhastigheten ved 20°C 343,2 m/s, mens den ved 25°C er 346,1 m/s.

3.4.4 Gjennomføring av målingene

Vi skal nå gjennomføre selve målingene av posisjonen til vognen og kraften fra snoren på vognen, når systemet starter fra utgangsposisjonen.

- Sett kraftsensoren tilbake på vognen.
- Mål massen til vognen med kraftsensor M og massen til det fallende legemet m .
- Fest snoren som masse m henger i, på kraftsensoren.
- Sjekk at vognen vil stoppe og sprette tilbake fra bremsen (elastisk strikk for luftputebane eller magnetisk brems for rullebane).
- Forbered forsøket ved at dere tenker gjennom hvordan dere skal gjennomføre det. Her kan dere velge å la en person starte/stoppe målingene i DataStudio mens den andre slipper vognen. Eventuelt kan dere bruke betinget start og stopp i DataStudio. En kan da starte ved posisjon for eksempel 0,60 m (rise above) og stoppe etter for eksempel 5 s. Målingene vil da starte automatisk når avstanden mellom målesensor og vognen øker forbi 60 cm, og stoppe automatisk etter 5 s, og begge er da frigjort til å gjøre arbeidsoppgaver ved forsøksoppsettet.
- Nullstill kraftføleren ved å trykke «Tare» når det ikke er noe belastning (hold knappen inne mer enn 2 s).
- Pass på at det er ikke er strekk i ledningen til kraftsensoren, mens dere nå skal utføre målingene (det vil gi en ekstra kraft på vognen M som vi ikke har tatt hensyn til i teorien). Dette kan gjøres ved at en av dere holder ledningen i slakk vinkelrett ut fra vognen mens målingene utføres.
- Slå på luftputebanen (for de som har det), og flytt vognen til den posisjonen vognen skal slippes ifra. Noter ned denne posisjonen.
- Gjennomfør en måleserie (trykk på START), og slipp vognen. Logging av måleresultatene starter og stopper automatisk (se punkt over).
- Fremstill målinger av *kraft*, *posisjon*, *fart* og *akselerasjon* i samme diagram (*merk og dra*). Juster grafene slik at de har felles origo for x -aksene (tiden).
- Observer grafene og sjekk at du har fått gode målinger. Hvis ikke, lag ny måleserie (slett den gamle, *delete last run*). Lag en utskrift av grafene. Kommenter måleresultatene. Kan dere identifisere når masse m treffer gulvet på grafene?

3.4.5 Dataanalyse

- Anta at energien er bevart og finn maksimalhastigheten som vognen M kan oppnå. Hvordan stemmer dette med resultatene?

- Undersøk om det er friksjon mellom vognen og underlaget ved å bestemme friksjonskoeffisienten, se kapittel 3.1.2. Dersom resultatene viser en noe ujevn akselerasjon i det aktuelle intervallet, kan du bruke gjennomsnittsverdien over flere målepunkter som et mål for akselerasjonen her.
- Finn akselerasjonen før loddet m treffer bakken. Sammenlign med det du skulle forventet utifra teori, se kapittel 3.1.3.
- Før loddet treffer bakken vil snordraget ha et utslag som er negativt, siden måleren strekkes. Finn kraften i dette intervallet, og sammenlign med teoretisk verdi, se kapittel 3.1.3.

Vi skal nå bruke Excel til å analysere dataene fra målingene.⁵ Analysen i det følgende kunne vært gjort i dataloggingsprogrammet, men vi skal selv gjøre noen av beregningene som dataloggingsprogrammet har gjort, for å få en bedre forståelse av de ulike fysiske størrelsene.

- Eksporter resultatene fra målingen av posisjon og de tilhørende tidene fra dataloggingssystemet til en tekstfil, som du deretter kan importere i et Excel-regneark. Hvis du får problemer med dette, ta kontakt med laboratorieveilederen.
- Husk å lagre regnearket med jevne mellomrom på hjemmeområdet ditt.
- Regn ut hastigheten og akselerasjonen i kolonnene til høyre for posisjonen (se kapittel 3.2.3). Husk å plote resultatene fra Excel, og sjekk at de stemmer med plottene i dataloggingssystemet.
- Sett av to kolonner som skal benyttes til energiberegninger. Regn ut den kinetiske energien til systemet (det vil si både M og m) i den første kolonnen. I den andre kolonnen skal du regne ut den potensielle energien til systemet. Plott begge kolonnene og sammenlign den kinetiske og den potensielle energien i lys av kapittel 3.1.4. Regn så ut den totale mekaniske energien i en ny kolonne. Er den mekaniske energien bevart?

⁵Senere i laboratoriekurset vil du bli introdusert for Python, som, for de fleste applikasjoner i eksperimentell fysikk, er et langt bedre verktøy til databehandling og analyse enn Excel.

Kapittel 4

FEIL I FYSISKE MÅLINGER

4.1 Målefeil

Når fysiske fenomener modelleres ved hjelp av matematiske modeller, blir fysiske størrelser behandlet som om de var matematiske størrelser selv om de er vesensforskjellige. For det første er matematiske størrelser ubenevnte mens fysiske størrelser alltid er benevnte enten som et antall eller ved en standardenhet. For det andre kan verdien til matematiske størrelser ofte angis som en bestemt desimalbrøk mens verdien til fysiske størrelser aldri kan angis som en bestemt desimalbrøk som fremfor alle andre angir den sanne verdi for størrelsen. Denne ubestemtheten i fysiske størrelser følger av vår oppfatning av materiens oppbygging samt de målemetoder vi bruker for å bestemme verdien til fysiske størrelser.

Den ubestemthet som følger av målemetodene er en konsekvens av at våre sanser og våre instrumenter gir informasjon med endelig oppløsning. Når vi prøver å fastsette verdien til en fysisk størrelse som en bestemt desimalbrøk av en enhet, vil vi alltid, til syvende og sist, komme til det punkt hvor neste siffer i desimalbrøken ikke kan fastsettes. Følgelig vil resultatet av en måling av en fysisk størrelse alltid være et intervall på en tallinje. I numeriske beregninger med fysiske størrelser oppnår man imidlertid betydelige forenklinger ved å representere størrelsene ved hjelp av bestemte desimalbrøker i stedet for ved intervaller. Til dette formål velges vanligvis en desimalbrøk nær midten av det intervall som ble fastlagt under målingen. Denne desimalbrøken betegnes som den fysiske størrelsens måltall, og utstrekningen av intervallet til begge sider oppfattes som en målefeil. Hvis målingen er upresis, er utstrekningen av feilintervallet stor. Hvis målingen er presis, er utstrekningen av feilintervallet liten.

Hvis du under måling av en fysisk størrelse har bestemt de fire første sifrene i desimalbrøken som representerer størrelsens verdi til for eksempel 2,345, men ikke kan bestemme det femte sifferet, betyr dette at du som resultat av målingen kan fastslå at størrelsens sanne verdi ligger i intervallet $[2,3445, 2,3455)$ på tallinjen. Matematisk angis måltallet som $2,3450 \pm 0,0005$, men dersom det som er skrevet er bare 2,345, så skal vi i fysikken forstå at det implisitt er ment en usikkerhet på opptil 0,0005. Alle andre tall i intervallet representerer også mulige sanne verdier.

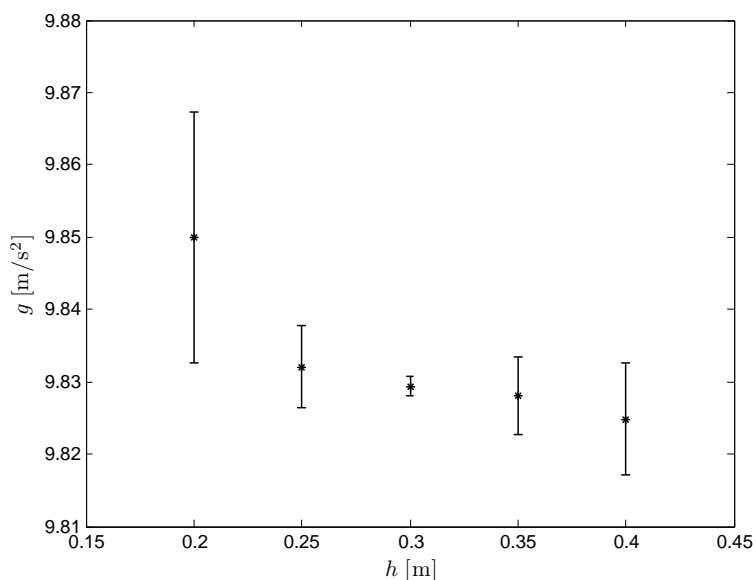
4.2 Angivelse av resultatet fra en måling av en fysisk størrelse

Måling av en fysisk størrelse er en operasjon som innebærer fastsettelse av et måltall q for størrelsen uttrykt i bestemte standardenheter og en tilhørende målefeil Δq . Målefeilen kan oppgis som absolutt feil Δq eller som relativ feil $\Delta q/q$. Den relative feilen angir hvor presis målingen er, som forholdet mellom intervallets utstrekning og størrelsens tallverdi. I praksis er det ofte denne feilen som er av størst interesse.

Når måleresultat angis i tallform, kan resultatet skrives på to måter:

- $q = (q_0 \pm \Delta q)$ [enhet].
Eksempel: $q = (256 \pm 1)$ m.
- $q = q_0$ [enhet] $\pm \Delta q/q$ hvor $\Delta q/q$ angis i prosent eller som ppm.
Eksempel: $q = 256$ m $\pm 0,5\%$.

Når måleresultat angis grafisk i kurvediagrammer, er det rasjonelt å antyde målefeilen ved å trekke linjer gjennom målepunktene parallelt med aksene og med lengde lik målefeilen slik som vist i figur 4.1.



Figur 4.1: Eksempel på grafisk angivelse av målefeil. Figuren viser at tyngdens akselerasjon g måles mest nøyaktig med en fysisk pendel når avstanden h mellom pendelens opphengningspunkt og pendelens tyngdepunkt er lik pendelens såkalte reduserte lengde, som her er ca 0.3 m.

Grafiske angivelser av målefeilen er ofte til god hjelp når beste kurve skal trekkes gjennom en punktskare. Vær imidlertid oppmerksom på at overdreven bruk av grafisk feilangivelse

kan overlesse et diagram og gjøre det uklart. Vanligvis er det nok å angi feilen i to til tre punkter i hvert diagram unntatt når feilen varierer sterkt fra punkt til punkt.

Nøyaktigheten i målte tallverdier for fysiske størrelser gir anvisning om det antall sifre som er tilstrekkelig for å angi størrelsens verdi. Ta med så mange sifre at kun det siste sifferet er beheftet med usikkerhet (unntaksvis de to siste sifrene).

4.3 Analyse av målefeilen

Det er ofte hensiktsmessig å skille mellom tre hovedtyper av målefeil: 1. Tilfeldige feil, 2. Systematiske feil og 3. Grove feil.

4.3.1 Tilfeldige feil

Måltallet for fysiske størrelser som fremkommer ved måling er vanligvis et resultat av telling, avlesning av skala eller avlesning av en digital avlesningsenhet.

Telling er en målemetode som i prinsipp ikke er direkte beheftet med tilfeldige feil. De mest vanlige årsakene til tilfeldige feil i avlesning av måltall er tilfeldigheter i resultatet som kommer av subjektive vurderinger ved avlesning av skala eller tilfeldigheter i resultatet som kommer av at verdien av det minst signifikante siffer i et digitalt avlesningsvindu egentlig er en avrundet verdi. Dessuten vil tilfeldig drift i verdien på parametre som ikke er kontrollert i eksperimentet ofte føre til tilfeldighet i måleresultatet.

Ved avlesning av skala sammenligner vi posisjonen av en kontur (på en visir eller en gjenstand) med markeringsstrekene på skalaen. Denne prosessen er begrenset både av øyets oppløsningsevne og skarpheten, tettheten og bredden av markeringsstrekene. To fremgangsmåter er hovedsakelig i bruk for å bestemme feilintervallet ved avlesning av skala: Statistiske metoder og skjønn.

Foreløpig skal vi unngå å bruke statistiske metoder og forutsetter at du som regel estimerer størrelsen på feilintervall ved skjønn. Dette skjønnet kan du vanligvis utøve på følgende måte:

- Bestem den største posisjon q_1 på skalaen, som helt sikkert er mindre enn minste tenkelige avleste verdi.
- Bestem så den minste posisjon q_2 på skalaen, som helt sikkert er større enn største tenkelige avleste verdi.
- Feilintervallets utstrekning kan da bestemmes som $\Delta q = |q_2 - q_1|$, og som regel vil midten av dette intervallet gi det beste skjønn for måltallet.

Når måleresultatet foreligger som avlesning fra et digitalt avlesningsvindu, henger utstrekningen av feilintervallet sammen med det antall sifre som angis i målevinduet.

Hvis du for eksempel ved avlesning av en tre-siffrs digital avlesningsenhet har fått tallet 235 som resultat, vil du som regel, på grunn av tilfeldighet i siste siffer ikke kunne avgjøre om måltallet er 234, 235 eller 236. Det vil si at digitale avlesningsenheter vanligvis har en usikkerhet som tilsvarende ± 1 i siste siffer. I tillegg til dette må du ta hensyn til de feilintervaller som fabrikanten til måleutstyret angir. Opplysninger om dette finnes i utstyrets bruksanvisning.

Generelt kan vi si at tilfeldige feil oppstår når våre sanser eller instrumenter presses mot grensen av sin oppløsning, og når verdien av antatt konstante parametre i et eksperiment fluktuerer tilfeldig og ukontrollert. Tilfeldige feil er alltid til stede i eksperimenter. De bør forsøkes redusert ved å bruke presise instrumenter, kontrollere ytre parametre, eller ved å ta mange målinger og bruke statistiske metoder, men de kan aldri fjernes helt.

4.3.2 Systematiske feil

Vanlige årsaker til systematiske feil er:

- Den teoretiske modellen som brukes for å tolke måleresultatene er ikke naturtro.
- Apparaturen er ikke kalibrert nøyaktig.
- Apparaturen er defekt.

Et eksempel på en systematisk feil forårsaket av en teoretisk modell som ikke er naturtro finner du i fortolkningsmodellen for Cavendisheksperimentet i kapittel 5. I dette eksperimentet blir gravitasjonskonstanten bestemt ved å måle gravitasjonskraften mellom store og små kuler ved hjelp av en torsjonsvekt. Under utledningen blir det i utgangspunktet kun tatt hensyn til gravitasjonsvekselvirkningen mellom nærmeste store og små kulepar, mens innflytelsen av alle andre masser på torsjonsvektens svingninger blir neglisjert. Prinsipielt sett vil dette føre til en systematisk feil i bestemmelsen av G . Det gjenstår imidlertid å utrede om denne feilen har praktisk betydning. Med andre ord, om den er av samme størrelsesorden eller større enn andre feil i eksperimentet. Et eksempel på systematisk feil på grunn av en unøyaktig kalibrert eller defekt apparatur er bruk av en klokke som er feil justert eller går for sakte. Ikke-konstante systematiske feil kan også forekomme, for eksempel når nullpunktet i et måleinstrument driver systematisk med tiden eller temperaturen.

Mens størrelsen av de tilfeldige feilene hovedsakelig påvirker utstrekningen av feilintervallet så vil systematiske feil hovedsakelig endre feilintervallets plassering på tallaksen i forhold til dens egentlige plassering, som vist i figur 4.2.

Systematiske feil er vanligvis konstante under en serie med avlesninger, og de kan derfor være vanskelig å oppdage. Når størrelsen av systematiske feil er kjent, kan imidlertid måleresultatene korrigeres. Eksperimenter bør planlegges med sikte på å unngå systematiske feil. Dette kan gjøres ved å planlegge bruk av tilstrekkelig god teori og å sørge for pålitelige kalibreringer. Det er også viktig å planlegge eksperimenter slik at systematiske feil kan oppdages. Dette kan for eksempel gjøres ved å lage apparaturen slik at den kan brukes til å gjennomføre målinger hvor svaret er kjent fra tidligere anerkjente, presise målinger eller fra

teoretiske betraktninger. Noen ganger kan det være vanskelig å skille mellom systematiske feil og tilfeldige feil.

4.3.3 Grove feil

Grove feil eller personlige feil er feil som oppstår på grunn av menneskelig svikt ved planlegging eller gjennomføring av eksperimenter som for eksempel tellefeil, feil i avlesning av skala eller digitalt avlesningsvindu. Mot grove feil hjelper kun god nattesøvn, systematiske arbeidsmåter og pauser etter behov.

4.4 Feilregning

Det er hensiktsmessig å skille mellom måleprosedyrer som innebærer (i) direkte og (ii) indirekte bestemmelse av verdien til fysiske størrelser. Ved direkte bestemmelse fås måleresultatet gjennom en enkelt måling med et måleinstrument. Feilen i verdien til den fysiske størrelsen blir da gitt av presisjonen til måleinstrumentet. Opplysninger om presisjonen til måleinstrumentet oppgis som regel av produsenten og finnes i instrumentets bruksanvisning.

Ved indirekte bestemmelse fås måleresultatet gjennom en sammensatt måling som innebærer at flere størrelser måles direkte, og den søkte verdi finnes gjennom beregning basert på en bestemt tolkningsmodell. Representasjon av måleresultat ved hjelp av et måltall og et feilintervall rundt måltallet gjør det naturlig å dele alle beregninger basert på måleresultat i to regneoperasjoner, den ene knyttet til måltallet og den andre til feilintervallet. Regneoperasjoner knyttet til måltall følger de vanlige algebraiske regneregler for tall og fordrer ikke videre kommentarer. Regneoperasjoner knyttet til feilintervallet følger et eget sett med regneregler som samlet betegnes som feilregning.

Bestemmelse av snordraget i ligning (3-6) er et godt eksempel på en indirekte bestemmelse av verdien til en fysisk størrelse. Her blir snordraget S bestemt fra målte og oppgitte verdier av størrelsene m , M , g og μ .

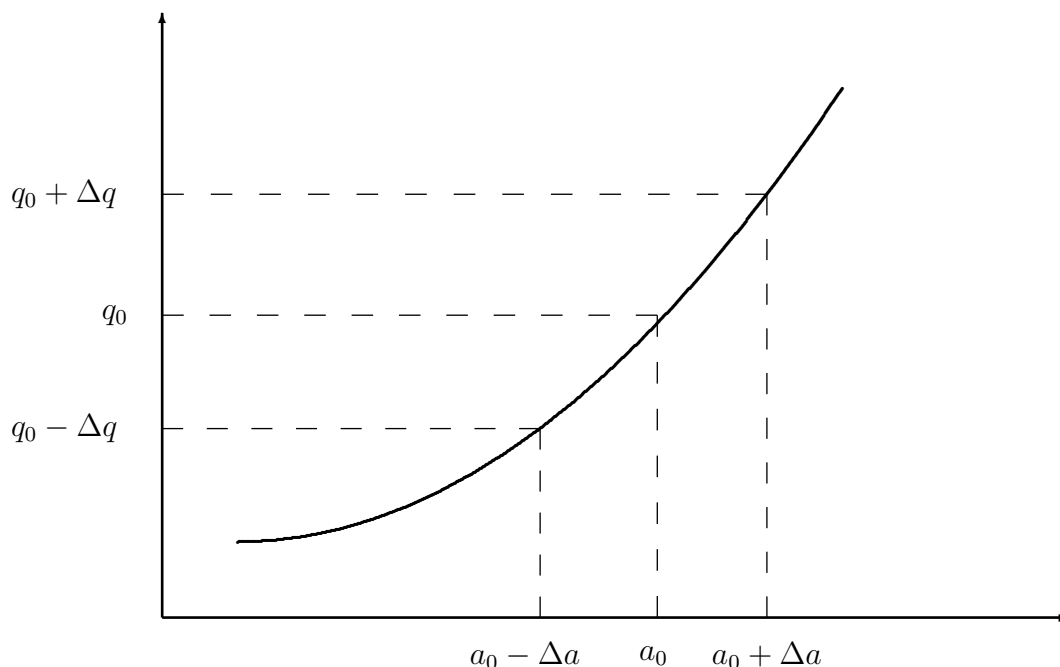
Generelt innebærer indirekte bestemmelse at en størrelse q , som ifølge tolkningsmodellen $q = q(a, b, c, \dots)$ er en funksjon av variablene a, b, c, \dots , skal bestemmes fra målte verdier av disse variablene. Det er rimelig å forvente at om det er målefeil $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ i henholdsvis



Figur 4.2: Illustrasjon av forskjellen mellom tilfeldige og systematiske feil.

