

LABORATORIUM I EMNENE

TFY4145 MEKANISK FYSIKK

FY1001 MEKANISK FYSIKK

for studenter ved studieprogrammene

MTFYMA

MLREAL

BFY

BKJ

NTNU

Høsten 2011

Forord

Dette heftet inneholder tekster til laboratoriekurset til emnene TFY4145 Mekanisk fysikk og FY1001 Mekanisk fysikk. Kurset går over seks laboratorieøkter med praktiske laboratorieoppgaver eller datalaboratorium.

En generell beskrivelse av kursene TFY4145 Mekanisk fysikk og FY1001 Mekanisk fysikk finnes på følgende nettside:

<http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4145/>

og laboratoriekurset spesielt:

http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fy1001_lab/.

På de tilhørende nettsidene vil studentene finne all nødvendig informasjon om påmeldinger til laboratoriet, timeplaner, romfordelinger og så videre.

De symboler og enheter som brukes for fysiske størrelser har dessverre en tendens til å variere fra lærer til lærer og fra bok til bok. I dette heftet brukes så langt som mulig enheter som er i overensstemmelse med Norsk standard og SI-systemet. Unntak fra dette forekommer i forbindelse med omtale av instrumenter som brukes i laboratoriet og som ikke er skalert i standard enheter.

Egil Vålandsmyr Herland, Iver Bakken Sperstad, Knut Gjerden, Asle Heide Vaskinn, Mikael Lindgren, Arne Mikkelsen, Thor Bernt Melø

August 2010

Heftet er revidert, omstrukturert og oppdatert.

Egil Vålandsmyr Herland, Iver Bakken Sperstad, Knut Gjerden, Mari Helene Farstad, Troels Arnfred Bojesen, Amund Gjerde Gjendem, Thor Bernt Melø

August 2011

Før laboratorieøvelsen

Laboratoriekurset går over seks økter på fem timer hver. Før hver enkelt økt må studentene gjøre følgende forberedelser:

- Labøkt 1, Lineær bevegelse: Les kapittel 1, 2 og 3.
- Labøkt 2, Bestemmelse av tyngdens akselerasjon: Les kapittel 4 og 5 frem til og med delkapittel 5.2.
- Labøkt 3, Matlab for dataanalyse: Les kapittel 6 og 5.3, og repeter kapittel 4, 5.1 og 5.2.
- Labøkt 4, Gravitasjonskonstanten: Les kapittel 7, og gjør forhåndsoppgavene i delkapittel 7.4.
- Labøkt 5, Rapportskriving: Les kapittel 8 og se igjennom tillegg A.
- Labøkt 6, Rotasjonsbevegelse: Les kapittel 9.