$a, b, c \dots$, så vil disse akkumuleres gjennom beregningene og gi en feil Δq i q . Derfor må Δq kunne oppfattes som en funksjon $\Delta q = \Delta q(a, \Delta a, b, \Delta b \dots)$. Feilregningens oppgave er å bestemme formen på denne funksjonen.

4.4.1 Det enkle tilfellet



Figur 4.3: Feilen Δq i q på grunn av feilen Δa i a .

Se først på det enkle tilfellet hvor størrelsen q kun avhenger av en målt størrelse a , det vil si at $q = q(a)$. Hvis a måles med usikkerhet Δa og måltallet for a , som representerer midtpunktet i usikkerhetsintervallet $(a - \Delta a, a + \Delta a)$, betegnes med a_0 , kan du umiddelbart finne (et omtrentlig) midtpunkt $q_0 = q(a_0)$ for usikkerhetsintervallet for q . For å finne utstrekningen Δq av usikkerhetsintervallet rundt q_0 må du imidlertid bruke feilregning som essensielt bygger på enkel bruk av differensialregning.

Fra figur 4.3 ser du at hvis Δa er en liten størrelse kan du i intervallet $(a - \Delta a, a + \Delta a)$ tilnærme funksjonen $q(a)$ med en rett linje. Da blir

$$\Delta q \approx q(a_0 + \Delta a) - q(a_0) \approx \frac{dq}{da} \cdot \Delta a, \quad (4-1)$$

der verdien av dq/da er evaluert i a_0 . Feilen Δq i q på grunn av feilen Δa i a blir dermed proporsjonal med Δa , der proporsjonalitetskonstanten er stigningstallet i a_0 .

Dersom stigningstallet er negativt, vil vi ta absoluttverdien av stigningstallet fordi utstrekningen av et feilintervall alltid må være en positiv størrelse. Fra dette ser du at om a varierer i et intervall av størrelse $\pm \Delta a$, vil q variere i et intervall av størrelse $\pm \Delta q$, og en feil Δa i a vil føre til en feil Δq i q hvor

$$\Delta q = \left| \frac{dq}{da} \right| \Delta a. \quad (4-2)$$

Eksempel 1. Feil i bestemmelse av omkrets og areal av en sirkel.

Omkretsen $O = 2\pi r$ og arealet $A = \pi r^2$ av en sirkel kan bestemmes fra en målt verdi av radien $r = r_0 \pm \Delta r$. Ifølge ligning (4-1) blir feilen i bestemmelsen av omkretsen og arealet henholdsvis

$$\Delta O = \left| \frac{dO}{dr} \right| \Delta r = 2\pi \Delta r, \quad (4-3)$$

og

$$\Delta A = \left| \frac{dA}{dr} \right| \Delta r = 2\pi r \Delta r. \quad (4-4)$$

Divisjon av uttrykkene (4-3) og (4-4) med henholdsvis O og A gir uttrykkene for den relative feilen

$$\frac{\Delta O}{O} = \frac{\Delta r}{r}, \quad (4-5)$$

og

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \frac{\Delta r}{r} \quad (4-6)$$

som viser at den relative feilen i målingen av radien har dobbelt så stor innvirkning på den relative feilen i arealet som i omkretsen. Dette kommer av at r opptrer som r^2 i uttrykket for arealet og kun som r i uttrykket for omkretsen.

4.4.2 Det generelle tilfellet

Vi ser nå på det generelle tilfellet hvor størrelsen q avhenger av flere målte størrelser a, b, c, \dots , det vil si at $q = q(a, b, c, \dots)$ og at a, b, c, \dots måles med usikkerheter henholdsvis $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$

Partiell derivasjon

Før vi kan gi den generelle formen for usikkerheten i q må vi innføre en form for derivasjon som er meget sentral under analyse av funksjoner med flere variabler, og som kalles *partiell derivasjon*. Ved partiell derivasjon av en funksjon med flere variabler, $q = q(a, b, c, \dots)$ blir q derivert med hensyn på en av variablene, mens de andre variablene, som det ikke deriveres med hensyn på, betraktes som konstanter. Partiell derivasjon har et eget symbol « ∂ » istedenfor « d », for å tydeliggjøre dette. Vi illustrerer bruk av partiell derivasjon med to eksempler.

Eksempel 2. Partiell derivasjon.

Vi har en størrelse q som er indirekte gitt ved størrelsene a og b . Gitt relasjonen $q = a + b$ finner vi den partiellderiverte av q med hensyn på a ved å derivere uttrykket mens vi ser på b som en konstant,

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 1. \quad (4-7)$$

Tilsvarende finner vi at

$$\frac{\partial q}{\partial b} = 1. \quad (4-8)$$

Dersom q istedet er gitt ved $q = a^2 b$ har vi

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 2ab, \quad (4-9)$$

og

$$\frac{\partial q}{\partial b} = a^2. \quad (4-10)$$

Eksempel 3. Partiell derivasjon sammenlignet med total derivasjon.

Den derivasjonen dere til nå er mest kjent med kalles egentlig *total derivasjon*, og symbolet som ofte benyttes er «d», som dere sikkert er kjent med. Dersom vi har en funksjon av en variabel, $q = q(a)$, er partiell derivasjon og total derivasjon i praksis det samme. Dersom vi istedet har en funksjon av flere variabler, $q = q(a, b, c, \dots)$, er partiell derivasjon enklere enn total derivasjon. Årsaken til dette er at en under total derivasjon må ta hensyn til at de andre variablene kan være avhengige av den variabelen en deriverer med hensyn på, mens en under partiell derivasjon kan anse alle andre variabler som konstanter, som er enkle å derivere. Dette kan illustreres ved å totalderivere uttrykkene som vi partiellderiverte i eksemplet over. Gitt $q = a + b$ har vi

$$\frac{dq}{da} = 1 + \frac{db}{da}, \quad (4-11)$$

der b generelt må betraktes som en funksjon av a , $b = b(a)$, og vi bruker kjerneregelen når vi skal derivere det siste leddet i funksjonen. Tilsvarende får vi at

$$\frac{dq}{db} = \frac{da}{db} + 1. \quad (4-12)$$

Dersom q er gitt ved $q = a^2b$, har vi at

$$\frac{dq}{da} = 2ab + a^2 \frac{db}{da}. \quad (4-13)$$

Legg merke til at vi nå har brukt produktregelen i tillegg til kjerneregelen. For den totalderiverte av q med hensyn på b får vi

$$\frac{dq}{db} = 2ab \frac{da}{db} + a^2. \quad (4-14)$$

Gauss' feilforplantningslov

Det kan vises (se for eksempel referanse [1]) at feilen (eller usikkerheten) Δq i størrelsen $q(a, b, c, \dots)$ er gitt ved uttrykket

$$(\Delta q)^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial a} \Delta a \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial b} \Delta b \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial c} \Delta c \right)^2 + \dots \quad (4-15)$$

Dette uttrykket kalles ofte *Gauss' feilforplantningslov*. Ligning (4-15) gjelder under forutsetning av at primærstørrelsene a, b, c, \dots er uavhengige, og at usikkerhetene i primærstørrelsene kan anses som små.

Ved bruk av Gauss' feilforplantningslov lønner det seg ofte å gå systematisk til verks når en skal regne ut høyre side i ligning (4-15). En partiellderiverte q med hensyn på hver eneste variabel som q måtte være avhengig av. Hver partiellderivert vil nå være et bokstavuttrykk gitt av variablene a, b, c, \dots . Ofte vil en finne felles faktorer i de ulike bokstavuttrykkene for de partiellderiverte, og en kan da forenkle høyre side av ligning (4-15) ved å trekke ut felles faktorer fra leddene. Når en har forenklet bokstavuttrykket så mye som mulig, kan en sette inn tallverdiene som er målt for a, b, c, \dots og $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ og finne tallverdien for usikkerheten Δq .

Relativ feil

Ofte når en arbeider med Gauss' feilforplantningslov, kan det lønne seg å manipulere uttrykkene slik at det er den relative feilen ($\Delta a/a, \Delta b/b, \Delta c/c, \dots$) som inngår i leddene i ligning (4-15). Fordelene med å bruke relativ feil er flere: For det første er den relative feilen en *dimensjonsløs* størrelse. Det vil si at den er uten enhet, og derfor en størrelse som det er lett å forholde seg til; det er simpelthen et tall som sier hvor stor feilen i en størrelse er i forhold til den verdien som er målt. Dernest kan en også enkelt sammenligne den relative feilen i de ulike størrelsene som inngår i feilforplantningen, uavhengig av enhetene som de ulike størrelsene måtte ha. For eksempel gir det ingen mening å sammenligne en usikkerhet på 0,03 kg i en målt masse med en usikkerhet på 1,1 m i en målt lengde fordi enhetene er vidt forskjellige. Derimot gir det god mening å sammenligne en relativ feil på 0,02 i den målte massen med en relativ feil på 0,06 i den målte lengden; det forteller oss at usikkerheten i den målte lengden er 3 ganger større enn usikkerheten i den målte massen, når usikkerheten betraktes relativt måleverdien.

Dessuten viser det seg at dersom en i ligning (4-15) regner ut den relative feilen $\Delta q/q$ i stedet for Δq , vil uttrykkene ofte forenkle seg. Dette vil vi illustrere ved å regne ut feilforplantningen for et generelt uttrykk på formen

$$q = \frac{ab^n}{c^m} \quad (4-16)$$

ved bruk av ligning (4-15). Ved partiell derivasjon av uttrykket i ligning (4-16) finner vi at

$$(\Delta q)^2 = \left(\frac{b^n}{c^m} \Delta a\right)^2 + \left(n \frac{ab^{n-1}}{c^m} \Delta b\right)^2 + \left(-m \frac{ab^n}{c^{m+1}} \Delta c\right)^2. \quad (4-17)$$

Hvis vi nå dividerer begge sider av ligning (4-17) med q^2 , slik at vi får kvadratet av den relative feilen i q på venstre side, og setter inn uttrykket for q på høyre side, får vi

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2 = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(m \frac{\Delta c}{c}\right)^2. \quad (4-18)$$

Ikke bare er dette uttrykket enklere enn det opprinnelige i ligning (4-17); vi ser at det her kun er relative feil i variablene som inngår, noe som forenkler beregningene. Dersom vi nå har et uttrykk som kun inneholder multiplikasjon og divisjon, slik som ligning (4-16), så kan vi med en gang skrive opp uttrykket for den relative feilen, ved bruk av ligning (4-18), uten å måtte behøve å regne ut alle deriverte i ligning (4-15) hver gang.

Eksempel 4. Feil i bestemmelse av kinetisk energi.

Den kinetiske energien til et legeme er gitt ved $E_k = mv^2/2$ og kan finnes eksperimentelt ved å måle hastigheten v og massen m til et legeme i bevegelse. Ifølge ligning (4-15) blir den absolutte feilen i bestemmelsen av den kinetiske energien

$$\Delta E_k = \sqrt{(mv\Delta v)^2 + \left(\frac{v^2}{2}\Delta m\right)^2}. \quad (4-19)$$

Divisjon av dette uttrykket med E_k gir uttrykket for den relative feilen,

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2}, \quad (4-20)$$

som viser at den relative feilen i v bidrar mest til den relative feilen i E_k . Det vil si at v må bestemmes med dobbelt så stor presisjon som m for å ha samme vekt som feilkilde. Merk at en kunne ha kommet frem til ligning (4-20) direkte, uten partiell derivasjon, ved bruk av ligning (4-18).

Eksempel 5. Stor forskjell i absolutt feil.

Hvis for eksempel $q = a + b$, $\Delta a = 8$ og $\Delta b = 2$, får vi at $(\Delta q)^2 = (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 = (8^2 + 2^2) = 68$ og $\Delta q \approx 8$. Her kunne feilen i b vært neglisjert siden den bidrar kun med 3% av totalfeilen.

Eksempel 6. Feilen i en liten størrelse.

Når forskjellen i verdi hos to størrelser som skal adderes er stor, kan du tåle stor feil i den lille størrelsen uten at feilen i summen blir merkbart større. Anta for eksempel at $a = 100 \pm 6$ (6% feil) og $b = 5 \pm \Delta b$. Vi spør nå: Hvor stor kan Δb bli uten at Δq blir nevneverdig større enn Δa ? Hvis $q = a + b$, blir $(\Delta q)^2 = (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 = 36 + (\Delta b)^2$. Selv om vi setter $\Delta b = 3$, det vil si en feil på hele 60% i b , så blir $\Delta q \approx 6.7$, som er en knapt merkbar økning i forhold til Δa .

Eksempel 7. Stor forskjell i relativ feil.

Når $q = ab$ eller $q = a/b$, blir ifølge ligning (4-18) $(\Delta q/q)^2 = (\Delta a/a)^2 + (\Delta b/b)^2$. Det vil si at hvis $\Delta a/a > 3(\Delta b/b)$ vil $(\Delta b/b)^2 \ll (\Delta a/a)^2$ og feilen i b kan neglisjeres. Her er forholdstallet 3 valgt som grenseverdi fordi bidraget fra $\Delta a/a$ i uttrykket for $(\Delta q/q)^2$ da vil være omtrent en størrelsesorden større enn bidraget fra $\Delta b/b$.

Eksempel 8. Feilen i en differanse.

Anta at $q = a - b$, $a = 100 \pm 2$ og $b = 96 \pm 2$. Det vil si at både a og b måles med relativ usikkerhet på cirka 2%. Ifølge ligning (4-15) blir $\Delta q = [(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2]^{1/2} \approx 2.8$. Det vil si at den relative feilen $\Delta q/q \approx 71\%$. Pass godt på feilen i en liten differanse mellom to store størrelser!

Eksempel 9. Statistisk uavhengighet.

Anta at $q = a^2$ og at feilen i a er lik Δa . Feilen Δq i q kan bestemmes direkte fra ligning (4-18) til å være $\Delta q/q = 2(\Delta a/a)$. Det er også tilsynelatende mulig å bestemme Δq ved å sette $a = b$ i ligningene (4-16) og (4-18), som gir at $\Delta q/q = \sqrt{2} \cdot (\Delta a/a)$. Grunnen til denne lille uoverensstemmelsen er at det under utledningen av ligning (4-18) via Gauss' feilforplantningslov er forutsatt at størrelsene a og b er statistisk uavhengige. Hvis du setter $a = b$ i ligning (4-18), er denne forutsetningen selvsagt ikke lenger gyldig.

Eksempel 10. Bruk av hjelpestørrelser.

Av og til, når vi skal studere feilforplantningen i store og vanskelige uttrykk, kan det lønne seg å bruke hjelpestørrelser som kan forenkle beregningene betydelig. Her skal vi illustrere bruk av hjelpestørrelser ved å regne ut feilforplantningen i den korrigerte verdien for gravitasjonskonstanten, som dere kommer til å bli bedre kjent med i kapittel 5 når dere skal finne gravitasjonskonstanten eksperimentelt. Her bruker vi kun uttrykket som et eksempel der det er nyttig å bruke hjelpestørrelser, og du trenger ingen kjennskap til størrelsene som inngår,

utover at det er størrelser som blir målt med tallverdi og måleusikkerhet. Den korrigerte verdien for gravitasjonskonstanten er oppgitt i ligning (5-19), som med ligningene (5-14) og (5-17) innsatt, blir

$$G_{\text{kor}} = \pi^2 \frac{Sb^2r}{T^2LM(1 - b^3/(b^2 + 4r^2)^{3/2})}. \quad (4-21)$$

Vi ser at dette uttrykket inneholder både addisjon og subtraksjon, noe som umuliggjør bruk av ligning (4-18) til å regne ut feilforplantningen, og vi er derfor i utgangspunktet nødt til å bruke det generelle uttrykket i ligning (4-15), noe som er en formidabel oppgave. Hvis vi nå innfører hjelpestørrelsen¹

$$k = \frac{b^2r}{1 - b^3/(b^2 + 4r^2)^{3/2}}, \quad (4-22)$$

ser vi at vi kan skrive ligning (4-21) som

$$G_{\text{kor}} = \pi^2 \frac{Sk}{T^2LM}, \quad (4-23)$$

og vi kan nå bruke ligning (4-18) direkte til å finne

$$\left(\frac{\Delta G_{\text{kor}}}{G_{\text{kor}}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2. \quad (4-24)$$

Det gjenstår fortsatt å finne et uttrykk for $\Delta k/k$ gitt ved b , r , Δb og Δr , men vi har altså forenklet beregningen fra å bruke ligning (4-15) med ligning (4-21) med seks variabler til å bruke ligning (4-15) med ligning (4-22) med bare to variabler.

4.5 Statistiske feilberegninger

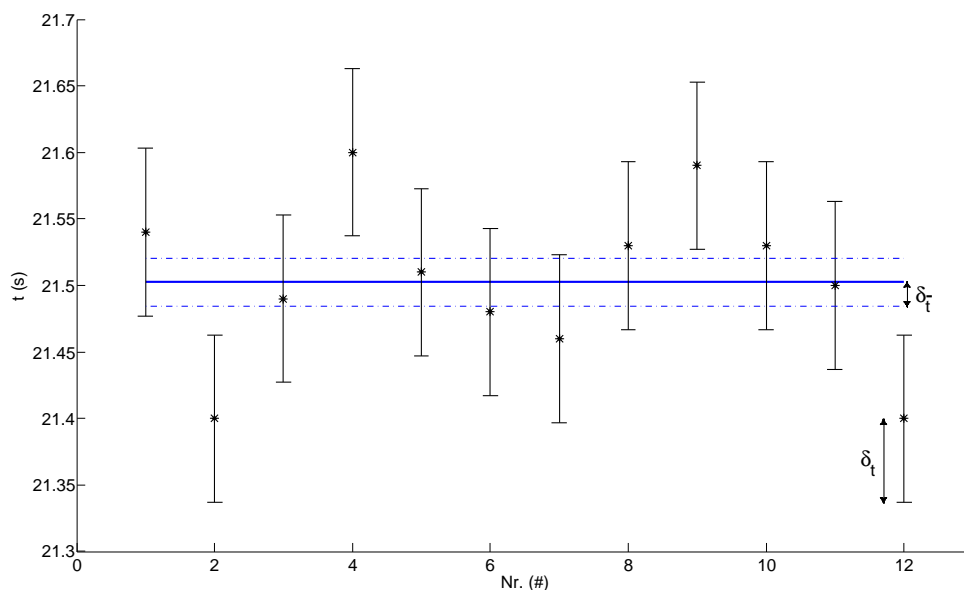
Som nevnt i kapittel 4.3.1 kan man bruke statistiske metoder til å bestemme målefeilen i en måling av en fysisk størrelse. Det må her understrekes at statistikk er særlig formålstjenlig når det kommer til målinger som er preget av tilfeldige feil. Bruk av statistiske metoder vil på ingen måte ta høyde for systematiske feil i modell eller apparatur. Nå vil vi introdusere noen statistiske størrelser og begreper som er nødvendige for å kunne benytte seg av statistikk i forbindelse med feilanalyse av eksperimentelle data.

Dersom en har tid og mulighet til det, vil det i de fleste tilfeller være hensiktsmessig å ta flere målinger av den samme størrelsen for å få en mest mulig presis måleverdi. Dette kan begrunnes ved at en gjennom å ta flere målinger etterhvert vil utligne den tilfeldige feilen, dersom en antar *gjennomsnittet* av alle målingene som måltall. Gjennomsnittet for en måleserie med N enkeltmålinger x_i , er gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4-25)$$

¹Her er det lurt å velge hjelpestørrelser slik at hjelpestørrelsen og de gjenværende størrelsene er uavhengige. Her kunne vi for eksempel valgt $k = 1/(1 - b^3/(b^2 + 4r^2)^{3/2})$ som fortsatt ville gitt et uttrykk for G_{kor} kun bestående av multiplikasjon og divisjon, men siden nå b og r ville inngått både i og utenfor hjelpestørrelsen må en ta hensyn til dette og bruke produktregelen ved derivasjon, og en kunne ikke tatt i bruk ligning (4-18) etterpå.

For å illustrere dette, vises det i figur 4.4 et eksempel på en måleserie med 12 målinger av en fysisk størrelse. I prinsippet kunne vi antatt en hvilken som helst av disse 12 målingene som måltallet for den aktuelle fysiske størrelsen, men vi ser at gjennomsnittsverdien er sentralt plassert i måleserien, og kan antas å ligge nærmere den «korrekte» verdien enn en tilfeldig valgt enkeltmåling.



Figur 4.4: Måleserie med 12 målinger av 10 periodiske svingninger for en pendel. De ulike målingene er angitt som *, mens den tilhørende gjennomsnittsverdien er angitt som den tykke (blå) linjen. Standardavviket δ_t er angitt som feilskranner med utgangspunkt i hver enkelt måling, mens standardfeilen $\delta_{\bar{t}}$ er angitt som stiplede (blå) linje på hver side av gjennomsnittsverdien.

Videre er det også hensiktsmessig å bruke statistikk til å beregne tallverdier for feilen i målingen. Dersom vi antar en enkeltmåling som måltall for den aktuelle fysiske størrelsen, er *standardavvik* et godt mål for feilen. Standardavvik er gitt ved

$$\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)}, \quad (4-26)$$

og er en statistisk størrelse som måler spredningen i en dataserie². Denne størrelsen passer

²Av lign. (4-26) ser vi at standardavvik er kvadratroten av en sum, der leddene i summen er kvadratet til avviket et datapunkt har fra middelverdien i måleserien. I en dataserie med stor spredning ser vi at standardavviket blir stort fordi en her vil ha flere store ledd i summen. Legg merke til at det som står under rottegnet i seg selv ligner på en middelverdi av størrelsen $(x_i - \bar{x})^2$, der en har delt med $N-1$ istedet for N . Dette har sammenheng med at middelverdien som inngår i (4-26) er beregnet fra samme måleserie som standardavviket, og da vil en få et riktigere (forventningsrett) mål på spredningen ved å dele med $N-1$ istedet for N . Dette kan dere lære mer om i et statistikk-kurs.

derfor godt som et mål på feilen i en måling som er preget av tilfeldige feil, fordi tilfeldig feil synliggjøres ved tilfeldig spredning av gjentatte målinger, slik som vist i figur 4.2.

Likevel, tidligere har vi argumentert for å bruke middelveiden som måltall for den fysiske størrelsen som er blitt målt i måleserien, og da antas *standardfeil*, som er standardavviket til en middelvei, å være et godt mål for målefeilen,

$$\delta_{\bar{x}} = \left(\frac{\delta_x}{\sqrt{N}} \right) = \sqrt{\left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)}. \quad (4-27)$$

Av lign. (4-27) ser vi at standardfeilen er en størrelse som både tar hensyn til spredningen i måleserien, og til at en middelvei blir mer presis dersom antall målinger øker, da standardfeilen kan finnes ved å dele standardavviket på \sqrt{N} . I figur 4.4 er både standardavvik og standardfeil angitt. Her er det tydelig at middelveiden kan sies å være mer presis enn en hvilken som helst av enkeltmålingene, da feilen i middelveiden (gitt ved standardfeilen) er mindre enn feilen i enkeltmålingene (gitt ved standardavviket). Dersom vi fra måleserien i figur 4.4 nå antar gjennomsnittet som måltall for den fysiske størrelsen (svingetiden), ser vi at vi kan oppgi måleresultatet som $t = (21,503 \pm 0,018)$ s, der $t_0 = 21,503$ s er gjennomsnittet til måleserien, og $\Delta t = 0,018$ s er standardfeilen til måleserien.

Litteratur:

Utfyllende litteratur finnes i G. L. Squires «Practical Physics» [1].

Kapittel 5

GRAVITASJONSKONSTANTEN

Mål: I denne oppgaven starter vi med å sette den universelle gravitasjonsloven inn i et historisk perspektiv. Du skal bruke Cavendish' metode til å bestemme gravitasjonskonstanten, og ut fra dine målinger finne et estimat for denne konstanten. Du skal i etterkant utarbeide en rapport. Dette er nærmere beskrevet i kapittel 5.6.

5.1 Teoretisk bakgrunn

5.1.1 Gravitasjon

Gravitasjon er en tiltrekkende kraft, med lang rekkevidde, som virker mellom masser. Det er typisk den første kraften vi lærer om i fysikken, men det er fortsatt mye som er uavklart når det gjelder gravitasjon. Selv om den fenomenologiske beskrivelsen av gravitasjon stort sett har stått uforandret i 300 år, har vi fortsatt begrenset forståelse av hva som forårsaker den. Hovedårsaken til det er at gravitasjonskraften er en forsvinnende svak kraft sammenlignet med andre fjernkrefter, som for eksempel elektromagnetiske krefter. Det må derfor store masser til for at vi skal kunne "føle" gravitasjonskraften.

Planeter og andre himmellegemer er eksempler på slike store ansamlinger av masse, og det var iakttagelser på himmelen som først motiverte til studier av gravitasjon. Observasjoner av planetenes baner og diskusjonene rundt solsystemet har påvirket vårt verdensbilde og den filosofiske diskusjonen siden oldtiden.

På slutten av 1600-tallet samlet Isaac Newton tidligere betraktninger og lover om gravitasjonskraften sammen med ny teori til en universell gravitasjonslov. Dette har fortsatt status som en av de aller største vitenskapelige bragder og ga mye av grunnlaget for den klassiske mekanikken.

Det siste store bidraget til vår forståelse av gravitasjon kom med Einsteins generelle relativitetsteori som innførte forestillingen om det krumme verdensrommet. Selv om denne teorien ikke inngår i dette kurset, kan det være interessant å vite at gravitasjon fortsatt er gjenstand for stor forskningsaktivitet.

Ifølge Newtons universelle gravitasjonslov vil to punktmasser m_1 og m_2 i innbyrdes avstand b tiltrekke hverandre med en kraft

$$F = G \frac{m_1 m_2}{b^2}, \quad (5-1)$$

der G er gravitasjonskonstanten. Gjeldende tabellverdi for gravitasjonskonstanten er $G = (6,67428 \pm 0,00067) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. [2]

Eksempel 1. Gravitasjonskraften på jordoverflata.

Gravitasjonskrefter mellom jorda og masser ved jordas overflate er som kjent godt merkbare. Ved innsetting av verdier for gravitasjonskonstanten, jordmassen og jordradien i ligning (5-1) finner du at gravitasjonskraften på en masse $m = 1,0 \text{ kg}$ ved jordoverflata er ca 10 N . Til sammenligning finner du ved innsetting av solmassen, jordmassen og jordbaneradien i ligning (5-1) at gravitasjonskraften mellom sola og jorda er ca. $4 \cdot 10^{22} \text{ N}$. Gravitasjonskrefter mellom masser av den størrelsesorden som vi hyppig møter i dagliglivet på jordas overflate, er imidlertid meget små. For eksempel finner du ved innsetting i gravitasjonsloven at kraften mellom to personer som hver har masse 80 kg og står i en tyngdepunktavstand på 1 m , er lik ca $0,4 \mu\text{N}$, som ikke er merkbart.

Eksempel 2. Gravitasjonskraften på måneoverflata.

Ved innsetting av verdier for månemasse og måneradius i gravitasjonsloven finner du at gravitasjonskraften på en masse $m = 1,0 \text{ kg}$ ved overflata er $1,6 \text{ N}$. Til sammenligning finner du ved innsetting av jordmasse, månemasse og baneradius i ligning (5-1) at gravitasjonskraften mellom jorda og månen er ca. $2 \cdot 10^{20} \text{ N}$.

Eksempel 3. Eksperimentell bestemmelse av gravitasjonskonstanten.

Fra en måling av kraften F mellom to kjente masser m_1 og m_2 i kjent avstand b kan gravitasjonskonstanten bestemmes ved innsetting i ligning (5-1) og omskriving til

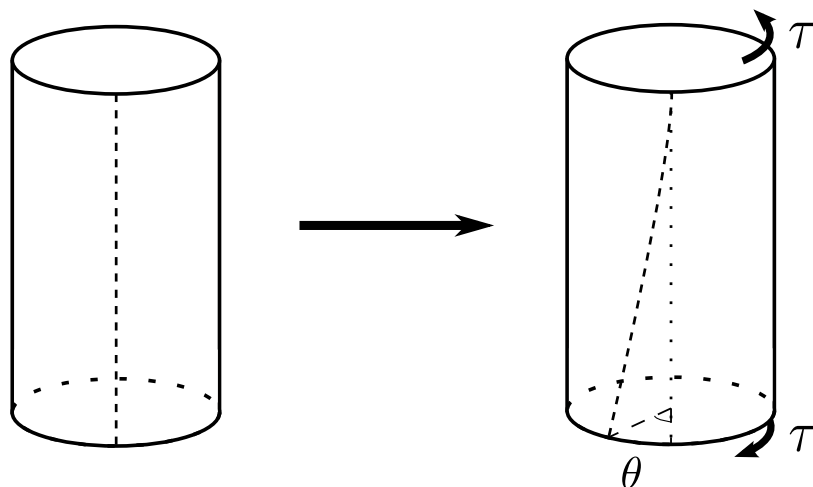
$$G = F \frac{b^2}{m_1 m_2}. \quad (5-2)$$

5.2 Måling av gravitasjonskonstanten

Det var Henry Cavendish som i 1797 - 98 først lyktes i å bestemme en noenlunde nøyaktig tallverdi for gravitasjonskonstanten [3]. Han brukte en torsjonsvekt til å måle gravitasjonskraften mellom to små masser i kjent innbyrdes avstand og bestemte dermed indirekte ¹ verdien til G via ligning (5-2). Dette var ingen liten bedrift tatt i betraktning at kraften som måles er av størrelsesorden μN .

I torsjonsvekten utnyttet de elastiske egenskapene til en metalltråd som utsettes for torsjon, det vil si vridning. Dersom en utsetter en fastspent stav for et dreiemoment τ , se figur 5.1, vil staven få en vridning i samme retning som dreiemomentet. Dersom vridningen er liten

¹Cavendish var egentlig ute etter å måle jordas massetetthet. Målingene til Cavendish impliserte en verdi for G på $6.754 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.



Figur 5.1: Illustrasjon av torsjon (vridning) i en stav på grunn av et ytre dreiemoment τ . Den stiplede vertikale linjen i illustrasjonen til venstre forestiller en tenkt linje på staven når dreiemomentet er null. I illustrasjonen til høyre er linjen vridt som følge av et ytre dreiemoment τ , og vinkelen som linjen nå danner i forhold til utgangsposisjonen er vinkelutslaget θ .

i forhold til stavens lengde, er vridningsvinkelen θ (også kalt torsjonsvinkelen) proporsjonal med dreiemomentet,

$$\tau = D\theta. \quad (5-3)$$

Proporsjonalitetskonstanten D kalles torsjonsstivhet. Merk at denne sammenhengen, som beskriver vridning av et fast legeme, er på samme form som Hookes lov for ei fjær ("lineær respons"). Det følger av dette at kraften som inngår i dreiemomentet ($\tau = Fr$; dreiemoment = kraft \times arm) vil være lik

$$F = \frac{D}{r} \cdot \theta, \quad (5-4)$$

hvor r er kraftens arm. Fra ligning (5-4) ser du at i en oppstilling med en tråd med kjent forhold mellom torsjonsstivhet og arm kan kraften bestemmes ved å måle torsjonsvinkelen, så lenge torsjonen ikke fører til at elastisitetsgrensen for trådmaterialet overskrides.²

Når måleinstrumenter skal konstrueres, ligger hovedproblemet ofte i kalibrering. Uttrykket (5-4) viser at løsningen på kalibreringsproblemet for en torsjonsvekt består i å finne metoder for pålitelig bestemmelse av forholdet D/r .

Ved å variere dimensjonene og materialet kan mykheten i en torsjonstråd reguleres med stor følsomhet. På grunn av disse egenskapene er torsjonsvekten den mest følsomme direkte målemetode for kraft som er kjent, og den eneste målemetode som er tilstrekkelig følsom for direkte bestemmelse av de svake gravitasjonskreftene mellom masser som vanligvis brukes i laboratoriet.

En prinsippskisse av apparaturen er vist i figur 5.2. En torsjonspendel er hengt opp i et lukket kammer. Pendelmassene er to små blykuler med like store masser m , montert i innbyrdes

²Med elastisitetsgrense menes grensen der θ er så stor at ligning (5-3) ikke lenger er gyldig.

avstand $2r$, i hver sin ende av ei stang med neglisjerbar masse i forhold til blykulene. Utenfor kammeret er to større blykuler med like store masser M montert på en holder slik at sentrum i de store og de små kulene ligger i samme horisontalplan. Holderen kan dreies i horisontalplanet om forlengelsen av torsjonstrådens akse. Ved å justere posisjonen til den dreibare holderen kan senter-til-senter-avstanden b mellom de små og de store kulene justeres. På grunn av gravitasjonskraften mellom de små og de store kulene vil likevektsposisjonen til torsjonsspendelen avhenge av posisjonen til de store kulene.

Måling av gravitasjonskraften mellom de små og de store blykulene utføres i prinsippet på følgende måte: De store blykulene monteres først i posisjon 1 som er vist heltrukket i figur 5.2. Når torsjonsspendelen har falt til ro, bestemmes torsjonsvinkelen θ_1 for torsjonsspendelens likevektsposisjon. De store kulene svinges så til posisjon 2 som er vist stiplet i figur 5.2. Når torsjonsspendelen har falt til ro igjen, bestemmes torsjonsvinkelen θ_2 for den nye likevektsposisjonen. Fra figur 5.2 framgår det at $2Fr = D\theta_1$ og $2Fr = D\theta_2$ slik at

$$4Fr = D(\theta_1 + \theta_2), \quad (5-5)$$

som gir følgende uttrykk for gravitasjonskraften:

$$F = \frac{D}{r} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}. \quad (5-6)$$

Fra ligning (5-6) ser du at for å bestemme F må du måle armlengden r og vinkelutslagene θ_1 og θ_2 til torsjonsspendelen, samt bestemme torsjonsstivheten D . Måling av armlengden r er triviell. Måling av torsjonsvinklene og bestemmelse av torsjonsstivheten må vi se nærmere på.

5.2.1 Måling av torsjonsvinkelen

For å måle torsjonsvinkelen bruker vi et gammelt måleteknisk knep. Et lite speil er montert ved nedre ende av torsjonstråden, parallelt med stangen, slik at det følger stangens bevegelser, som vist i figur 5.2. En smal lysstråle rettes mot speilet, og retningen til strålen justeres slik at den reflekteres mot en linjal. Som figuren viser vil den reflekterte lysstrålen sveipe over vinkelen 2θ når armen sveiper over vinkelen θ .

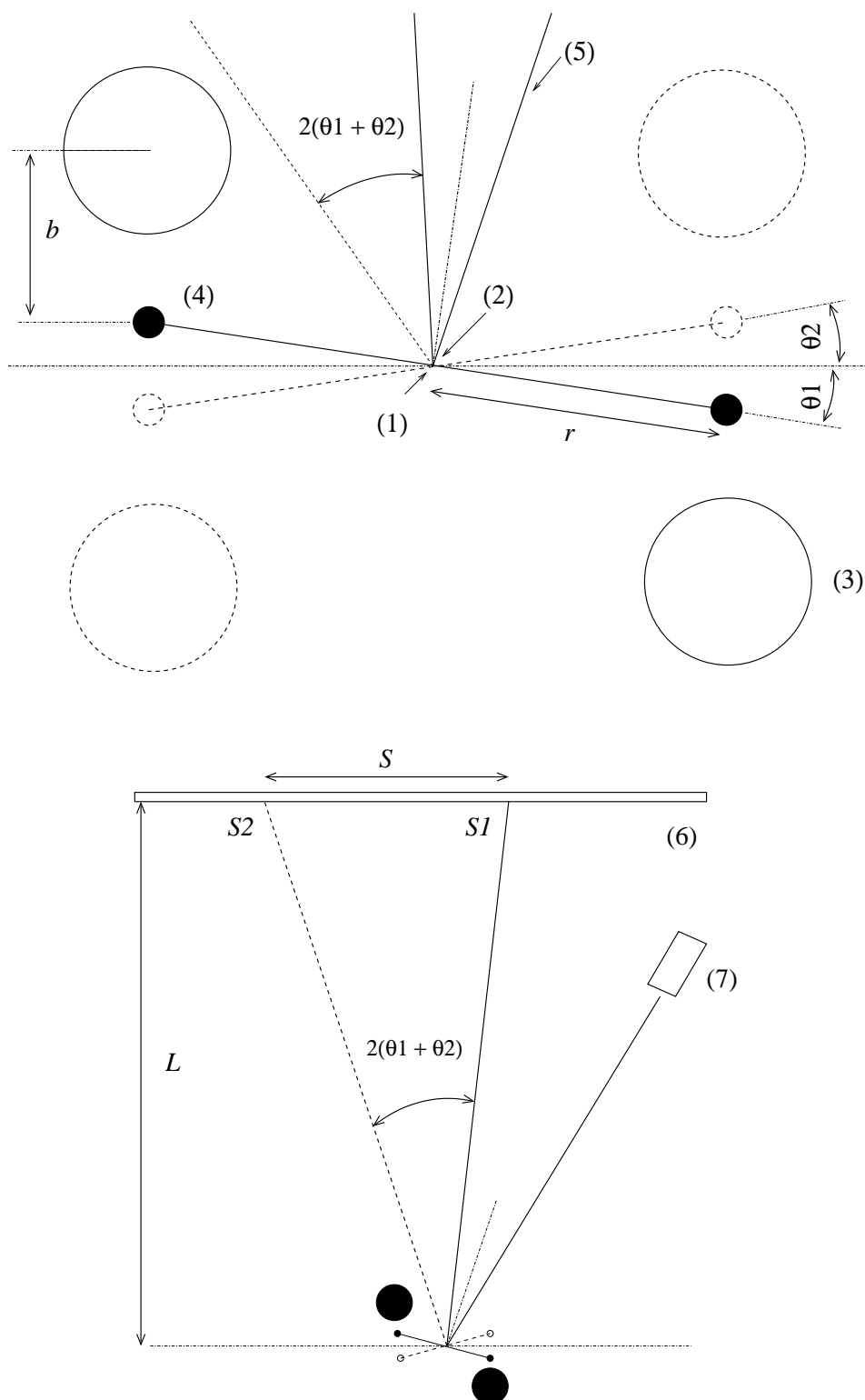
Når avstanden L fra speilet til målestaven er stor i forhold til utslaget $S = S_2 - S_1$, dvs $L \gg S$, er vinkelen $2(\theta_1 + \theta_2)$ (se figur 5.2) gitt ved

$$\frac{S}{L} \approx 2(\theta_1 + \theta_2). \quad (5-7)$$

Her er S_1 og S_2 utslagene målt på målestaven (linjalen) ved henholdsvis likevektsvinkel θ_1 og θ_2 . Tilnærmingen i (5-7) gjelder for små vinkler. Dermed får vi følgende uttrykk for gravitasjonskraften:

$$F = \frac{D}{8r} \cdot \frac{S}{L}. \quad (5-8)$$

Ved å velge L stor nok kan nøyaktigheten i vinkelmålingen i prinsipp alltid gjøres stor nok.



Figur 5.2: Den øverste figuren viser et skjematisk diagram av torsjonsvekten i Cavendishoppstillingen sett langs torsjonstråden. (1) Torsjonstråd (vinkelrett på papirplanet), (2) speil, (3) store blykuler, (4) små blykuler, (5) laserlys. Den nederste figuren viser et skjematisk diagram av hele oppsettet. (6) Linjal (Målestav), (7) laserkilde. Posisjon 1 er vist heltrukket. Posisjon 2 er vist stiplet. Likevektsstillingen til torsjonspendelen er langs den horisontale strek-punktlinjen når de store blykulene er fjernet.