Innhold

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INNLEDNING | 1 |
| 1.1 | Formålet med laboratorieundervisningen | 1 |
| 1.2 | Innhold | 2 |
| 1.3 | Undervisningsform | 2 |
| 1.4 | Skikk og bruk i undervisningslaboratoriet | 3 |
| 2 | LABORATORIEJOURNALEN | 5 |
| 2.1 | Formålet med laboratoriejournalen | 5 |
| 2.2 | Innholdet i en laboratoriejournal | 5 |
| 2.3 | Krav til utforming av laboratoriejournalen | 8 |
| 2.4 | Grafiske fremstillinger | 9 |
| 2.5 | Numeriske beregninger | 10 |
| 2.5.1 | Planlegging av numeriske beregninger | 10 |
| 2.5.2 | Målefeil og signifikante sifre | 11 |
| 2.5.3 | Manuell tallbehandling | 12 |
| 2.5.4 | Tallbehandling med datamaskin | 12 |
| 2.6 | Oppsummering | 13 |
| 3 | LINEÆR BEVEGELSE | 15 |
| 3.1 | Teori | 15 |
| 3.1.1 | Det mekaniske systemet | 15 |
| 3.1.2 | Bevegelsen til M etter at den lille massen har nådd gulvet | 15 |
| 3.1.3 | Bevegelsen før den lille massen har nådd gulvet | 16 |
| 3.1.4 | Energibevarelse | 17 |
| 3.2 | Litt om målesensorene | 18 |
| 3.2.1 | Virkemåten til kraftmåleren | 18 |
| 3.2.2 | Virkemåten til posisjonsmåleren | 18 |
| 3.2.3 | Derivasjon av diskret målte størrelser | 18 |
| 3.3 | Litt om Pasco dataloggingssystem | 19 |
| 3.4 | Eksperimentelt | 21 |
| 3.4.1 | Oppsett av DataStudio | 21 |
| 3.4.2 | Kontroll av ekkolodd | 22 |
| 3.4.3 | Kontroll av kraftmåler | 22 |
| 3.4.4 | Gjennomføring av målingene | 23 |
| 3.4.5 | Dataanalyse | 23 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | FEIL I FYSISKE MÅLINGER | 25 |
| 4.1 | Målefeil | 25 |
| 4.2 | Angivelse av resultatet fra en måling av en fysisk størrelse | 26 |
| 4.3 | Analyse av målefeilen | 26 |
| 4.3.1 | Tilfeldige feil | 27 |
| 4.3.2 | Systematiske feil | 28 |
| 4.3.3 | Grove feil | 29 |
| 4.4 | Feilregning | 29 |
| 4.4.1 | Det enkle tilfellet | 30 |
| 4.4.2 | Det generelle tilfellet | 31 |
| 4.5 | Statistiske feilberegninger | 35 |
| 5 | BESTEMMELSE AV TYNGDENS AKSELERASJON | 39 |
| 5.1 | Teori og bakgrunnsstoff | 39 |
| 5.1.1 | Kort introduksjon til rotasjonsmekanikk | 40 |
| 5.1.2 | Bevegelsesligning og svingetid for en fysisk pendel | 41 |
| 5.1.3 | Beregning av tyngdens akselerasjon fra minimal svingetid | 43 |
| 5.1.4 | Tidsmålinger | 43 |
| 5.1.5 | Bruk av mikrometerskrue i lengdemålinger | 44 |
| 5.1.6 | Bruk av skyvelære i lengdemålinger | 45 |
| 5.1.7 | Nullpunkt på måleinstrument | 46 |
| 5.2 | Eksperimentell gjennomføring | 46 |
| 5.2.1 | Måling av lengde og bredde | 46 |
| 5.2.2 | Svingetid som funksjon av h | 47 |
| 5.2.3 | Målinger av minimal svingetid | 48 |
| 5.2.4 | Usikkerhetsberegning | 49 |
| 5.2.5 | Tillegg 1: Usikkerhetsberegning for Δl | 49 |
| 5.2.6 | Tillegg 2: Usikkerhetsberegning for Δr | 51 |
| 5.3 | Dataanalyse med Matlab | 52 |
| 5.3.1 | Tyngdens akselerasjon med usikkerhet | 52 |
| 5.3.2 | Svingetid som funksjon av h | 54 |
| 5.3.3 | Mer om standardavvik og standardfeil | 55 |
| 6 | INNFØRING I MATLAB | 57 |
| 6.1 | Matlab-vinduet | 58 |
| 6.2 | Grunnleggende Matlab-kommandoer | 58 |
| 6.2.1 | Matematiske beregninger | 59 |
| 6.2.2 | Vektorer | 59 |
| 6.2.3 | Vektorberegninger | 60 |
| 6.2.4 | Plotting | 61 |
| 6.2.5 | Behandling av filer, variabler og figurvinduer | 62 |
| 6.2.6 | Tillegg: Matriseoperasjoner | 62 |
| 6.3 | Bruke Matlab m-filer (skript) | 63 |
| 6.3.1 | Forslag til struktur på en enkel m-fil | 63 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 6.3.2 | Tillegg: Eksempel med bruk av for-løkker | 64 |
| 7 | GRAVITASJONSKONSTANTEN | 65 |
| 7.1 | Teoretisk bakgrunn | 65 |
| 7.1.1 | Gravitasjon | 65 |
| 7.2 | Måling av gravitasjonskonstanten | 66 |
| 7.2.1 | Måling av torsjonsvinkelen | 68 |
| 7.2.2 | Bestemmelse av torsjonsstivheten | 70 |
| 7.2.3 | Beregning av gravitasjonskonstanten | 70 |
| 7.3 | Feilanalyse i Cavendisheksperimentet | 71 |
| 7.3.1 | Tilfeldige feil | 71 |
| 7.3.2 | Systematiske feil | 71 |
| 7.4 | Forhåndsoppgaver om gravitasjon | 72 |
| 7.5 | Eksperimentelt | 73 |
| 7.5.1 | Apparatur | 73 |
| 7.5.2 | Forsiktighetsregler | 74 |
| 7.5.3 | Måleprosedyre | 74 |
| 7.5.4 | Analyse av resultatene | 77 |
| 7.5.5 | Avslutning | 77 |
| 7.6 | Rapport fra Cavendisheksperimentet | 78 |
| 8 | RAPPORTSKRIVING | 79 |
| 8.1 | Skriving av rapport | 79 |
| 8.1.1 | Rapportering av resultater fra eksperimentelt arbeid | 79 |
| 8.1.2 | Skriveprosessen | 80 |
| 8.2 | Tekstbehandling med Latex | 82 |
| 8.3 | Metoder | 82 |
| 8.3.1 | Tabeller | 83 |
| 8.3.2 | Figurer | 84 |
| 8.3.3 | Kurvedigrammer | 85 |
| 8.3.4 | Matematiske uttrykk | 88 |
| 8.3.5 | Oppsetting av matematiske uttrykk med Latex, | 89 |
| 9 | ROTASJONSBEVEGELSE, DREIEMOMENT OG SPINN | 91 |
| 9.1 | Teori | 91 |
| 9.1.1 | Treghetsmoment | 91 |
| 9.1.2 | Eksperiment 1: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre moment | 92 |
| 9.1.3 | Eksperiment 2: Bevaring av spinn | 94 |
| 9.1.4 | Eksperiment 3: Bevaring av spinn | 94 |
| 9.2 | Eksperimentell gjennomføring | 96 |
| 9.2.1 | Roterende skiver og luftputebanen | 96 |
| 9.2.2 | Oppsett av Pasco DataStudio og kalibrering av sensor | 97 |
| 9.2.3 | Eksperiment 1: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre moment | 98 |
| 9.2.4 | Eksperiment 2: Bevaring av spinn | 98 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 9.2.5 | Eksperiment 3: Bevaring av spinn | 99 |
| 9.2.6 | Ekstraoppgaver | 100 |
| A | NOEN RÅD OM SKRIVING AV FYSIKKRAPPORTER | 103 |

Kapittel 1

INNLEDNING

1.1 Formålet med laboratorieundervisningen

Fysikkundervisningen i første og andre klasse ved studieprogrammene MTFYMA, BFY og MLREAL er ved NTNU organisert i fire emner: TFY4145/FY1001 Mekanisk fysikk, TFY4155/FY1003 Elektrisitet og magnetisme, TFY4160/FY1002 Bølgefysikk og TFY4165/FY1005 Termisk fysikk. Til hvert av emnene hører et laboratoriekurs som har til formål gjennom eksperimenter å belyse utvalgte fenomener fra sitt emne. Det overordnede målet er å gi en grundig innføring og opplæring i eksperimentelle metoder gjennom tolkning og dokumentasjon av fysiske målinger. Mange av disse arbeidsmåtene, slik som databehandling, feilanalyse og skriving av vitenskapelige tekster, er grunnleggende ferdigheter som også vil komme til nytte utenfor laboratoriet.

Mens man i forelesningene tilnærmer seg fysikken hovedsakelig gjennom matematiske modeller, vil man i laboratoriet tilnærme seg fysikken hovedsakelig gjennom observasjoner og målinger. I laboratoriekursene er oppmerksomheten derfor rettet mot den eksperimentelle prosedyren. For dem som er vant med å betrakte fysikken gjennom matematiske modeller, kan dette virke fremmed. Fysikken er imidlertid ifølge sitt vesen et eksperimentelt naturfag, og det er derfor essensielt under fysikkstudiet også å nærme seg fysikken fra den eksperimentelle siden. Gjennom dette kan en gi studenten anledning til å nyansere sine tolkninger av de matematiske modellene slik at de blir i overensstemmelse med virkeligheten.

Det er under studiet viktig å tilpasse din kunnskap fortløpende til de fysiske omgivelser gjennom observasjon og eksperimentering. Du har visse muligheter til dette ved å observere fysiske fenomener i dine daglige omgivelser. Men det finnes mange fysiske fenomener som ikke lar seg observere der; mange fysiske fenomen krever måleutstyr for å la seg observere.