5.2.2 Bestemmelse av torsjonsstivheten

Når torsjonspendelen utsettes for et dreiemoment, slik at dens likevektsposisjon forskyves, vil pendelen svinge harmonisk rundt den nye likevektsposisjonen.³ Vinkelakselerasjonen α for svingningene til torsjonspendelen er bestemt av Newtons 2. lov for rotasjonsbevegelse,

$$\tau = I\alpha, \quad (5-9)$$

der $I = 2mr^2$ er treghetsmomentet til torsjonspendelen. Dreiemomentet τ som torsjonspendelen utsettes for, kommer fra torsjonstråden, og vi kan da sette ligning (5-3) med et negativt fortegn (vi ser på motkraften *fra* tråden på pendelen; i ligning (5-3) så vi på en ekstern kraft på tråden) inn i ligning (5-9) og får svingeligningen

$$I\ddot{\theta} = -D\theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad \text{hvor} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{I}. \quad (5-10)$$

En løsning av denne ligningen er

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \sin \omega_0 t = \theta_0 \cdot \sin \sqrt{\frac{D}{I}} \cdot t, \quad (5-11)$$

som viser at bevegelsen er en enkel harmonisk svingning med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{D/I}$. Bevegelsen vil være harmonisk så lenge D er konstant, med andre ord så lenge vridningen er tilstrekkelig liten til at spenningene i torsjonstråden ikke overskrider elastisitetsgrensen. Torsjonsstivheten D kan nå enkelt uttrykkes ved svingeperioden $T = 2\pi/\omega_0$,

$$D = \frac{4\pi^2 I}{T^2}. \quad (5-12)$$

Herfra ser du at for å bestemme D må du måle T og I . Begge størrelser er lett målbare.

5.2.3 Beregning av gravitasjonskonstanten

Under forutsetning av at andre masser i omgivelsene ikke har målbar innvirkning, og at vi bruker små vinkler θ , gir kombinasjon av uttrykkene (5-2)⁴, (5-8) og (5-12) samt at $I = 2mr^2$ følgende uttrykk for gravitasjonskonstanten:

$$\begin{aligned} G &= F \cdot \frac{b^2}{mM} = D \cdot \frac{1}{8r} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{b^2}{mM} \\ &= \frac{4\pi^2 I}{T^2} \cdot \frac{1}{8r} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{b^2}{mM} = \frac{4\pi^2 2mr^2}{T^2} \cdot \frac{1}{8r} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{b^2}{mM}, \end{aligned} \quad (5-13)$$

som etter litt opprydding gir

³I realiteten er denne svingningen en dempet harmonisk svingning, men vi vil for enkelthets skyld anta at svingningen er harmonisk. Med tanke på relasjonen mellom svingeperioden og torsjonsstivheten som skal utledes her, er effekten av damping neglisjerbar for torsjonspendelen som brukes i Cavendish-eksperimentet.

⁴Merk at massene m_1 og m_2 i Newtons gravitasjonslov tilsvarer m og M her.

$$G = \pi^2 \frac{Sb^2r}{T^2LM}. \quad (5-14)$$

Uttrykket inneholder kun målbare størrelser. Merk at massen m til de små kulene har forsvunnet fra uttrykket for G . Legg også merke til at oppbyggingen av torsjonsvekten sikrer at kraften mellom små og store kuler alltid står vinkelrett på tyngdekraften, slik at forstyrrelser fra gravitasjonsvekselvirkning med jorda blir eliminert. Vi kommer tilbake til eventuelle forstyrrelser fra andre masser i neste delkapittel.

5.3 Feilanalyse i Cavendisheksperimentet

5.3.1 Tilfeldige feil

God eksperimentell planlegging tilsier at hver av de målte størrelsene i Cavendisheksperimentet bør måles med en relativ presisjon som er slik at hver av størrelsene gir omtrent like stort bidrag til totalfeilen i bestemmelsen av gravitasjonskonstanten. Her er noen punkter som du må tenke på i forbindelse med eksperimentet:

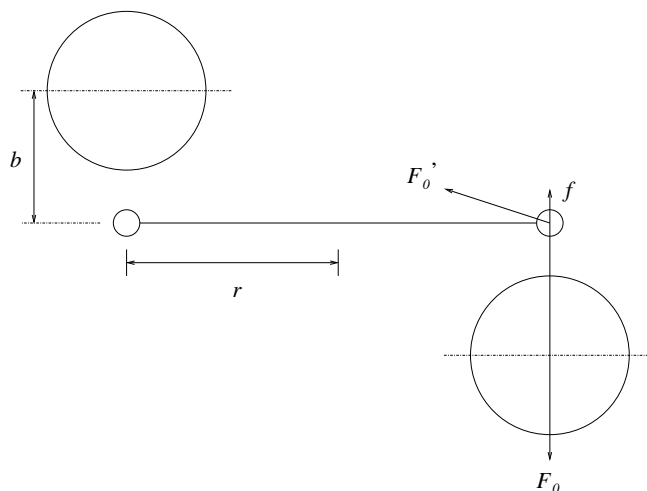
- Kan du fra uttrykket $G = \pi^2 Sb^2r/(T^2LM)$ se hvilke størrelser som må måles med størst relativ presisjon?
- Bruk dette uttrykket for G til å sette opp et uttrykk som viser hvordan den relative feilen $\Delta G/G$ avhenger av relativ feil i de målte størrelsene.
- Anslå de relative målefeilene i eksperimentet.
- Kan feilen i noen av de målte størrelsene neglisjeres i forhold til feilen i de andre?
- Bruk dine estimer av feilen i de målte størrelsene til å estimere feilen i bestemmelsen av gravitasjonskonstanten.

5.3.2 Systematiske feil

Under utledning av uttrykket $G = \pi^2 Sb^2r/(T^2LM)$ tok vi kun hensyn til gravitasjonskraften mellom liten kule m og nærmeste stor kule M , og vi neglisjerte for eksempel gravitasjonskraften mellom m og motsatt stor kule M . Det er klart at en slik forenkling kan føre til en systematisk feil.

For å estimere denne feilen kan du se på kraften mellom en liten kule og borteste store kule:

$$F'_0 = G \frac{mM}{b^2 + 4r^2}. \quad (5-15)$$



Figur 5.3: Korreksjon av systematisk feil i Cavendish' eksperiment. Det opprinnelige uttrykket i kapittel 5.2 tar kun hensyn til gravitasjonskraften mellom liten kule og nærmeste store kule, F_0 . Det virker også krefter mellom liten kule og motsatt stor kule, F'_0 , med en komponent f som bidrar til å redusere det totale dreiemomentet på pendelen.

Denne kraften har, som figur 5.3 viser, en komponent f i motsatt retning av kraften F_0 som skal måles. Med $F_0 = GmM/b^2$ lik kraften uten korreksjon viser figuren at

$$f = F'_0 \cdot \sin \alpha = G \frac{mM}{b^2 + 4r^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4r^2}} = G \frac{mM}{b^2} \cdot \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{3/2}} = F_0 \cdot \beta, \quad (5-16)$$

der

$$\beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{3/2}} \quad (5-17)$$

er den faktoren som den observerte kraften reduseres med i forhold til antakelsene som den forenklede modellen bygger på. Den observerte kraften F' blir dermed

$$F' = F_0 - f = F_0(1 - \beta), \quad (5-18)$$

og den korrigerte G_{kor}' blir

$$G_{\text{kor}}' = \frac{G}{1 - \beta}, \quad (5-19)$$

der G er beregnet fra ligning (5-14). Hvor mange prosent utgjør denne systematiske feilen? Blir G_{kor}' større eller mindre enn G beregnet fra (5-14)?

5.4 Forhåndsoppgaver

For at dere skal få bedre kjennskap til teorien og størrelsene som er i bruk under forsøket, skal dere gjøre noen oppgaver før dere kommer på laboratoriet. Merk at de verdiene som er oppgitt her ikke er helt like de som måles i laboratoriet. La oss si at vi har målt avstanden mellom kulene til $b = 4,5$ cm og massene til kulene $M = 1,5$ kg og $m = 15$ g.

1. Hvor stor gravitasjonskraft F forventer du da mellom stor og liten blykule?

2. Vil denne kraften være målbar med en moderne analysevekt som har en følsomhet på 0,1 mg?

Torsjonsstivheten til torsjonstråden er avhengig av trådmaterialet, trådens lengde og formen på trådtverrsnittet. For en tråd med sirkulært tverrsnitt med diameter d er torsjonsstivheten gitt ved

$$D = \frac{\pi G' d^4}{32 \ell}, \quad (5-20)$$

der G' er trådens skjærmodul⁵ og ℓ er trådens lengde. For en tråd med rektangulært tverrsnitt $h \times t$ hvor $h \gg t$, er torsjonsstivheten gitt ved

$$D = G' \frac{ht^3}{3\ell}. \quad (5-21)$$

Store blykuler, som gir stor gravitasjonskraft, kombinert med en torsjonstråd med lav torsjonsstivhet gir stor følsomhet i torsjonsvekten.

3. Forklar hvorfor disse to kravene til ”optimal ytelse” er motstridende.

4. Vil trådtverrsnittets form spille en rolle for et eventuelt kompromiss mellom optimaliseringskravene?

Torsjonstråden er laget av bronse (skjærmodul $G' = 35$ GPa og bruddgrense $\sigma_b = 500$ MPa) med rektangulært tverrsnitt $h \times t = 0,15 \times 0,01$ mm² og lengde $\ell = 25$ cm.

5. Hvor stor torsjonsstivhet D forventer du at tråden vil ha?

Tyngdepunktsavstanden mellom de små blykulene er $2r = 100,0$ mm.

6. Hvor stor statisk utslagsvinkel $2(\theta_1 + \theta_2)$ forventer du å observere?

Av praktiske grunner må avstanden mellom speil og linjal begrenses til $L = 3$ m.

7. Hvor stort statisk måleskalautslag S forventer du å observere?

8. Hvor stor svingeperiode T forventer du for frie svingninger av torsjonspendelen?

5.5 Eksperimentelt

5.5.1 Apparat

Et skjematisk diagram av torsjonsvekten er vist i figur 5.2. Torsjonsvekten er montert i et lukket kammer for å unngå forstyrrelser fra trekk og lignende. Torsjonsvektens parametre er derfor ikke tilgjengelige for måling. Fabrikanten oppgir følgende verdier:

- Senter-til-senter avstanden for de små kulene $2r = 100,0$ mm.

⁵Skjærmodulen er en materialavhengig konstant som angir materialets deformasjonsrespons når det utsettes for krefter som virker parallelt med materialets overflate (skjærkrefter).

- Massen $m = 0,015$ kg.
- Torsjonstråd av bronse, 25 cm lang med et rektangulært tverrsnitt $t \times h = 0,01 \times 0,15$ mm².

Inspiser apparaturen og legg spesielt merke til speilet som roterer sammen med torsjonstråden, samt den svingbare stangen med de to store blykulene.

5.5.2 Forsiktighetsregler

Siden torsjonsstivheten til tråden i eksperimentet er svært liten, vil eksperimentet i sin helhet være ømfintlig for ytre påvirkninger. Vær derfor generelt forsiktig når du håndterer eksperimentoppsettet for å unngå unøyaktige og feilaktige målinger. Spesielt bør du være klar over følgende:

- Ikke berør stativet med torsjonspendelen mer enn høyst nødvendig.
- Når du beveger de store blykulene, pass på at du ikke «dulter» borti pleksiglasset som beskytter torsjonspendelen. Et triks er å følge med på refleksen (speilbildet) til den store blykulen, og stoppe når refleksen møter den virkelige kulen.
- De store kulene bør anbringes i holderen og laseren slås på i god tid før eksperimentet gjennomføres slik at eventuelle mekaniske rystelser får tid til å falle til ro og temperaturen er stabilisert.
- Alle vinduer og dører må holdes lukket under eksperimentene for å unngå trekk og temperaturvariasjoner som forstyrrer målingene kraftig.
- Blykulene er laget av metallisk bly som er lett deformerbart. Håndter derfor disse med forsiktighet og ikke mist dem i gulvet. Bly er giftig materiale - vask deg derfor på hendene etter at du har tatt på kulene.
- **FARE: Se ikke direkte mot laserstrålen.**

Generelt gjelder som for alle laboratorieøvinger, å behandle utstyret med forsiktighet. Spør hvis det er noe du lurar på.

5.5.3 Måleprosedyre

Du skal nå kartlegge pendelsvingningene i 2×30 minutter for å finne de to likevektspunktene S_1 og S_2 , og dessuten svingeperioden T til pendelen. Under analysen av svingedataene skal du bruke et ferdiglaget program skrevet i Python. Du må derfor laste dataene inn i Python på en slik måte at analyseprogrammet forstår dem. Programmet vil da beregne likevektspunktet for svingingen, svingeperioden og usikkerheten i svingeutslaget. Analyseprogrammet vil lage en figur som vist i figur 5.4.

NB! Det er viktig at du lagrer dataene dine korrekt, ellers kan du miste dem, og da er en halv- til en times arbeid plutselig borte!

Du kan gå fram på følgende måte:

- Åpne Python-vinduet på vanlig måte.
- Skriv inn data i en tekstfil etter hvert som dere samler dem hvert 30. sekund.
 - Første kolonne: Hele minutter.
 - Andre kolonne: Sekunder.
 - Tredje kolonne: Svingeutslag i millimeter.
- Start eksperimentet med å flytte de store blykulene til posisjon 1 (mot anslag ved kammeret på den ene siden). Vent ca 2-3 minutter før dere starter å lese av posisjonen på måleskalaen. Les av hvert halve minutt i 30 minutter og noter resultatene fortløpende i tabellen.

MERK: Be læreren om hjelp hvis likevektspunktet til pendelen (mot formodning) ser ut til å drive til siden.

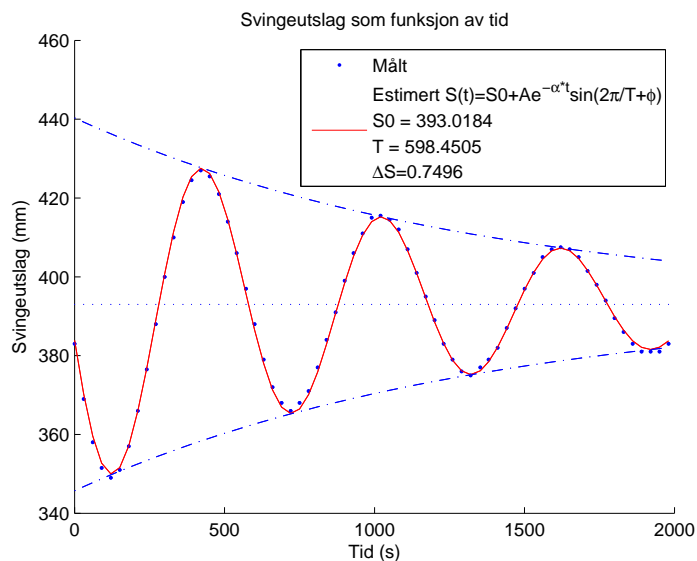
- Når alle data er fylt ut, lagre dataene i en txt-fil som 'S1data.txt' på hjemmekatalogen din.
- Hvis dataene ser greie ut og fluktuerer rundt en likevektsposisjon, kan du dreie de store kulene (forsiktig!) til posisjon nr. 2 (mot anslag ved kammeret på motsatt side). Nå vil torsjonspendelen begynne å svinge seg inn mot en ny likevektsposisjon.
- Lag en ny tabell S2data på samme måte som over og gjenta måleprosedyren på nytt for serie 2.

MERK: Selv om du bruker Python og lagrer resultatene på hjemmekatalogen din, skal journalen din inneholde diagrammene du genererer og henvisninger til elektronisk lager for primærresultatene.

Av dataene du har tatt opp skal du nå finne de to likevektspunktene S_1 og S_2 , og svingeperioden T .

På fagets hjemmeside, eller på skrivebordet på datamaskinen, skal det ligge en fil med navn **Cavendish.ZIP**. Kopier den inn på hjemmekatalogen din. Pakk ut filene som ligger der til den samme katalogen.

- Åpne fila **Cavendish.py** i Python og kjør den. Du vil da få generert et plott av resultatene.
- Du vil nå få opp en figur som i figur 5.4. Hvis du kjørte fila med **S1data** vil den gi deg likevektspunktet S_1 og T for denne svingningen. Les inn og gjør det samme også for **S2data**.
- Mål avstanden L fra speil til meterstav med målebåndet, og anslå usikkerheten i L .
- Bestem M ved å veie begge kulene på vekten og ta et gjennomsnitt av de to. Bestem usikkerheten.



Figur 5.4: Typisk forløp for amplitude sfa. tid for torsjonspendelen i et Cavendisheksperiment. Punktene er eksperimentelle data. Linjen er en tilpasset dempet harmonisk svingning. Dampingen ses som stiplede linjer som omhyller svingningen. Likevektspunktet, S_0 , perioden, T , og usikkerheten i likevektspunktet, ΔS , er estimert av tilpasningsrutinen i Python.

- Bestem tyngdepunktavstanden b fra liten til stor kule, og bestem usikkerheten i b .
MERK: Torsjonsvekten er justert slik at de små kulenes likevektsposisjon er midt i kammeret når begge de store kulene er fjernet. Siden de store kulene ligger til anslag mot kammeret i begge posisjoner, kan avstanden b bestemmes ved å måle kulenes diameter og tykkelsen av kammeret.

5.5.4 Analyse av resultatene

- Beregn $S = |S_1 - S_2|$, og finn usikkerheten i denne.
- Bestem T og usikkerheten i denne ut fra de to svingningene.
- Senter-til-senter-avstanden for de små kulene er oppgitt til å være $2r = 100,0$ mm. Hva tror dere usikkerheten er her utfra hva dere har lært om signifikante siffer?
- Beregn gravitasjonskonstanten G ved hjelp av ligning (5-14).
- Gjør usikkerhetsregning ved å bruke Gauss' feilforplantningslov på ligning (5-14), og bestem usikkerheten ΔG .
- Korrigert G -verdien din mot den systematiske feilen. Bruk ligning (5-19). For å finne usikkerheten i korrigert G -verdi kan du anta at den relative feilen i G_{korrt} er lik den relative feilen i ukorrigert G -verdi.

- Sjekk om tabellverdien for G ligger inne i ditt usikkerhetsintervall? Hvis ikke, hva kan være grunnen til dette?

5.5.5 Avslutning

- Kontroller at du har fullført alle journalføringer og lagret alle elektroniske resultater på hjemmekatalogen din.
- Slå av datamaskinen, rydd laboratorieplassen og forlat plassen i enda bedre orden enn da du fant den.
- Sett de store kulene midt i mellom posisjon 1 og 2.
- La laserlyset stå på – ellers vil det ta lang tid å stabilisere temperaturen i speilet og torsjonstråden for neste gruppe.
- Presenter resultatet ditt for læreren din.

5.6 Rapport fra Cavendisheksperimentet

Du skal skrive en rapport fra Cavendisheksperimentet sammen med din samarbeidspartner. Dere skal følge standardformatet som gjelder for skriving av rapport i laboratoriekurset og bruke tekstbehandlingsverktøyet LaTeX, slik som beskrevet i kapittel 6.

I journalen fra eksperimentet skal du ha gjort ferdig presentasjon av måleresultatene. Under rapportskrivningen bør du legge størst vekt på å øve deg i å skrive de kapitler av rapporten som du har forutsetninger til å skrive fullt ut, det vil si teori, metode og resultater. Dette innebærer at du også bør øve deg i å behandle resultater matematisk, vurdere regne- og målenøyaktighet, presentere måleresultatene i tabeller og diagrammer og dokumentere apparatur og metode ved hjelp av figurer.

Rapporten skal være enkel og disponeres på følgende måte:

- Sammendrag: Meget kort. Svar på: Hva gjorde dere? Hvordan ble det gjort? og Hva ble resultatet? Vær konkret.
- Innledning: Kortfattet, kun noen linjer som sier hva rapporten beskriver.
- Teori og Metode: Gravitasjonsloven og kort introduksjon og definisjon av teoretiske begreper. Beskrivelse av apparaturoppsettet og kort utledning av ligningen som vi bruker for å beregne G med. Skjematisk figur av apparaturoppsettet.
- Resultater og diskusjon: Tabeller og kurvediagram av resultatene, analyse av kurvediagrammet og beregnet verdi for G med usikkerhet. Sammenlign dine resultater med tabellverdier. Diskuter feilkilder og vurder hvilke målinger som bidrar til feil. Foreslå eventuelle forbedringer i den eksperimentelle prosedyren på grunnlag av dette.

Eks: «Resultatene fra eksperimentet er vist i tabell 1. Figur 1 viser et plott av pendelamplituden sfa. tida ...»

- Konklusjon: Kortfattet oppsummering og konklusjon.

Se kapittel om rapportskriving med mer utfyllende informasjon om hva hver del skal inneholde.

Rapporten skrives så godt dere klarer, og leveres til gruppelæreren din. Han/hun vil så gi dere tilbakemelding på denne, med eventuelle utbedringer og rettinger. Dersom rapporten ikke blir godkjent, arbeider dere videre med rapporten, og leverer inn på nytt.