Laboratorieundervisningen skal gi en innføring i de ferdigheter og kunnskaper som en fysiker må mestre for selvstendig å kunne tilegne seg kunnskap om naturen gjennom eksperimenter. Eksperimentelle ferdigheter og kunnskaper inkluderer manuelle ferdigheter, organisatoriske ferdigheter, konstruksjonsferdigheter, kunnskap om målemetoder og apparatur og kunnskap om presentasjon, tolking og dokumentasjon av eksperimentelle resultater og prosedyrer. Mestring av disse ferdigheter og kunnskaper er en like nødvendig forutsetning for

å kunne forstå fysikken gjennom eksperimenter og observasjoner som matematiske ferdigheter og kunnskaper er for å forstå fysikken gjennom matematiske betraktninger. Mestring av disse ferdigheter og kunnskaper er også en del av det grunnlag som du behøver for å kunne anvende fysikken i teknikk og industri.

1.2 Innhold

Til dette kurset har vi valgt ut fire eksperimentelle emner: (i) Lineær bevegelse; (ii) Bestemmelse av tyngdens akselerasjon; (iii) Gravitasjonskonstanten og (iv) Rotasjonsbevegelse - dreiemoment og spinn.

Av praktiske grunner kan du i løpet av et laboratoriekurs kun lære å bruke et begrenset sett med enkeltstående instrumenter og metoder. Dette forhindrer ikke at et laboratoriekurs kan gi deg en generell trening i behandling av måleinstrumenter, anvendelse av målemetoder og innsikt i de muligheter og begrensninger som er knyttet til måling av fysiske størrelser. I dette kurset gir vi deg en innføring i hvordan du ...

- ... bruker matematiske modeller for å predikere utfallet av eksperimentelle undersøkelser.
- ... setter opp og bruker eksperimentelt utstyr.
- ... presenterer måleresultater i tabeller og diagrammer.
- ... analyserer og tolker måleresultater.
- ... estimerer nøyaktigheten i målte tallverdier.
- ... analyserer feilforplantning i matematiske modeller.
- ... skriftlig dokumenterer og rapporterer eksperimentelle resultater nøyaktig, tydelig og konsist.
- ... bruker datatekniske metoder i behandling, presentasjon og dokumentasjon av apparatur og eksperimentelle resultater.

1.3 Undervisningsform

Hver kursenhet er vanligvis lagt opp som eksperimenter og dataanalyse (datalaboratorier). Det er svært viktig at du tilegner deg det relevante stoffet som gjennomgås i dette heftet før du kommer til laboratoriet (se undervisningsplan på nettsiden til kurset).

Undervisning foregår i grupper på 8-12 studenter fordelt på 4-6 team (to i hvert team). Hver gruppe har en egen laboratorielærer som følger gruppa hele semesteret. Slike smågrupper gir på en helt annen måte enn forelesningene en stor mulighet for egenaktivitet og tilbakekoblinger mellom lærer og student, og det fører til at læringsprosessen i laboratoriet blir mer

forpliktende enn i andre læringssituasjoner. Din arbeidsmåte i undervisningsperiodene må derfor, i tillegg til veiledet egenaktivitet, i stor grad preges av refleksjon og diskusjon. Din vekselvirkning med de sosiale omgivelsene i undervisningsperiodene avhenger av ditt bidrag og av det sosiale miljø i undervisningsgruppa. Gjensidig tillit i gruppa er en forutsetning for en åpen og konstruktiv dialog. For at dette skal skapes er det viktig at gruppa er veldefinert og stabil.

I dette heftet og ved muntlige introduksjoner presenteres matematiske modeller av betydning for arbeidet, målemetoder, samt nye metoder og verktøy for databehandling og dokumentasjon. Arbeidsmåten er diskusjoner (korte forelesninger) samt veiledet egenaktivitet og resultatoppfølging.

Det er avsatt fem timer til hver kursdag. Det er tid til pauser innenfor disse timene, både korte og en lengre middagspause. Det er svært uheldig å komme til laboratoriet med den innstillingen at man skal jobbe fortest mulig for å bli tidligere ferdig. Det er ikke forenlig med gode eksperimentelle arbeidsvaner. Man skal heller ikke holde på mer enn fem timer, man regulerer arbeidsmengden og grundigheten slik at man blir ferdig innenfor avsatt tid. Det er imidlertid viktig at en møter godt forberedt til undervisningen, for å kunne gjennomføre innen avsatt tid.