Kapittel 6

RAPPORTSKRIVING

Mål: Her vil dere lære om hvordan en skal skrive vitenskapelige rapporter. Dere skal også få trening i bruk av tekstbehandlingsverktøyet Latex som er et fremragende verktøy for skriving av dokumenter av matematisk-naturvitenskapelig art med mye bruk av matematiske symboler og kryssreferanser.

6.1 Skrivning av rapport

6.1.1 Rapportering av resultater fra eksperimentelt arbeid

Alle som deltar i vitenskapelig og teknisk arbeid, må i større eller mindre grad kunne utforme en endelig skriftlig dokumentasjon av sine undersøkelser. Vitenskapelig arbeid dokumenteres i første omgang i form av en laboratoriejournal, men journalen er et primærdokument som vanligvis omhandler kun en del av en vitenskapelig eller teknisk undersøkelse og er utformet med sikte på en begrenset leserkrets. Den endelige dokumentasjonen av en undersøkelse er vanligvis i form av en rapport, en tidsskriftartikkel eller en bok som er utformet med sikte på en stor leserkrets. Denne er fullstendig og presenterer resultatene fra undersøkelsen i en større sammenheng enn journalen, mens journalen i større grad vil inneholde eksperimentelle detaljer.

Rapporter fra laboratorieundersøkelser bør inkludere all vesentlig informasjon fra journalen i redigert form. I tillegg bør bakgrunnen for at undersøkelsen ble satt i gang kommenteres. Det skal redegjøres for de teoretiske modeller som anvendes i tolkningen av resultatene, og resultater fra teoretiske beregninger bør sammenliknes med de målte verdiene. Resultater fra tidligere undersøkelser bør omtales og sammenliknes med de nye resultatene. Kvalitet, omfang og betydning av de nye resultatene må vurderes i forhold til tidligere resultater.

6.1.2 Skriveprosessen

Mange er usikre på hvor og hvordan de skal begynne å skrive en rapport. Følgende fremgangsmåte er inspirert av O'Connor og Woodford [4].

- Gjør ferdig behandlingen av måleresultatene.
 - Gjør ferdig alle beregninger.
 - Sett opp alle tabeller og skriv tabelltekstene.
 - Tegn alle diagrammer og figurer og skriv diagram- og figurtekstene.
- Kontroller omfanget av det grafiske materialet.
 - Ta de ferdige tabellene, diagrammene og figurene og spre dem ut foran deg som om de var bilder i en tegneserie.
 - Spør deg selv om «tegnserien» forteller historien din godt.

Dersom du synes at det mangler en tabell eller en figur og så videre, så bør du lage den. Hvis du finner unødvendige gjentakelser, ta dem vekk. Juster omfanget av det grafiske materialet inntil du synes at «tegnserien» forteller historien din godt.

- Trekk konklusjoner fra måleresultatene.

Ta deg god tid til å vurdere måleresultatene. Hvis du begynner å skrive før du er ferdig med behandlingen av måleresultatene og har trukket konklusjonene, skriver du egentlig ikke en rapport, men bruker skriveprosessen til å ordne tankene dine. En slik bruk av skriveprosessen kan dog til tider være meget nyttig.
- Skriv et sammendrag i tre setninger. Første setning skal inneholde hva du gjorde, andre setning hvordan du gjorde det og tredje setning hva du fant.

Hvis du ikke kan skrive dette sammendraget, vet du for lite om det du skal dokumentere.

- Sett opp en disposisjon for rapporten.

Det skal gode grunner til for å fravike den tradisjonelle disposisjon for naturvitenskapelige og tekniske rapporter som pleier å inneholde:

Sammendrag, innledning, teori, metode og apparatur, resultater, diskusjon og konklusjon.

- Skriv et utkast til hvert kapittel i stikkordsform og juster stikkordene og kapittelinnledningen til du synes at strukturen og logikken i presentasjonen er god. Hvis rapporten ikke blir veldig lang, kan man godt slå sammen kapitlene 'Teori og metode' (herunder også apparatur), og 'Resultater og diskusjon'.

Innledning. I innledningen skal du forklare hensikten med rapporten, definere omfanget, gi grunnene til at undersøkelsen ble satt i gang og hvor den ble utført. Du skal forklare hvordan undersøkelsen fortsatte fra beslektet tidligere arbeid og sette den inn i en historisk sammenheng, noe som gjerne krever et lite litteraturstudium.

Under skriving av rapporten til Cavendish-eksperimentet kan du godt bruke informasjon du finner i laboratorieheftet om eksperimentet. Finn ut hva som er spesielt med dette eksperimentet. Hvorfor er det egentlig vanskelig å finne G ? Hvilke utfordringer får vi da i det eksperimentelle oppsettet?

Teori og metode. Disse kapitlene kan strengt tatt skrives når som helst i skriveprosessen. Det er imidlertid mye som taler for å vente med endelig utforming av disse til etter at kapitlene om resultater, diskusjon og konklusjon er ferdigskrevet. Da kan du justere presentasjonen av teori og metode til innholdet av de påfølgende kapitler.

Hvis teorien som ligger til grunn for eksperimentet er omfattende og komplisert, kan du skrive et eget teorikapittel. Imidlertid må forutsetningen da være at du enten har bidratt til teoriutviklingen eller at detaljert gjennomgang av teorien er essensiell for å forstå resultatene. I motsatt fall vil det være nok å referere til teorien og kun ta med de viktigste resultatene som da kan inkluderes i innledningen eller kapitlene om metode eller apparatur.

I rapporten dere skal skrive om måling av gravitasjonskonstanten kan du skrive metodekapitlet relativt fullstendig. Det er her greit å slå sammen teori og metode, fordi de henger så tett sammen. Teorien blir jo utviklet på bakgrunn av den målemetoden vi bruker. Husk å få med figur(er) av apparaturopsettet og forklaring på hvordan det fungerer her.

Resultater. Dette kapitlet er sterkt knyttet til laboratoriejournalen fra eksperimentet. Hvis du har skrevet en god journal og fulgt anbefalinger om å gjøre alle tabeller og kurver ferdige under skriving av journalen, er resultatkapitlet lettskrevet. Prøv å gjøre det til et selvstendig kapittel. Presenter resultatene i logisk rekkefølge. Prøv også å legge resultatene frem slik at de resultater som leder til konklusjonen trer klart frem. Bruk tabeller og diagrammer og angi resultater fra eventuell feilanalyse av eksperimentet.

Resultatkapitlet er et av de kapitlene du kan øve deg i å skrive fullstendig og godt på grunnlag av resultater fra eksperimentene i dette og senere laboratoriekurs. Hvis diskusjonskapitlet ser ut til å bli litt magert, kan det være en tanke å kombinere resultatkapitlet og diskusjonskapitlet.

I rapporten om gravitasjonskonstanten kan det være greit å slå sammen resultater og diskusjon til ett kapittel. Her må alle resultatene med, det vil si alle målinger (i tabell) og figurer av måledata i kurvediagram. (Ikke bruk tabell med rådata.) Inkluder også usikkerheter i de ulike måledataene i tabellen. Figurer av tilpassede funksjoner til måledata må være med her. (Lagre figuren du får frem i Python som .eps- eller .pdf-format, og inkluder denne i Latex-dokumentet.) Husk å begynne kapitlet med tekst, og bruk figurer som støtte til teksten du skriver. Det skal refereres til alle figurer minst en gang i selve rapportteksten! Inkluder også usikkerhetsregning her, og presenter tydelig svaret du får for gravitasjonskonstanten med usikkerhet. Svar til slutt på følgende spørsmål: Er deres resultat rimelig i forhold til tabellverdi? Hva kan eventuelle avvik skyldes? Diskuter feilkildene og hvilke som bidrar mest. Finnes det andre feilkilder vi ikke har tatt hensyn til?

Diskusjon. Her er det konklusjonen av resultatene dine som skal diskuteres, og for å kunne diskutere dette må du sette dem inn i en større sammenheng. Dette gjør du ved å relatere resultatene dine til tidligere utførte undersøkelser på samme område, og ved å forutsi de konsekvenser som resultatene av din undersøkelse medfører. Det kan derfor være lurt å

skrive konklusjonen før diskusjonen.

Et av de gjennomgående delmålene i kurset er å skrive en rapport fra målinger av gravitasjonskraften. Din rapport vil ikke ha anledning til å ha en så omfattende diskusjon som kreves i en vitenskapelig rapport. Den diskusjonen du kan føre vil hovedsakelig innskrenke seg til å sammenlikne dine resultater med tabellverdier i lys av den målenøyaktighet du har oppnådd. Hvis det er uoverensstemmelser som kan føres tilbake til din måte å utføre eksperimentet på, bør du forklare grunnen til dette. Ikke spekulér vilt. Diskusjonen i rapporten din blir derfor meget kort og lettskreven. Kun noen få linjer. Den kan ofte med fordel flettes inn i resultatkapittelet.

Konklusjon. Konklusjonen er rapportens viktigste del. I konklusjonen legger du frem ditt egentlige faglige bidrag. Det er som regel formidlingen av dette bidraget som er hovedgrunnen til at du skriver rapporten. Konklusjonskapitlet bør ikke skrives før du har tenkt grundig over resultatene fra dine egne målinger og sammenlignbare målinger gjort av andre i lys av den teori du har valgt å tolke resultatene innenfor.

En god konklusjon er kort og presis, og presenterer kun hovedresultatet og konklusjonen fra diskusjonen. Eventuelt fremtidig arbeid kan også nevnes her.

6.2 Tekstbehandling med Latex

Latex er et typesettingssystem som vi skal bruke til å skrive rapporter. Dette er enerådende i matematikk- og fysikkmiljøet når det gjelder skriving av litt tunge (og svært tunge) matematiske tekster. Prinsippet er omtrent som skriving av html-kode: Det skrives et dokument i rent tekstformat med kommandoer som deretter kjøres gjennom en typesetter og dermed genererer et meget pent tekstbilde. (Teksten du leser her er skrevet i Latex.)

Latex finnes i form av ulike verktøy (for eksempel Texmaker, TeXnicCenter, LEd) på datamaskinene på laboratoriene og på studentenes datasaler. En mal for skriving av en rapport i Latex ligger på nettsidene for emnet. Hjelp til skriving blir gitt av laboratorielæreren underveis. Ellers finnes fyldig introduksjon til skriving med Latex, på nettsider, den beste (med mange linker) på <http://www.pvv.ntnu.no/~berland/latex/>. I tillegg kan du søke opp og laste ned pdf-dokumentet *The not so short introduction to Latex* eller *Introduktion til Latex* (dansk) på nettet. Her finnes gode introduksjoner og mange tips.

Vi viser til avsnitt 6.3.5 for en kort introduksjon til skriving av matematiske uttrykk i Latex.

6.3 Metoder

Vi vil nå ta opp de mer detaljerte krav til bruk av tabeller, figurer, kurvedigrammer og matematiske uttrykk i en rapport. Her vil vi følge IOPP-standarden (The Institute of Physics Publishing). IOPP utgir over 30 europeiske fysikktidsskrifter. Standarden er en del av en omfattende standard for dokumentutlegg tilpasset tekstformatering med Latex, og den er i sin helhet tilgjengelig på vevsadressen <http://iop.org/Journals/textstyle>.

6.3.1 Tabeller

Tabelltyper

Under skriving av rapporter er det hensiktsmessig å skille mellom to tabelltyper: (i) uformelle tabeller og (ii) formelle tabeller.

Uformelle tabeller har verken nummer eller forklaringstekst og er velegnet kun for små oppstillinger som du ikke skal referere til siden. I rapporter brukes ikke disse. Formelle tabeller må ha både tabellnummer og forklaringstekst og bør i dette kurset settes opp ifølge IOPP-standard.

Tabell 6.1: Formell tabell ifølge standarden til IOPP. Legg merke til fraværet av vertikale linjer i tabellen. Kjente symboler, for eksempel « t » for tid, trenger ingen forklaring. « W », og «flow» – med dimensjon energistrømtetthet – bør derimot forklares.

T (K)	t (s)	W (eV)	Flow (10^{-4} Wm^{-2})
123,4	0,00	23,23	11,4
432,1	9,54	24,87	21,3
521,9	21,10	25,94	35,2
644,5	28,59	31,01	45,8
745,6	33,45	33,28	66,9

IOPP-standard for oppsetting av tabeller og tabelloverskrifter

- Tabellteksten skal plasseres over tabellen og avsluttes med et punktum.
- Tabellteksten skal settes med en annen type og/eller mindre type enn hovedteksten.
- Tekst i kolonner og kolonneoverskrifter bør være venstrejusterte.
- Tabeller skal kun ha horisontale skillelinjer.
- Tall i tallkolonner skal justeres slik at desimalkommaene (evt desimalpunktumene) flukter vertikalt.

Persepsjonsundersøkelser viser at øyet har lettest for å sammenlikne tall eller tekst som står på ei horisontal linje. Gode tabeller settes derfor opp slik at de tabellelementer (for eksempel tall) som skal sammenliknes, står på samme horisontale linje. La desimalkommaene flukte vertikalt og avslutt tabellen med ei horisontal linje nederst. Etter norsk standard brukes komma for desimalskilte, i engelsk litteratur brukes punktum.

For å unngå å forstyrre sammenligning av tabellelementer langs horisontalretningen skal vertikale skillelinjer mellom tabellkolonner unngås. Kolonnene adskilles som regel godt nok fra hverandre ved hjelp av et passende mellomrom.

Gjør det til en vane å legge deg opp til denne standarden når du lager tabeller i journalen manuelt. Da slipper du å legge om tabellformatet når tabellen skal inkluderes i en rapport.

Til slutt gis et anbefalt eksempel på hvordan man setter opp en tabell i Latex. Det følgende er kildeteksten til tabell 6.1.

```
\begin{table}[h]
\caption{\sf Formell tabell ifølge standarden til The Institute of Physics.
Legg merke til fraværet av vertikale linjer i tabellen. Kjente symboler,
for eksempel ‘‘$t$’’ for tid, trenger ingen forklaring. ‘‘$W$’’, og
’’flow’’ -- med dimensjon energistrømtetthet -- bør derimot forklares.}
\begin{center}
\begin{tabular}{lr@{,}lll}
\hline
$T$ & \multicolumn{2}{l} {$t$} & $W$ & Flow & \\
(K) & \multicolumn{2}{l} {(s)} & (eV) & ( $10^{-4}$  \rm; Wm-2) & \\
\hline
123,4 & 0&00 & 23,23 & 11,4 & \\
432,1 & 9&54 & 24,87 & 21,3 & \\
521,9 & 21&10 & 25,94 & 35,2 & \\
644,5 & 28&59 & 31,01 & 45,8 & \\
745,6 & 33&45 & 33,28 & 66,9 & \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\label{rapport.tabelleksempel}
\end{table}
```

(Kommentarer: Tabellnummeret legger Latex automatisk inn i starten av tabellteksten. Tabellen sentreres og får merkelapp `rapport.tabelleksempel` som kan refereres til ved å skrive `\ref{rapport.tabelleksempel}`. Komandoen `@{,}` bytter ut kolonneseparatoren med komma, dette gjør at man får tallkolonnene justert etter desimalskillet. Merk at det da benyttes to kolonner til å skrive ett tall (gjelder kolonne to).)

6.3.2 Figurer

Figurtyper

Under skriving av rapporter er det hensiktsmessig å skille mellom tre figurtyper:

(i) kurvedigrammer, (ii) prinsippskisser og (iii) fotografier.

Kurvedigrammer brukes for å vise sammenhenger mellom fysiske størrelser. Prinsippskisser brukes for å forklare sammensetning og virkemåte for apparatuoppstillinger. Vi skal i dette avsnittet hovedsakelig kommentere tegning av prinsippskisser. De samme retningslinjer gjelder også for kurvedigrammer, som blir beskrevet i neste avsnitt.

Den gode figuren

Gode figurer skal være enkle ved at de begrenses til de forhold du hovedsakelig ønsker å illustrere. De skal være klare ved at du bruker skarpe konturer, markere symmetriakser vha. strek–punkt linjer (senterlinjer), markere snitt ved skraving, tydelige målgrenselinjer og tydelige mållinjer med pilspisser og måltall.

Figurer av mekaniske instrumentoppstillinger skal vise alle relevante romlige dimensjoner. Vis tallverdier for romlige dimensjoner med mållinjer og måltall eller angi figurens målestokk. Figurer av elektriske instrumentoppstillinger skal vise komponentverdier og betegnelser på komponenter og instrumenter.

Figurteksten skal plasseres under figuren og avsluttes med et punktum. Den skrives med litt avvikende font (gjørne litt mindre font) enn hovedteksten og rykkes litt inn.

Ved bruk av Latex tas dette vare på ved å ta modell av for eksempel følgende format:

```
\begin{figure}[h]
\begin{center}
\includegraphics[width=0.45\textwidth]{figur1.eps}
\end{center}
\caption{\sf Her skrives figurteksten, som blir i font sans serif.}
\label{rapport.fig.1}
\end{figure}
```

(Kommentarer: Figurnummeret legger Latex automatisk inn i starten av figurteksten. Figuren sentreres og hentes inn fra fila `figur1.eps`.)

Tegning av figurer

Figurer kan tegnes manuelt, men for innsending til tidsskrift må det brukes et datamaskinbasert tegneprogram.

6.3.3 Kurvedigrammer

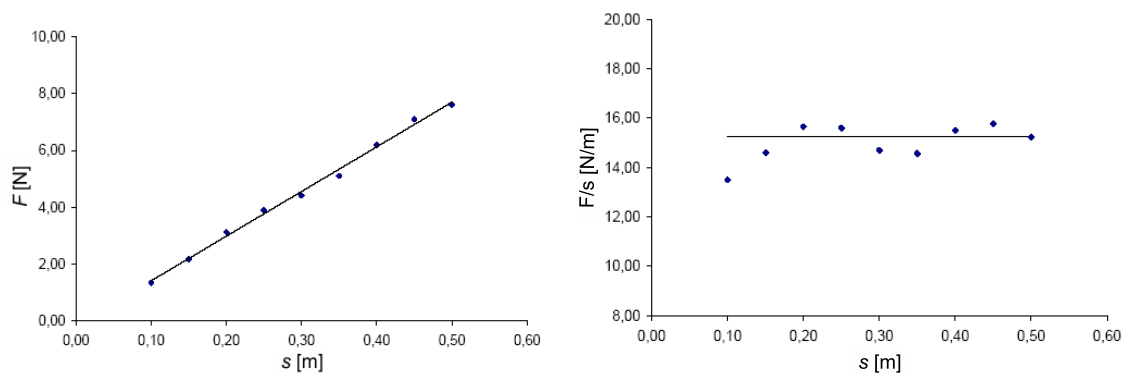
Et kurvedigram er en figur som viser en grafisk framstilling av hvordan en størrelse (den avhengige variabelen) avhenger av en annen størrelse (den uavhengige variabelen). Det er konvensjon å sette kurvedigrammer opp slik at den uavhengige variabelen legges langs den horisontale aksene, og den avhengige variabelen legges langs den vertikale aksene. Kurvedigrammer brukes (i) som visuelle hjelpemidler, (ii) for grafisk bestemmelse av tallverdier og (iii) for å fremstille empiriske relasjoner.

Valg av variabler Før du setter opp et kurvedigram bør du tenke grundig over hvilke størrelser det er mest hensiktsmessig å velge som variable langs aksene. Du bør velge størrelsene slik at (i) diagrammet viser klart de variasjoner eller avvik som du vil demonstrere,

(ii) følsomheten i de variasjoner eller avvik som du vil demonstrere blir størst mulig og (iii) kurven fortrinnsvis blir ei rett linje.

For å sammenlikne eksperimentelle og teoretiske verdier kan du enten plote to kurver i samme diagram hvor den ene viser de eksperimentelle verdiene og den andre de teoretiske, eller plote en kurve over differansen mellom de eksperimentelle og de teoretiske verdiene. Den sistnevnte måten er å foretrekke når differansen er liten i forhold til skalainndelingen på diagrammet.

For å undersøke om en variabel y varierer lineært med en variabel x vil det være mer følsomt å plote forholdet y/x sfa. x enn å plote y alene som funksjon av x , som vist i figur 6.1.



Figur 6.1: Når en størrelse, her kraft F , er forventet å være proporsjonal med en annen størrelse, her lengde s , vil et plott av forholdet F/s være mer følsomt for å vise avvik fra proporsjonalitet enn et plott av F direkte. Merk også angivelse av størrelser og enheter langs aksene.

Diagrammer som fremstiller lineære sammenhenger har mange fordeler. Det er lett å tegne den teoretiske kurven inn i skaren av målepunkter, det finnes gode matematiske metoder for å legge den «beste» linjen inn i en slik punktskare, og det er lett å bestemme tallverdier grafisk fra kurven. Det finnes to måter å sette opp kurvediagrammer slik at kurven blir ei rett linje. Du kan enten (i) velge størrelsene langs aksene slik at kurven blir lineær eller (ii) velge skalainndelingen langs aksene slik at kurven blir lineær.

Et eksempel på linearisering ved å velge hensiktsmessige størrelser langs aksene er vist i figur 2.1 på side 7.

Det er vanlig å bruke logaritmisk skalainndeling for å linearisere potensfunksjoner langs en eller to akser. Skalainndelingen på akse er da ordnet slik at avstanden fra origo til en bestemt skalastrek er lik logaritmen av den verdi som skalastreken representerer. Ved å bruke logaritmisk skalainndeling på den ene akse og lineær på den andre kan eksponentielle sammenhenger av formen $y = a \exp(bx)$ lineariseres og konstantene a og b bestemmes som henholdsvis skjæringspunktet med akse og stigningstallet på kurven. Ved å bruke logaritmisk skalainndeling på begge akser kan uttrykk av formen $y = ax^p$ lineariseres og konstantene a og p bestemmes som henholdsvis skjæringspunktet med akse og stigningstallet på kurven.

I tillegg til linearisering av kurver brukes logaritmisk skalainndeling (i) for å redusere størrelsen av kurvediagrammer, uten at avlesningsnøyaktigheten reduseres når tallverdiene på måltallene langs akse varierer over mange tierpotenser, eller (ii) når man ønsker diagrammer

hvor tilnærmet konstant avlesningsfeil ønskes over hele diagrammet.

Valg av målestokk og enheter Velg målestokk slik at:

- Diagram, akser og påskrift får god plass innenfor kurvearkets ramme.
- Tegneusikkerheten til punktene i diagrammet blir minst mulig i forhold til måleusikkerheten i de verdier som punktene representerer.
- Origo er inkludert i diagrammet hvis du vet (for eksempel fra teori) at kurven skal gå i gjennom origo.
- Relativ avlesnings- og plottenøyaktighet langs aksene i gjennomsnitt blir omtrent like.

Mest mulig lik avlesnings- og plottenøyaktighet langs begge aksene oppnår du ved å velge målestokken slik at kurvens gjennomsnittsstigningstall blir nær 1.

Påskriften langs aksene skal inneholde navn eller symbol for den størrelse som varierer langs aksene samt enhet for denne. Anbefalt standard er *størrelse* [enhet], for eksempel F [mN]. I enheten bør du velge enhetsprefiks slik at måltallenes tallverdi blir mellom 0,1 og 1000. Marker ikke mer enn ca. fem måltall langs aksene.

Valg av antall kurver og målepunkter i et diagram

Tegn kun få kurver i hvert diagram. Forskjellige symboler kan brukes til å skille eksperimentelle punkter tatt opp under forskjellige betingelser. Vær imidlertid forsiktig med dette. Diagrammer hvor det blir tegnet mange kurver adskilt ved bruk av alt for mange forskjellige symboler blir fort uklare.

I diagram som fremstiller målepunkter, skal en fortrinnsvis unngå å bruke trendlinjer eller sammenføye målepunktene med kurver. Dette kan unntaksvis brukes for å tydeliggjøre de fysiske resultatene, men det skal da spesifiseres i figurteksten at kurvene ikke representerer faktiske målinger. For kurver som viser beregnede verdier skal du legge kurven gjennom de beregnede punktene og undertrykke markeringen av punktene.

Når du samler inn måleresultater, bør du ta tettere med avlesninger når kurven forandrer stigning og når den krysser ei annen linje og krysningspunktet skal bestemmes fra diagrammet. For å oppnå en fornuftig avlesningstetthet er det nyttig å plote måleresultatene i et diagram etter hvert som målingene foretas.

Diagramtekst og -nummerering

Nummereringen av diagrammer skal innordnes i nummerrekken for figurer. Diagramteksten skal derfor også følge samme regler som for figurer, som gitt ovenfor.

6.3.4 Matematiske uttrykk

Plassering

Matematiske uttrykk kan plasseres fortløpende i tekstlinja eller frittstående på ei egen linje. Større matematiske uttrykk og uttrykk som inneholder viktig informasjon bør plasseres frittstående. Matematiske uttrykk som det refereres til i teksten må plasseres frittstående og gis fortløpende nummerering.

Plasser et frittstående matematiske uttrykk slik:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \alpha \Delta T. \quad (6-1)$$

Referer til uttrykket på følgende måte: Fra ligning (6-1) kan vi beregne Eventuelt slik: Fra (6-1) kan vi beregne

Det gode uttrykket

Gode matematiske uttrykk er klare og strukturerte. Det skal skilles godt mellom bokstaver og symboler som likner på hverandre. Indekser oppe og nede er korrekt plassert. Indeksering av indekser unngås. Parenteser brukes for å avgrense uttrykk som skal stå i nevner til brøk eller skal heves opp i en potens. Indekser oppe bør omslutes av en parentes for ikke å forveksle med potensering, for eksempel $v_{\max}^{(1)}, v_{\max}^{(2)}$.

Generelt kan man si at hvis man følger IOPP-standardens for matematiske uttrykk, vil krav til klarhet og god struktur være ivarettatt:

- For enkle brøker i teksten foretrekkes skrå brøkestrek fremfor horisontal brøkestrek.
- For frittstående uttrykk foretrekkes horisontal brøkestrek.
- Konstruksjonen $(\dots)^{-1}$ foretrekkes fremfor bruk av skrå brøkestrek som $1/(\dots)$.
- For å unngå forveksling brukes parenteser i følgende rekkefølge $\{[(...)]\}$.
- Kursive typer («italic») brukes alltid for fysiske variabler i matematiske uttrykk.
- I matematiske uttrykk anbefales antikva typer («roman») for differensialtegnet «d» eksponentialfunksjonen «e», den imaginære enheten $i=\sqrt{-1}$. Dette *skal* brukes for å betegne funksjoner som sin, cos, tan, arctan, ln, exp og så videre.
- Alle enheter skrives i antikva type (ikke kursiv).
- Indekser oppe og nede skrives med antikva når de er merkelapper og med kursiv når de er variabler.
- Eksponentialfunksjonen skrives som $\exp(\dots)$ eller $\exp\{\dots\}$ unntatt når $\{\dots\}$ er et enkelt symbol da formen e^x kan brukes.

- Uttrykkene \ln og \lg brukes for henholdsvis \log_e og \log_{10} .
- Frittstående uttrykk gis enten en egen ligningsmarg eller sentreres.
- Frittstående uttrykk nummereres på høyre side i parentes.

6.3.5 Oppsetting av matematiske uttrykk med Latex

Ved bruk av Latex tas det automatisk vare på mange av kravene ovenfor:

- Alle matematiske uttrykk og enkeltsymboler brukt i tekstlinjer omsluttet med $\$ \dots \$$.
- Frittstående ligninger omsluttet av:
 $\backslash\text{begin}\{\text{equation*}\} \dots \backslash\text{end}\{\text{equation*}\}$ (uten nummerering)
 $\backslash\text{begin}\{\text{equation}\} \dots \backslash\text{end}\{\text{equation}\}$ (med nummerering)
 og alle symboler vil da bli gitt kursiv type.
 Når enheter inngår innenfor disse ligningene settes de til antikva ved for eksempel:
 $\{\backslash\text{rm Nm}^{-2}\}$.
- Funksjonsnavnene \sin , \cos , \tan , og så videre, blir satt i rett opprett type når de i Latex, kodes som:
 $\backslash\text{sin}$, $\backslash\text{cos}$, $\backslash\text{tan}$, for eksempel: $\$y(x) = \backslash\text{sin } x/2 \$$ gir $y(x) = \sin x/2$.

Kapittel 7

ROTASJONSBEVEGELSE, DREIEMOMENT OG DREIEIMPULS

Mål: Hensikten med oppgaven er å bli kjent med begrepene vinkelhastighet og vinkelakselerasjon og lovene for rotasjonsbevegelse om en fast akse.

7.1 Teori

I dette eksperimentet skal rotasjonsdynamikk undersøkes gjennom tre delforsøk. I det første forsøket skal vi undersøke vinkelakselerasjonen ved konstant ytre dreiemoment, i det andre forsøket skal vi undersøke bevarelse av dreieimpuls mellom to roterende skiver mens det siste forsøket går ut på å undersøke bevarelse av dreieimpuls i sammenstøt mellom ei kule og ei roterende skive.

7.1.1 Treghetsmoment

Treghetsmomentet til et stivt legeme er definert som

$$I = \int_{\text{legeme}} r^2 dm, \quad (7-1)$$

altså en sum over alle infinitesimale masseelement dm som legemet består av, og der r av avstanden fra masseelementet til aksens.

Av ligning (7-1) ser vi at treghetsmomentet til en punktmasse m i avstand r fra rotasjonsaksen er

$$I = mr^2. \quad (7-2)$$

For ei uniform skive med masse M og radius R og rotasjonsakse i sentrum av skiva blir treghetsmomentet

$$I = \frac{1}{2}MR^2. \quad (7-3)$$

For en homogen stav med lengde L og masse M som roterer rundt massemidtpunktet (sentrum av staven), blir treghetsmomentet

$$I = \frac{1}{12}ML^2. \quad (7-4)$$

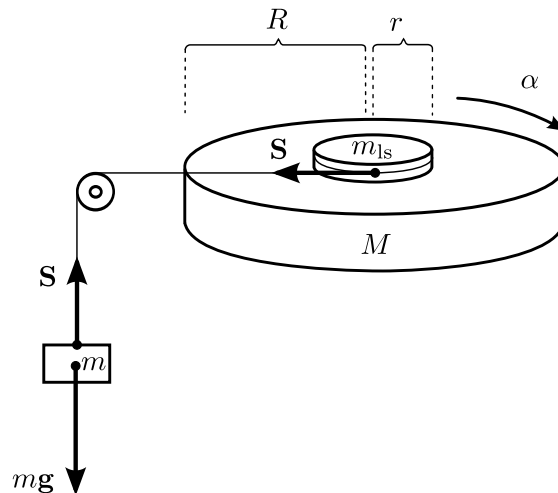
Treghetsmomentet om sentrum til ei kule med uniformt fordelt masse m og radius r er

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \quad (7-5)$$

Dersom vi har et roterende legeme som består av flere enkle geometrier, kan vi dele opp integralet i ligning (7-1) i en sum over treghetsmomentene til de enkle geometriene hver for seg. Det vil vi ha nytte av i dette eksperimentet.

7.1.2 Eksperiment 1: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre dreiemoment

Oppsettet som brukes er vist i figur 7.1. Ei skive settes i rotasjon ved at den utsettes for et konstant ytre dreiemoment. Skiva beveger seg tilnærmet friksjonsfritt på en luftstrøm som tilføres under skiva. På toppen av skiva er det fastmontert ei anna lita skive som holder en tråd forbundet med en fallende masse m . Tråden beveger seg tilnærmet friksjonsfritt over en trinse.



Figur 7.1: Dreieskive med konstant ytre dreiemoment. En fallende masse er forbundet med den roterende skiva ved hjelp av en tråd som ruller på en trinse og overfører et dreiemoment på den roterende skiva.

Bevegelsen til den fallende massen, som skaper det ytre dreiemomentet til skiva, er bestemt av Newtons 2. lov,

$$mg - S = ma. \quad (7-6)$$

Her er S snordraget, og g er tyngdens akselerasjon.

Rotasjonsbevegelsen til skiva er bestemt av Newtons 2. lov for rotasjon, som sier at dreiemomentet τ på skiva er lik produktet av treghetsmomentet I og vinkelakselerasjonen α ,

$$\tau = Sr = I\alpha. \quad (7-7)$$

Her er r snordragets arm. Her har vi antatt at \mathbf{S} og \mathbf{r} står vinkelrett på hverandre. Hvis dette ikke er tilfellet, er $\tau = Sr \sin \varphi$, hvor φ er vinkelen mellom \mathbf{S} og \mathbf{r} .

Den fallende massen og den lille skiva er forbundet med en tråd, slik at dersom det fallende legemet beveger seg en distanse x , vil den ytre diameteren på skiva bevege seg en tilsvarende distanse. Det vil si at

$$x = r\theta, \quad (7-8)$$

der θ er vinkelen som skiva har rotert, målt i radianer. Denne relasjonen kalles rullebetingelsen. Dobbeltderivasjon med hensyn på tiden t (husk at r er konstant) gir følgende relasjon mellom akselerasjonen til den fallende massen og vinkelakselerasjonen til den roterende skiva,

$$a = r\alpha. \quad (7-9)$$

Ligningene (7-9) og (7-7) innsatt i (7-6) gir

$$mr\alpha = mg - \frac{I\alpha}{r}, \quad (7-10)$$

som kan løses for vinkelakselerasjonen,

$$\alpha = \frac{mgr}{mr^2 + I}. \quad (7-11)$$

Merk at treghetsmomentet I her er summen av treghetsmomentet til både den lille og den store skiva,

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}m_{\text{ls}}r^2, \quad (7-12)$$

der M og R er henholdsvis massen og radien til den store skiva, og m_{ls} og r er henholdsvis massen og radien til den lille skiva, der radien samsvarer med angrepspunktet til snorkraften. Innsatt i ligning (7-11) blir vinkelakselerasjonen

$$\alpha = \frac{mgr}{(m + \frac{1}{2}m_{\text{ls}})r^2 + \frac{1}{2}MR^2}, \quad (7-13)$$

der alle størrelsene som inngår er lett målbare. Når det første leddet i nevneren er lite i forhold til det andre, kan dette neglisjeres, og det endelige uttrykket for vinkelakselerasjonen blir

$$\alpha = \frac{2mgr}{MR^2}. \quad (7-14)$$

Her kan en se at vinkelakselerasjonen øker proporsjonalt med m og r og omvendt proporsjonalt med treghetsmomentet til den store skiva.

7.1.3 Eksperiment 2: Bevaring av dreieimpuls

Dreieimpulsen til et legeme som roterer om en fast akse med vinkelhastighet ω er

$$L = I\omega. \quad (7-15)$$

Dersom det ikke virker noe ytre dreiemoment på systemet, er dreieimpulsen bevart. I eksperimentet skal vi la to skiver med treghetsmoment I_1 og I_2 rotere uavhengig med forskjellig vinkelhastighet ω_1 og ω_2 . Vi skal deretter la disse skivene falle sammen, slik at de etter sammenstøtet roterer med samme vinkelhastighet ω . Dersom en antar bevarelse av dreieimpuls, må dreieimpulsen før og etter sammenstøtet være den samme,

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega. \quad (7-16)$$

Løser vi ligningen for ω får vi

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}. \quad (7-17)$$

Her er alle treghetsmomentene gitt ved ligning (7-3) for den aktuelle skiva. Vi gjør nå en antagelse om at treghetsmomentene til de to skivene er like, $I_1 = I_2$. Vi får da at vinkelhastigheten til systemet etter sammenstøtet simpelthen er gjennomsnittet av vinkelhastighetene til de to skivene før sammenstøtet,

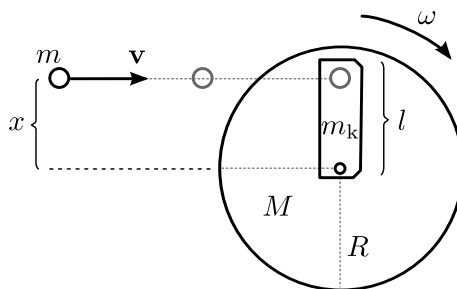
$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (7-18)$$

I dette forsøket skal vi også undersøke energien til systemet før og etter sammenstøtet. Vi må da undersøke den kinetiske energien til et roterende legeme, dvs rotasjonsenergien, gitt ved

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (7-19)$$

7.1.4 Eksperiment 3: Bevaring av dreieimpuls

En enkel skisse av systemet som skal undersøkes er vist i figur 7.2. Ei kule med masse m og hastighet v kolliderer med ei roterbar skive som i utgangspunktet står stille. Etter sammenstøtet vil kula og skiva utgjøre en enhet, med treghetsmoment I , og rotere med vinkelhastighet ω .



Figur 7.2: Analyse av støtprosessen. Ei kule i fart fanges av ei stillestående skive slik at kula og skiva roterer med samme vinkelhastighet etter sammenstøtet.

Før sammenstøtet står skiva stille, og dreieimpulsen er gitt av kulas impuls og dens posisjon relativt rotasjonsaksen,

$$\mathbf{L}_{\text{fr}} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (7-20)$$

Her er \mathbf{v} kulas hastighetsvektor, og \mathbf{r} er kulas posisjon relativt rotasjonsaksen. Dreieimpulsens størrelse før kollisjonen kan fra dette skrives

$$L_{\text{fr}} = xmv, \quad (7-21)$$

der x er avstanden som kula har fra rotasjonsaksen når kula er på det punktet i banen der \mathbf{v} og \mathbf{r} står vinkelrett på hverandre.

Vi antar nå at kula fanges av kulefangeren i dette punktet. Dreieimpulsen til systemet etter dette er kun gitt av rotasjonsbevegelsen til skiva med kula,

$$L_{\text{etter}} = I\omega. \quad (7-22)$$

Dermed blir vinkelhastigheten til samlet system etter støtet

$$\omega = \frac{xmv}{I}. \quad (7-23)$$

Trehetsmomentet til samlet system kan finnes ved å betrakte legemet som et system bestående av 3 deler, skive, kulefanger og kule,

$$I = I_{\text{skive}} + I_{\text{kulefanger}} + I_{\text{kule}}. \quad (7-24)$$

Trehetsmomentet til skiva er gitt av ligning (7-3) mens trehetsmomentet til kula kan finnes ved å betrakte denne som en punktmasse med avstand ("arm") x til rotasjonsaksen (se ligning (7-2)), $I_{\text{kule}} = mx^2$. Kulefangeren kan betraktes som en stav som roterer om endepunktet sitt. Da er trehetsmomentet gitt ved Steiners sats,

$$I_{\text{kulefanger}} = \frac{1}{12}m_{\text{k}}l^2 + m_{\text{k}}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_{\text{k}}l^2. \quad (7-25)$$

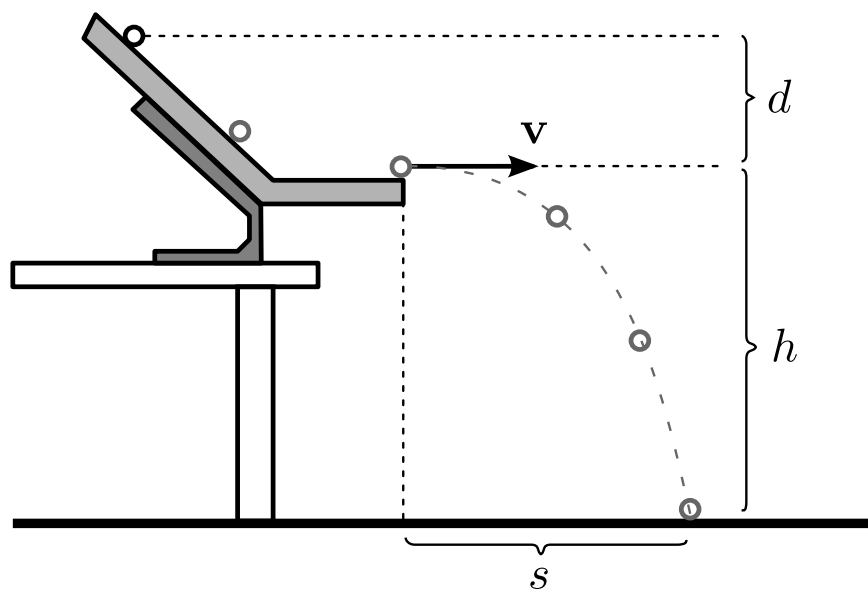
Her er m_{k} og l henholdsvis massen og lengden til kulefangeren. Innsatt i (7-23) får vi nå

$$\omega = \frac{xmv}{\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}m_{\text{k}}l^2 + mx^2}. \quad (7-26)$$

Dersom man betrakter de to siste leddene i nevneren som små i forhold til det første, ser en at vinkelhastigheten øker proporsjonalt med dreieimpulsen.