1.4 Skikk og bruk i undervisningslaboratoriet

Laboratoriet skal være en trivelig arbeidsplass hvor vi tar godt vare på hverandre og det utstyr som vi har til rådighet. Vi følger vanlige regler for skikk og bruk som for eksempel å sitte på stolen (ikke på bordet) og beholde føttene på gulvet (ikke på bordet). I tillegg til dette ber vi deg om å respektere noen få spesielle regler som også går på sikkerheten (dette delkapittelet gjelder også for alle laboratoriekurs):

- Ikke spis i laboratoriet.
- Heng yttertøyet i garderoben, og ikke legg det på laboratoriebordet.
- Pass deg for elektriske spenninger.
- Se opp for fareskilt.
- Plasser vesken eller sekken din på gulvet og helst i garderoben, ikke på arbeidsbordet.

Alle likespenninger over 60 V og alle vekselspenninger over 25 V skal ifølge Elektrisitetstilsynets forskrifter være isolerte. Dette er et pålegg som du må sørge for å oppfylle hver gang du kobler opp elektrisk utstyr. Det er ifølge dette for eksempel forbudt å bruke ledninger med bananplugg som kan krysskobles i pluggen når spenningene overskrider de nevnte grenser. Fareskilt som gjør deg oppmerksom på bruk av farlig utstyr eller farlige materialer (for eksempel mikrobølger, laserlys, radioaktive stoffer, gass under trykk) vil som regel bli satt opp når dette utstyr eller materialer er i bruk. En utførlig beskrivelse av sikkerheten i laboratoriet finnes i Laboratorie- og verkstedhåndboken, samt i sikkerhetsinstruksen som er oppslått på laboratoriet.

Instrumentene er ryggraden i laboratoriet. Verdien på de instrumentoppstillinger som du får anledning til å bruke varierer fra 10 000 til 100 000 kr, med en gjennomsnittspris på 50 000 kr. For at instrumentene skal bevare sin pålitelighet og presisjon må du behandle dem profesjonelt. Dette betyr:

- Vær rein på hendene.
- Ha på reine sko.
- Behandle elektriske kontakter forsiktig.
- Ikke brekk elektriske ledninger og kabler og ikke kveil dem tett sammen.
- Behandle alle justeringsskruer forsiktig.
- Unngå å sette riper i presisjonsoverflater.

Mange av instrumentene i laboratoriet er innstilt og oppjustert for å være best mulig tilpasset sin oppgave. Disse justeringene bør du ikke forstyrre. Vi ber deg spesielt om å la være å forandre oppjusteringen av Cavendish-apparaturen som brukes til måling av gravitasjonskonstanten. Oppsett av datamaskinene og -skjermene ber vi deg heller ikke endre.

Undervisningsperiodene er lange og fortsetter ofte til sent på dagen. Du må sørge for å ta godt vare på deg selv hvis du skal «holde koken» i gjennom hele perioden. Vær godt uthvilt den dagen du skal delta i laboratoriekurset og ta pauser i løpet av undervisningsperiodene. Det legges inn en 30 minutters pause og noen kortere pauser i hver undervisningsperiode. Et av de små laboratorierommene vil som regel være disponibelt som pauserom. Der kan du lage varm drikke og spise av matpakken om du vil. Bruk gjerne pausene til å arbeide med det sosiale forholdet i gruppa. Rolig og hyggelig atmosfære gir i det lange løp høyest effektivitet og størst utbytte av laboratoriearbeidet. Konsentrer alt utenomfaglig snakk til pausene. Hold mobiltelefonen avslått og bruk ikke datamaskinen til lesing av privat e-post eller surfing på nettet.

Forlat arbeidsplassen mer ryddig enn den var da du kom.

Kapittel 2

LABORATORIEJOURNALEN

2.1 Formålet med laboratoriejournalen

Alt laboratoriearbeid som utføres som en del av vitenskapelig eller industriell virksomhet er målrettet og blir utført i den hensikt å oppnå bestemte resultater, som senere skal rapporteres i en eller annen form. Det samme gjelder det arbeidet du utfører i undervisningslaboratoriet. For at denne rapporteringen skal være mest mulig pålitelig, må du dokumentere resultatene fortløpende. Dette gjør du ved å føre en journal over alle relevante opplysninger, mens du arbeider. Tas dette seriøst, blir det veldig lett å finne igjen resultater, samt lettere å planlegge forbedringer til neste forsøk.

Journalen er et kronologisk dokument som hovedsakelig inneholder faktiske opplysninger. Du må ikke forveksle den med en *rapport* fra laboratoriearbeidet, som er et ikke-kronologisk dokument. Opplysningene i journalen danner imidlertid grunnlaget for sammenfatning av resultatene i en rapport. I tillegg til faktiske opplysninger inneholder rapporten en bredere teoretisk fremstilling, referanser til tidligere beslektet arbeid og en evaluering/diskusjon av resultatene. Det er derfor en vesensforskjell på en journal og en rapport, selv om begge dokumenter tildels inneholder samme informasjon. De grunnleggende prinsippene for skriftlig rapportering gjennomgås senere i laboratoriekurset i kapittel 8.

2.2 Innholdet i en laboratoriejournal

Journalinnføringen for hver laboratorieøkt skal alltid begynne med en hovedoverskrift som inneholder informativ tittel på journalføringen, dato og navnet på den eller de personer som fører journalen. Like under overskriften skrives en kort formulering av målsetningen for dette laboratoriearbeidet. En laboratoriejournal blir mer oversiktlig og mer lettest hvis du deler innføringene inn i bolker med overskrifter som indikerer hvilken informasjon bolken inneholder, for eksempel *Beskrivelse*, *Resultater*, *Feilanalyse*. Se kapittel 2.6 for en oppsummering av anbefalt struktur for journalføringen.

Innholdet i en laboratoriejournal kan i grove trekk kategoriseres som (1) lister, (2) tabeller,

(3) figurer, (4) kurvedigrammer, (5) numeriske beregninger og (6) kommentarer, beskrevet i det følgende:

(1) Lister

En liste er en systematisk vertikalt ordnet oppstilling av informasjon i form av tekst og tall. Eksempler på informasjon som er hensiktsmessig å listeføre i en journal er:

- Opplysninger om instrumenter og utstyr.

Disse kan inneholde opplysninger om fabrikat, type, måleområde, presisjon og faste innstillinger.

- Definisjoner av symboler og størrelser.

Disse kan inneholde definisjoner, eller henvisninger til definisjoner av symboler og størrelser, for eksempel hvis symbolene og størrelsene er definert i en figur. Sett fra starten av god plass for lister, og bygg listene ut etter hvert som du fører journalen.

(2) Tabeller

En tabell er en systematisk horisontalt og vertikalt ordnet oppstilling av informasjon i form av tall og tekst. Tabeller kan være formelle eller uformelle. Vi har valgt at alle tabeller skal være formelle av to grunner: For å lære hvordan man lager slike, og fordi journalen blir mer oversiktlig jo mer konsekvent man er. Eksempler på informasjon som er hensiktsmessig å tabulere i en journal er:

- Måleresultater.
- Resultater fra beregninger, inkludert mellomresultater.

Tabeller skal inneholde tabellnummer, en overskrift og tabelloversikt med kolonner og rader der det kun brukes horisontale linjer, ikke vertikale. Standardtabellen har én linje som sier at tabellen starter, én som sier at overskriftene er ferdige og at innholdet begynner, og én som markerer at tabellen er ferdig. Ved riktig bruk er tabeller et hensiktsmessig verktøy for systematisering og fremstilling av data. Et eksempel finnes i tabell 8.1 på side 83.

(3) Figurer

Gode figurer er et meget effektivt hjelpemiddel for å dokumentere arbeidet i laboratoriet. Du oppfordres derfor spesielt til å bruke figurer flittig i føring av journalen. Eksempel på informasjon som anbefales journalført vha. figurer er:

- Apparatuoppstillinger.
- Elektriske koblinger.

Alle figurer skal inneholde en figurtekst under figuren, med figurnummer og selvstendig beskrivelse av figur. Se kapittel 2.4 for mer informasjon, og se forøvrig figurene i dette heftet for eksempler.