Kulas hastighet v kommer av at kula slippes nedover et skråplan, som etterfølges av en horisontal bane inn mot kulefangeren. Kulas hastighet kan måles på følgende måte: Slipp kula fra et fast punkt på skråplanet som vist i figur 7.3. Mål avstandene s og h . Den horisontale hastigheten er da

$$v = \frac{s}{t}, \quad \text{som med } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{gir } v = s\sqrt{\frac{g}{2h}}. \quad (7-27)$$



Figur 7.3: Måling av kulas horisontale hastighet. Kula slippes fra rampen, og hastigheten kan finnes ved å måle vertikal og horisontal avstand for fallbevegelsen.

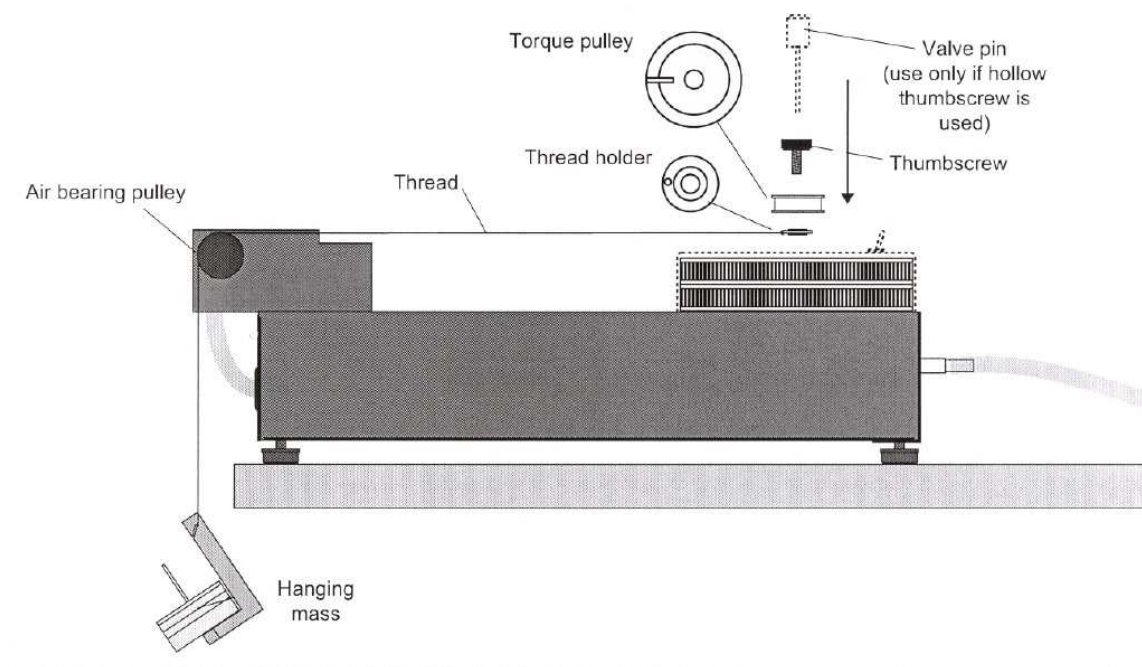
7.2 Eksperimentell gjennomføring

7.2.1 Roterende skiver og luftputebanen

I figur 7.4 vises det eksperimentelle oppsettet som er sentrum for undersøkelsene i denne oppgaven. De mest sentrale elementene er de to dreieskivene som kan flyte tilnærmet friksjonsfritt mot hverandre og mot underlaget på grunn av at en luftstrøm under trykk kan presses ut mellom de to skivene og mellom den nederste skiva og underlaget.

- Ikke roter skivene uten at lufttrykket er på.
- Sjekk at instrumentet er i vater ved å bruke dåselibellen¹ på apparaturen. Juster føttene ved behov.
- Dere skal nå åpne for luftstrømmen ved bruk av veggmontert håndtak. Det er også en ventil montert på apparaturen med lufttrykksmåler. Bruk denne til å kontrollere at lufttrykket til skivene er $4,8 - 7,0 \cdot 10^4$ pascal ($7 - 10$ psi; pounds per square inch).
- Skivene skal nå kunne rotere tilnærmet friksjonsfritt. Kontroller bruken av de to lukkepinnene slik at:
 - Begge skiver roterer fritt i forhold til hverandre og underlaget.
 - Øverste skive roterer fritt, nederste skive ligger fast på underlaget.
 - Øverste skive ligger fast på nederste skive, som sammen roterer i forhold til underlaget.

¹En dåselibelle er et rundt væskefylt kammer med luftboble som kan brukes til å se om en flate er vannrett i begge retninger samtidig (i motsetning til et vanlig vater som kun kan sjekke en retning om gangen). Dåselibellens toppflate er svakt kuleformet, slik at luftboblen vil plasseres sentrert innenfor sirkelmerket dersom flaten er vannrett.



Figur 7.4: Figur av det eksperimentelle utstyret som brukes under det første eksperimentet: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre dreiemoment.

7.2.2 Oppsett av Pasco DataStudio og kalibrering av sensor

Dere skal nå sette opp Pasco DataStudio slik at dere er klare for å måle. En grunnleggende innføring til systemet finnes i kapittel 3.3. DataStudio kontrollerer målingene av rotasjonsbevegelsen til de to skivene ved hjelp av en fotodiode. På periferien av skivene er det 200 parallelle lyse og mørke striper, hver med tykkelse $l = 1$ mm. En lysstråle sendes inn på periferien og blir reflektert til fotodioden, som gir høyt signal når den reflekteres fra den lyse stripen og lavt signal fra den mørke stripen. Signalet fra fotodioden er koblet til en teller, slik at samlet antall lyse og mørke streker N som dioden har passert blir registrert. Vinkelen θ blir regnet ut som

$$\theta = \frac{\text{sirkelbue}}{\text{radius}} = \frac{Nl}{R}. \quad (7-28)$$

- Husk å lagre alt du gjør i DataStudio på hjemmeområdet ditt med jevne mellomrom.
- Koble til to sensorer for rotasjonsmålinger «Rotational Dynamics Apparatus» (en for hver skive).
- Sett målefrekvensen til 2 Hz.
- Start målingen og sjekk at når du manuelt roterer ei skive en hel runde, får du avlesningen 360° . Merk at sensoren registrerer kun endring av vinkelposisjonen, ikke retning. Det vil si at uansett hvilken retning du roterer skivene vil du få at vinkelen øker i DataStudio.

7.2.3 Eksperiment 1: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre dreiemoment

Nå skal dere måle vinkelakselerasjonen til en sirkulær skive under påvirkning av et konstant ytre dreiemoment, og se om det stemmer med teorien som ble utledet i kapittel 7.1.2.

- Monter opp loddet med bruk av tråden og den lille skiva, og plasser tråden over trinsen. Plasser lukkepinne slik at den nederste skiva ligger på underlaget, mens den øverste roterer fritt.
- Sett systemet i gang til å svinge, og start målingen i DataStudio. Se på målingene av vinkelakselerasjonen fortløpende mens DataStudio registrerer målingene. Pass på at utslaget til systemets svingninger er såpass store at dere får minimum 5 målepunkter med noenlunde konstant akselerasjon ved hvert utslag. Når dere er fornøyd med utslaget, bør dere ta i hvert fall 3 til 4 perioder med målinger før dere stopper målingene.
- For å finne en måleverdi for akselerasjonen kan dere bruke statistikkfunksjonen i DataStudio. Ta for dere området der akselerasjonen er rimelig konstant i et utslag og finn middelerdien til et visst antall målepunkter for dette utslaget. Gjenta prosessen for 4-6 utslag, like mange positive som negative. Pass på at dere tar med like mange målepunkter i hvert utslag.²
- Som målverdi for akselerasjonen α kan dere nå finne middelerdien til disse 4-6 middelerdiene for utslagene, og som målfeil kan dere bruke standardfeilen.
- Finn nå vinkelakselerasjonen α som dere skulle fått ved bruk av det teoretiske uttrykket (7-14). Det vil si at dere må måle alle størrelser som inngår på høyre side i ligning (7-14) og anslå feil i alle disse. Regn ut α og finn $\Delta\alpha$ ved bruk av Gauss' feilforplantningslov.
- Sammenlign de to verdiene på α og diskuter, særlig med tanke på feilkilder.

7.2.4 Eksperiment 2: Bevaring av dreieimpuls

To skiver kan rotere friksjonsfritt og uavhengig av hverandre ved hjelp av luftputer. Luften som strømmer mellom skivene kan stenges av slik at de faller sammen og beveger seg som et legeme. Dere skal nå kontrollere om dreieimpulsen bevares ved dette sammenstøtet, se teorien i kapittel 7.1.3.

- Plasser lukkepinnene slik at begge skivene roterer tilnærmet uavhengig av hverandre og av underlaget.
- Start måling av vinkelhastighet for begge skivene i DataStudio, og sett begge skivene i rotasjon med tydelig ulik rotasjonshastighet.

²Dersom dere har ulikt antall målepunkter i noen av utslagene, vil måleverdiene i utslagene med få målepunkt vektet høyere enn måleverdiene i utslagene med flere målepunkt. I dette forsøket har dere ikke grunnlag for å vekte noen målepunkt mer enn andre.

- Dra ut lukkepinnen slik at luftstrømmen mellom skivene faller bort. Skivene vil da falle sammen og rotere med samme vinkelhastighet.
- Avslutt målingene når skivene har rotert sammen i noen sekunder.
- Finn vinkelhastigheten til begge skivene før og etter kollisjonen (ω_1 , ω_2 og ω) og finn fornuftige verdier for feilen i disse størrelsene. Diskuter gjerne med veileder.
- Finn ω ved bruk av det teoretiske uttrykket i ligning (7-18). Finn $\Delta\omega$ ved bruk av Gauss' feilforplantningslov.
- Sammenlign ω funnet eksperimentelt og ved bruk av ligning (7-18), og diskuter.
- Bruk ligning (7-19) og finn mekanisk energi før og etter sammenstøtet. Er den mekaniske energien bevart?

7.2.5 Eksperiment 3: Bevaring av dreieimpuls

I det *siste eksperimentet* vil en studere bevaring av dreieimpuls og impuls i en kollisjon. Den øverste skiva, som beveger seg friksjonsfritt og har en fastmontert kulefanger, treffes av ei kule med fart. Etter støtet mot fangeren blir kula en del av det roterende systemet. En vil undersøke om kulas dreieimpuls før støtet er like stor som systemets dreieimpuls etterpå.

- Monter opp kulefangeren på den øverste skiva og plasser lukkepinnen slik at den øverste skiva roterer tilnærmet uavhengig av den nederste mens den nederste ligger fast på underlaget.
- Finn frem kula og skråplanet, og plasser skråplanet slik at kula vil fanges av kulefangeren når kula slippes, fortrinnsvis med en stor avstand til rotasjonsaksen.
- Start måling av vinkelhastigheten til den øverste skiva i DataStudio.
- Pass på at den øverste skiva står i ro, og slipp kula. Husk posisjonen som kula ble sluppet i fra. Kula skal nå fanges av kulefangeren, og skiva vil settes i rotasjon. La skiva rotere i noen sekunder før du avslutter målingene i DataStudio.
- Dersom forsøket ikke var vellykket, gjenta de to forrige punktene. Ellers kan dere skru av lufttilførselen for å begrense støymengden for resten av laboratorieøkten.
- Bruk DataStudio til å finne det eksperimentelle resultatet av vinkelhastigheten $\omega \pm \Delta\omega$.
- Bruk måleskalaen på kulefangeren til å måle avstanden x og anslå verdi for Δx .
- Sett opp skråplanet som beskrevet i kapittel 7.1.4 og vist i figur 7.3. Gjør 4-6 slipp av kula fra samme posisjon som over og bruk dette til å finne verdier for hastigheten til kula med usikkerhetsintervall. Du vil her kunne ha nytte av å legge et A4-ark der kula lander, da kula vil sette merker i arket. Dette vil forenkle oppmålingen av s . Gjør også måling av slipp høyden d på skråplanet.
- Bruk tilgjengelig måleutstyr og mål resten av størrelsene med usikkerhet i ligning (7-26).

- Finn ω og $\Delta\omega$ ved hjelp av ligning (7-26) og Gauss' feilforplantningslov. For $\Delta\omega$ kan du anta at treghetsmomentet til kulefangeren og kula kan neglisjeres i forhold til skivas treghetsmoment.
- Sammenlign eksperimentelt målt og teoretisk funnet ω . Diskuter resultatene.
- Demonter kulefanger, og rydd opp i alle løse deler i og ved det eksperimentelle oppsettet. Sørg for at det er minst like ryddig som det var da dere kom.

7.2.6 Ekstraoppgaver

Under utledningen av de teoretiske uttrykkene i kapittel 7.1 er det gjort noen antagelser for å forenkle de analytiske uttrykkene. En god fysiker vil, såfremt det er mulig, sjekke at antagelsene er rimelige, og det er det dere skal gjøre her.

- I den første oppgaven (se kapittel 7.1.2) gjøres en antagelse om at det første leddet i nevneren i ligning (7-13) er neglisjerbart. Sjekk denne antagelsen ved å regne ut vinkelakselerasjonen α ved bruk av ligning (7-13) og kontroller at verdien du får stemmer overens innenfor usikkerhetsintervallet med vinkelakselerasjonen som ble funnet ved ligning (7-14).
- I den andre oppgaven (se kapittel 7.1.3) ble det gjort en antagelse om at treghetsmomentene til de to skivene var like. Sjekk denne antagelsen ved å regne ut vinkelhastigheten ved bruk av ligning (7-17) og kontroller at verdien du får stemmer overens innenfor usikkerhetsintervallet med vinkelhastigheten som ble funnet ved ligning (7-18).
- I den tredje oppgaven over har dere neglisjert bidrag fra små treghetsmoment under beregning av uttrykk for usikkerhet. Sjekk denne antagelsen ved å bruke det eksakte uttrykket når feilforplantningen skal beregnes. Diskuter gyldigheten av antagelsen i lys av dette.

Kapittel 8

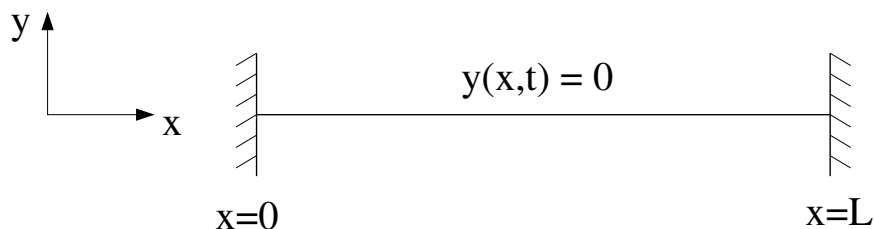
STÅENDE BØLGER PÅ STRENG

Mål: I denne oppgaven studerer vi resonansfrekvensene som svarer til stående transversale harmoniske bølger på en streng.

8.1 Teori

8.1.1 Bølgeligningen

En streng (snor, tråd) strekkes ut til ei rett linje dersom snordraget S er mye større enn andre ytre krefter som virker på strengen (f.eks strengens tyngde):



Figur 8.1: Streng i likevekt. Strengen har lengde L og er fastspent i begge ender.

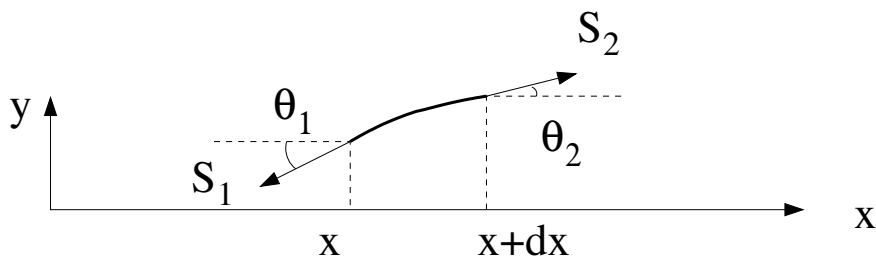
I likevekt er utsvinget null, i alle posisjoner x og til enhver tid t : $y(x, t) = 0$. En forstyrrelse fra likevekt vil forplante seg langs strengen. La oss anta at utsvinget fra likevekt er lite, og at alle deler av strengen bare beveger seg vertikalt. Newtons 2. lov gir oss $y(x, t)$, den vertikale bevegelsen til et strengelement i posisjon x :

Fravær av horisontal bevegelse innebærer at

$$S_1 \cos \theta_1 = S_2 \cos \theta_2 = S.$$

For den vertikale bevegelsen gir Newtons 2. lov

$$S_2 \sin \theta_2 - S_1 \sin \theta_1 = dm \ddot{y},$$

Figur 8.2: Strengement mellom x og $x + dx$.

der $dm = \mu dx$ er strengelementets masse når strengen har masse μ pr lengdeenhet. Denne ligningen dividerer vi med S og får

$$\tan \theta_2 - \tan \theta_1 = \frac{\mu}{S} dx \ddot{y}.$$

Slik de to vinklene er definert er det klart at $\tan \theta_1 = (\partial y / \partial x)_x$ og $\tan \theta_2 = (\partial y / \partial x)_{x+dx}$. Divisjon av ligningen med dx gir dermed

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

der vi har innført $v^2 = S/\mu$. Dette er bølgeligningen. Den generelle løsningen er

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt),$$

der f og g er (praktisk talt) vilkårlige funksjoner som beskriver utsving fra likevekt som forplanter seg i hhv positiv og negativ x -retning, med hastighet v . Med andre ord, en liten transversal forstyrrelse fra likevekt på en slik streng vil forplante seg langs strengen med hastighet $v = \sqrt{S/\mu}$.

8.1.2 Stående bølger

Mulige løsninger av bølgeligningen er harmoniske bølger med bølgelengde λ og frekvens f , på formen

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx \pm \omega t),$$

med bølgetall $k = 2\pi/\lambda$ og vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f$. På en streng med endelig lengde L , fastspent i begge ender, vil en sum av to bølger som forplanter seg i hver sin retning være av spesiell interesse:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] \\ &= 2y_0 \sin kx \cos \omega t. \end{aligned}$$

Her har vi brukt identiteten $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$. Summen av de to vandre-bølgene er en svingning med posisjonsavhengig amplitude, $2y_0 \sin kx$, og samme frekvens $f = \omega/2\pi$ som de opprinnelige bølgene. Dette kalles gjerne en stående bølge. Vi ser at kravet om null utsving i $x = 0$ allerede er oppfylt. Kravet om null utsving i $x = L$ gir de mulige bølgelengdene, med tilhørende frekvenser, for stående bølger:

$$y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda_n = 2L/n \Rightarrow f_n = v/\lambda_n = n\sqrt{S/\mu}/2L.$$

Her er $n = 1, 2, 3, \dots$

8.2 Utstyr

- Signalgenerator
- Mekanisk oscillator
- Ledninger med bananstikk
- Snorer
- Trinse
- Lodd, loddholder
- Vekt

8.3 Eksperimentell gjennomføring

- Mål resonansfrekvenser, fra grunntonen ($n = 1$) og oppover, for ei valgt snor og med gitt snordrag, ved å generere stående bølger på snora med signalgeneratoren og den mekaniske oscillatoren. Sammenlign målte og beregnede resonansfrekvenser.
- Velg en av resonansfrekvensene f_n og gjør målinger som viser hvordan f_n varierer med snordraget S og massen μ pr lengdeenhet (dvs snortypen).

Vurder selv hvordan dere best kan framstille resultatene, med tabeller og figurer. Husk å dokumentere beregnet eller estimert målenøyaktighet.

Bibliografi

- [1] G.L. Squires, *Practical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge. 2001)
- [2] P.J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 633 (2008).
- [3] H. Cavendish, *Philosophical Transactions* **17**, 469 (1798).
- [4] M. O'Connor and F.P. Woodford, *Writing Scientific Papers in English* (Elsevier, Amsterdam. 1975).

Tillegg A

NOEN RÅD OM SKRIVING AV FYSIKKRAPPORTER

Ole Olsen, Institutt for fysikk, NTNU, N-7491 Trondheim

Sammendrag

Et sammendrag av en rapport er en kompakt og knusktørr beskrivelse av rapportinnholdet, og er ment for lesere som raskt vil sette seg inn i problemstilling, metode og resultater. Ved skriving av sammendraget skal en forestille seg at det ikke er en del av rapporten. Sammendrag skal alltid utføres slik at det egner seg for bruk i databaser (ISI, INSPEC) og referattidsskrifter (Physics Abstracts). Sentrale måleresultater skal derfor alltid inkluderes, gjerne med usikkerheter, og alltid med dimensjoner. Gi avkall på avsnitt og innrykk. Setningene skal være fullstendige, det vis si inneholde subjekt og verbal. Typisk lengde kan være 50 – 100 ord. Dersom referanser unntaksvis er nødvendig skal de skrives fullt ut, uten henvisning til litteraturlista i selve rapporten. Det er ikke uvanlig å la linjeavstand og/eller skrifttype avvike fra det som er brukt i rapporten.

1. Innledning

Å skrive en brukbar rapport burde være en av de enklere oppgavene til studenter ved NTNU. Når dette ikke er tilfellet, har det helt bestemte årsaker. Den viktigste er trolig at mange studenter ikke er klar over at det er utkrystallisert normer og konvensjoner innen de enkelte fagdisiplinene. Med «rapport» menes i det følgende et skriftlig dokument hvor en forsker søker å orientere oppdragsgivere, tidsskriftlesere, kollegaer og andre om et teknisk-vitenskapelig arbeid. I en rapport legges det altså betydelig vekt på kommunikasjon. En rapport utformes derfor på en helt annen måte enn for eksempel øvingsbesvarelser, avisartikler, laboratoriejournaler, kompendier, forelesningsnotater, løssalgsaviser, populærvitenskapelige artikler. Bruk av lærebøker som mønster kan være villedende fordi pedagogiske hensyn der dominerer fremstillingen.

Merk spesielt at istedet for typografiske kunstgrep er det innledningskapitlet og rapporttittelen som skal brukes til å vekke interesse hos leseren. Apropos tittel: La den inneholde

nøkkelord som øker sjansen for at nettopp din målgruppe fatter interesse for resultatene dine. Vanligvis slår tittelen an tonen for hovedtemaet.

I innledningskapitlet bør *bakgrunn*, *omfang* og *hensikt* komme frem. Det er et generelt krav at du (ikke bruk «du» i rapporter)(unngå «vi» og «jeg» også, hvis mulig) (bruk parenteser med forsiktighet) (det blir lett rotete) gir en kort omtale av tidligere arbeider på området. Det er derfor naturlig at noen av de aktuelle referansene kommer allerede i innledningskapitlet.

Ved *lange* rapporter er det vanlig at innledningen avsluttes med en summarisk og kort omtale av temaene som skal behandles i hvert av de etterfølgende kapitler. Pass i den forbindelse på at innledningskapitlet ikke får karakter av å være et sammendrag.

2. Teori

Etter innledningskapitlet er det naturlig å gi en teoretisk behandling av hovedtemaet, det vil si det emnet som allerede er antydnet gjennom valg av rapporttittelen. I et rent eksperimentelt arbeid kan dette kapitlet utelates. Som kompensasjon er det da vanlig å levere et fyldig innledningskapittel. (Sjekk for eksempel artikler ved Filipe og Rodgers og Oettinger *et al.*[1,2])

Ikke begynn – eller avslutt – et kapittel med en ligning, figur eller tabell. Benytt alltid noen innledende, forklarende tekstlinjer først. Marker nye avsnitt enten ved hjelp av innrykk eller ved å hoppe over en linje. Det er viktig å fjerne alle linjeskift som etterlater utilsiktede halve linjer. Unngå også «tomme» avsnitt. Tilstreb en enhetlig typografi.

Dobbel linjeavstand og brede marger kan brukes hvis det er ønskelig med kommentarer og tilbakemeldinger fra leseren. Men husk at rapporten i så fall svulmer opp og at lesbarheten reduseres.

Når det gjelder skriving av ligninger skal det gode grunner til for å avvike fra følgende skjema: Etter innledende tekst kommer ligningen på en ny linje. For eksempel: «... og kraften blir

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1-1)$$

der m er massen og \vec{a} er akselerasjonen.» Vanlige komma- (og punktum-)regler gjelder også når ligningen skrives på egen linje.

En vanlig feil er å konsekvent avslutte siste setning før ligningen med kolon. Dette virker monotont og bør ikke overdrives. Ukjente symboler må forklares senest i de tekstlinjene som kommer rett etter ligningen. Unngå i den forbindelse konstruksjoner av følgende type: «Krafta \vec{F} er proporsjonal med massen m . \vec{a} er akselerasjonen.» Vær med andre ord forsiktig med å begynne setninger med symboler. Unngå plasskrevende lister med symbolforklaringer etter ligningen.

Benytt helst bare ett likhetstegn per ligningslinje og husk: Alltid forklarende tekst før og etter hver ligning. Hvis mulig bør en egen ligningsmarg defineres, hvis ikke brukes sentrerte ligninger.

Lange ligninger representerer et spesielt problem. For det første kan de vanskeliggjøre bruk

av en fast ligningsmarg. I ekstreme tilfeller kan ligningen bli lenger enn linjebredden. Det kan da bli aktuelt å bruke flere ligningslinjer, for eksempel slik; «... I en kubisk krystall er elastisk energitetthet[3] gitt ved

$$U = \frac{C_{11}}{2} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \frac{C_{44}}{4} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + C_{12} (e_{yy}e_{zz} + e_{xx}e_{zz} + e_{xx}e_{yy}), \quad (1-2)$$

der ...»

En annen løsning er å innføre hjelpesymboler eller å splitte opp ligningen i delligninger.

Små ligninger som ikke er så viktige at de fortjener et eget ligningsnummer, kan i spesielle tilfeller flettes inn i tekstlinja. Benytt i så fall skrå brøkstreker, små summasjonstegn, «exp(-x)» istedenfor «e^{-x}», og så videre. Nøl ikke med å spandere en egen ligningslinje hvis det blir typografiske problemer.

Alle symboler skal kursiveres, mens enheter skal derimot ikke kursiveres. Det samme gjelder standardfunksjoner som sin, cos, tan, ln og så videre. Skriv derfor for eksempel sinusfunksjonen slik: sin(*f(x)*). Bruk helst *kursiv*, ikke **utheving** eller understreking, når enkeltord og enkeltsetninger skal fremheves.

3. Metode

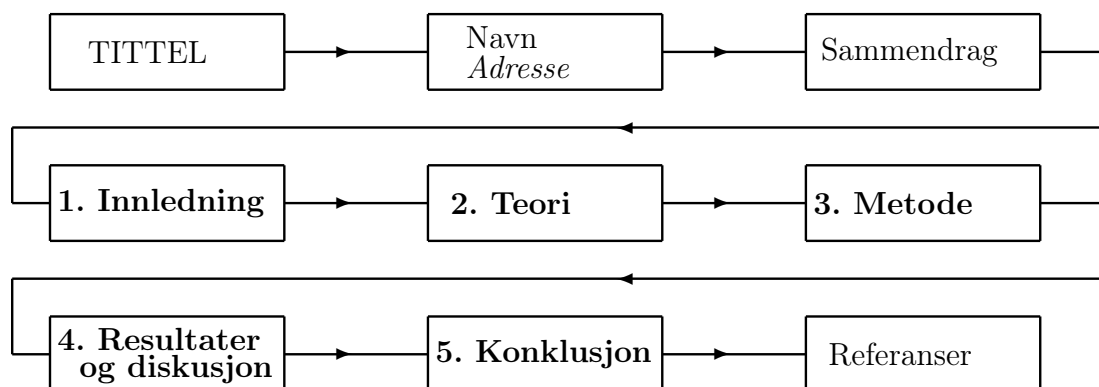
I tråd med kapitteloverskriften er det i dette – og bare i dette – kapitlet at det skal gis en omtale av instrumentering, måleprosedyrer og lignende. I likhet med forrige kapittel kan overskriften gjøres mer spesifikk. «Prøvepreparering», «Optisk lay-out», «Ionekanon» og lignende kan for eksempel være alternative overskrifter. Merk også at kapitlet kan splittes opp ved større arbeider, for eksempel i «3.1 Apparaturler» og «3.2 Metode». En slik oppdeling er imidlertid ofte unødvendig, ihvertfall ved skriving av korte (student)rapporter.

Vurder nøye hvilke instrumenttyper som skal beskrives. Det sier seg selv at det er unødvendig å forklare virkemåten for et multimeter. Lange kjedelige instrumentlister skal ikke forekomme i en rapport. Gi i stedet en omtale av nøkkelinstrumentene. Det er i den forbindelse ikke uvanlig å nøye seg med å oppgi fabrikatet. Spesielt interesserte lesere kan da på egen hånd skaffe seg de tekniske spesifikasjonene. Det er likevel en god vane å hjelpe leseren ved å opplyse om usikkerheter og feilkilder. Her kan det av og til oppstå et dilemma: Det er ofte naturlig å beskrive de forskjellige feilkildene i måleoppsettet først etter å ha presentert måleresultatene. I slike tilfeller er det tillatt å presentere feilkildene i diskusjonskapitlet.

I eksperimentkapitlet skrives bare unntaksvis ligninger. Hvis det likevel skjer må det utelukke være for å forklare det måletekniske opplegget. Ligninger av denne type skal selvfølgelig ikke forekomme i teorikapitlet.

Dersom du velger å presentere figurer, skal disse *alltid* være omhyggelig utformet. Det er viktig at de er så enkle som mulig. Ikke gi deg i kast med en komplisert tegning uten skikkelig utstyr, som idag betyr et datamaskinbasert tegneprogram.

Figur A.1 viser skjematisk rekkefølgen på de ni «standardelementene» som alltid er til stede



Figur A.1: Skematisk oversikt over de ni standardelementene i en fysikkrapport. Rapportforsiden – med passende topp- eller bunntekst – kan bestå av enten de to eller de tre første elementene. Kapittelhierarkiet bør begrenses til tre lag, for eksempel 2, 2.1, og 2.1.1. Lange rapporter kan inneholde opptil tretten elementer. Hvor ville du plassere *Innholdsliste*, *Forord*, *Takk til*, og *Vedlegg* i denne figuren?

i en profesjonell rapport. (La oss nytte høvet til å påpeke at rapporter kan inneholde opptil fire elementer i tillegg: *Innholdsliste*, *Forord*, *Takk til* («*Acknowledgement*»), *Vedlegg*. Men merk at disse fire tilleggselementene som regel bare benyttes ved lange rapporter.).

Husk at en figur alltid må omtales i kapittelteksten. I tillegg må figurdetaljene også forklares i selve figurteksten – som alltid plasseres under figuren. Dette siste er en innarbeidet konvensjon, selv om tekstsider – i vår skrifttradisjon – skannes ovenfra og nedover.

4. Resultater og diskusjon

I større arbeider kan også dette kapitlet deles i to, for eksempel i «4.1 Resultater» og «4.2 Diskusjon». Unngå i så fall å blande diskusjoner inn i resultatkapitlet, eller omvendt.

Du skal beskrive konkret hvilke resultater som er oppnådd, hva enten det er beregninger eller målinger som ligger til grunn. Alle tabeller skal nummereres, og forklarende tabelltekst over tabellen er obligatorisk. Uklare forhold ved tabellen skal ikke skrives under eller ved siden av tabellen. Gjør heller tabellteksten mer fyldig. Pass på at det blir stående igjen et par tomme linjer både før og etter tabellen. Årsaken til det er at leseren kjapt skal kunne skille mellom tekst og tabelltekst. Av samme grunn er det leservennlig å la skrifttypen, eller skriftstørrelsen, – også i figurtekstene – avvike litt fra det som er benyttet i hovedteksten.

Merk at kurver og diagrammer per definisjon er figurer og nummereres deretter. Når en kurveskare skal presenteres i samme figur er det viktig å omtale de forskjellige delkurvene.

Tabell A.1: Eksempel på tabell. Kjente symboler, for eksempel « t » for tid, trenger ingen forklaring. « W », og «flow» – med dimensjon strømtetthet – bør derimot forklares.

T (K)	t (s)	W (eV)	Flow (10^{-4} Wm^{-2})
123,4	0.00	23,23	11,4
432,1	9.54	24,87	21,3
521,9	21.10	25,94	35,2
644,5	28.59	31,01	45,8
745,6	33.45	33,28	66,9

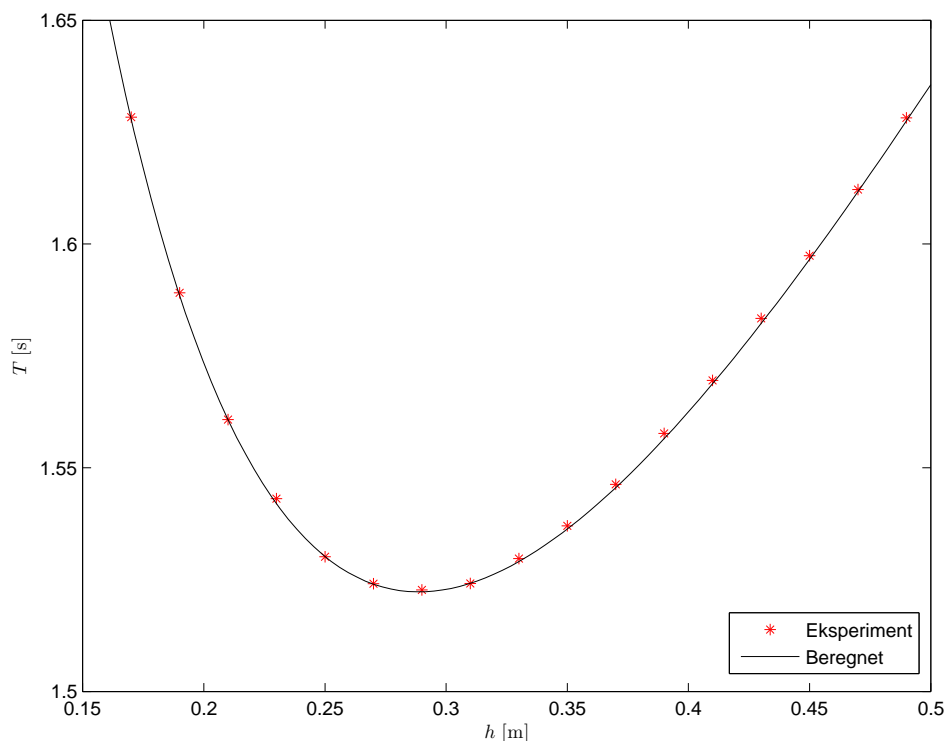
Her er det vanlig å plassere en tegnforklaring på figuren i tillegg til den forklarende figurteksten. Husk spesielt å gjøre det klart hva som er målte data og hva som eventuelt er teoretiske kurver. De sistnevnte er som regel glatte mens målte data bør markeres tydelig med enkeltpunkter, eventuelt med usikkerhetsstolper. Et alternativ er å ta med så mange målepunkter at den statistiske variasjonen kommer tydelig frem. Et eksempel på dette er vist i figur A.2. Her er usikkerhetsstolpene utelatt fra figuren, men en kan enkelt slutte seg til at usikkerheten er svært liten, da målepunktene ser ut til å følge den teoretiske kurven ganske tett med liten variasjon i avstanden til den teoretiske linjen fra punkt til punkt.

En vanlig feil i studentrapporter er å ikke markere målepunkter tydelig nok. Det er derfor viktig å velge en optimal skalering av koordinataksene. Strektykkelse og fontstørrelse bør velges med tanke på kopiering og forminsking – samt eventuell trykking. Gjør livet lett for leseren ved å bruke passe antall delestreker og akseverdier, og minimaliser antall nuller før og etter desimaltegnet.

Du må unngå å overlesse selve figuren. Når flere kurver presenteres i samme figur er det nødvendig å bruke forskjellige symboler for målepunktene, for eksempel kryss, kors, fylte eller ufylte kvadrater, sirkler og trekanter, og så videre. Dersom du har en figur som inneholder mye informasjon er det lurt å aktivt bruke forkortelser eller symboler som identifiserer ulike detaljer i figuren, og bruke en fyldig figurtekst som forklarer de ulike forkortelsene og symbolene som brukes i figuren. Et enkelt eksempel på slik bruk av figurtekst er vist i figur 4.4.

Det er uprofesjonelt å presentere en skisse av eksperimentoppsettet inne i rapporten mens for eksempel kurver for måledataene kommer til slutt, etter referansene. Du må derfor bestemme deg for om samtlige figurer skal plasseres inne i rapporten, eller etter rapporten. Det første representerer det mest leservennlige alternativet, og er lett å realisere med tekstbehandling. Pass imidlertid på at figurene plasseres slik at (i) det ikke blir stående igjen ubrukte, hvite felter i rapporten, og (ii) at figuren plasseres nær figurhenvisningen, ihvertfall i det samme kapitlet. I praksis kommer ofte (i) og (ii) i konflikt med hverandre, men Latex optimaliserer dette for deg uten at du trenger tenke på det.

Et alternativ som ofte kreves av flere tidsskrift ved innsending av rapporter for publisering er å benytte egne figursider. I så fall presenteres figurene etter referansene, og det er nødvendig å spandere en egen figurtekstside som plasseres mellom referansene og figurene. Hver enkelt av figurtekstene skal begynne med det aktuelle figurnummeret. De etterfølgende figurene må



Figur A.2: Eksempel på presentasjon av måledata samt teoretisk linje i et kurvediagram. En pendels svingeperiode T er plottet som funksjon av avstanden fra massemidtpunktet til opphengningspunktet h , og sammenlignes med den teoretiske svingeperioden. Merk at det er tillatt å bruke symboler (for eksempel T og h) på de to aksene i stedet for full tekst.

merkes med det tilhørende figurnummeret. Denne figurtekstsiden, med etterfølgende figurer, er ikke et vedlegg (appendiks).

Vedlegg brukes i de sjeldne tilfellene hvor det aktuelle stoffet er plasskrevende, men litt på siden av hovedtemaet i artikkelen. Det er for eksempel ikke nok å legge ved et kurvepapir for å vise leseren en slags dokumentasjon eller et bevis. Leseren stoler nemlig på at du faktisk har gjort de aktuelle målingene. Dette siste knytter an til en vanlig feil ved mange studentrapporter: Han/hun er ikke lenger i den videregående skolen, og den typiske leseren er ikke en lærer som med argusblikk kontrollerer mellomregningene. Forestill deg heller leseren som en kollega eller en studiekamerat, som du ikke vil slå i svime med unødvendige detaljer. La ikke prinsipielle ting drukne i et virvar av tall, implikasjonspiler, numeriske ligninger, svar med to strek under. Presenter heller stoffet eksempelvis slik:

«...og dataene i tabell 3 ble beregnet ved hjelp av regresjonsanalyse og ligning (7). Den kinetiske energien ble funnet å være 103,7 eV, som innenfor måleusikkerheten på 0,1 eV er noe høyt i forhold til det som er rapport i referanse [2]. Dette skyldes trolig at»

På denne måten får leseren greie på hvilke rådata og hvilken ligning som er benyttet. Han blir også fortalt hvilket analyseverktøy forfatteren har benyttet. Et forslag til forklaring på avvik i forhold til tidligere målinger er også gitt.

5. Konklusjon

I avslutningskapitlet er det vanlig å dra konklusjoner og å presentere prinsipielle og konkrete anbefalinger for fremtidig arbeid. Viktige ting kan gjentas. Det er heller ikke uvanlig å foreta en grovoppsummering av arbeidet. Men merk at selve rapportsammendraget ikke kan utelates av den grunn.

En del av de standardene som fysikere følger ved skriving av rapporter er gyldige i andre subkulturer, for eksempel kjemi og elektronikk. På den annen side er det innen fysikk mulig å velge mellom alternative standarder og typografiske systemer. Referanser kan for eksempel utformes på en helt annen måte enn det som er benyttet i denne summariske orienteringen. Det er derfor tillatt å avvike fra det mønsteret som er presentert i de foregående kapitlene. Dette betyr at rapporten kan utformes med tanke på den aktuelle målgruppen av lesere. Men: Før du bevisst bryter en konvensjon må du kjenne konvensjonen. Selv om vi forlengst er gått inn i en periode med elektroniske media så er det ingen ting som tyder på at vi skal kaste vrak på fundamentale regler for kommunikasjon ved hjelp av det skrevne ord.

Referanser

- [1] J.A.N. Filipe og G.J. Rodgers, *Phys. Rev. E* **52**, 6044 (1995).
- [2] K. Oettinger, T. Wimbauer, M. Drechsler, B. K. Meyer, H. Hardtgen og H. Lüth, *J. Appl. Phys.* **79**, 1481 (1996).
- [3] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley, New York. 1996).