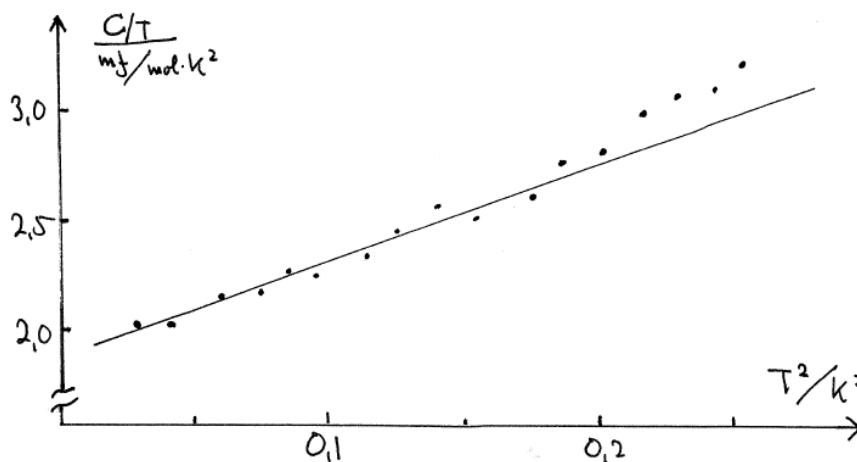
(4) Kurvedigrammer

Kurvediagrammer er en spesiell type figurer¹ som i et koordinatsystem fremstiller sammenhengen mellom variabler. Fremstilling av resultater i form av kurvediagrammer er nyttig når du ønsker å:

- Sammenligne to sett med verdier for eksempel målte og beregnede.
- Få oversikt over trender i resultatene.
- Identifisere inkonsistente måleresultater.

Under arbeidet i laboratoriet kan det dessuten ofte være hensiktsmessig å plotte måleresultater fortløpende sammen med beregnede resultater. Uventede trender, avvik fra beregninger og inkonsistente resultater kan da oppdages mens det enda er anledning til å gjenta målingene, i den hensikt å avgjøre om avvikene skyldes feil i måleprosedyren eller en fysisk effekt.

Eksempel på et kurvediagram er vist i figur 2.1. Se forøvrig kapittel 2.4.



Figur 2.1: Et eksempel på et kurvediagram som illustrerer avvik fra linearitet. Kurven forestiller varmekapasitet C som for metaller ved svært lav temperatur forventes å variere som $C(T) = aT + bT^3$ med temperaturen T . For å gjøre sammenligningen mellom målingene og den forventede variasjonen lettere plottes C/T vs. T^2 som forventes å variere lineært ($C/T = a + bT^2$).

(5) Numeriske beregninger

Vha. numeriske beregninger kan du ut i fra matematiske modeller trekke konklusjoner om forventede verdier for måleresultater. For å kunne bedømme om et måleresultat er ventet eller uventet må du, før du begynner å måle, etablere en forventet verdi. For å kunne sammenligne måleresultater innbyrdes eller med beregnede verdier må du ha en idé om målefeilen. Grunnlaget for estimering av målefeil og analyse av feilforplantning blir gjennomgått i kapittel 4. Inntil da må du basere deg på sunn fornuft når du estimerer målefeil.

Under målingene bør du gjøre fortløpende beregninger for å kontrollere at resultatene er som forventet og gjenta målingene når resultatene er uventet. Her kan det være nyttig å bruke et regneark, der du fortløpende skriver inn data og får opp et kurveforløp.

¹Men det er fortsatt figurer! Følgelig skal samme figurnummerering som beskrevet i punkt (3) brukes også her.

Alle forberedende og fortløpende beregninger bør dokumenteres i journalen med å oppgi referanser til uttrykk og definere alle symboler som brukes. *Husk å ta med enheten* i tillegg til måltallet, og velg hensiktsmessige enhetsprefikser². Se kapittel 2.5 for flere detaljer og nyttige tips.

(6) Kommentarer

I tillegg til de nevnte elementene bør journalen inneholde fyldige kommentarer som knytter sammen de tidligere angitte enheter til en helhet. Herunder kan du også ta med dokumentasjon av spesielle observasjoner av betydning for laboratoriearbeidet og en tolking av resultatene. Særlig viktig er det at du beskriver den eksperimentelle gjennomføringen underveis (fremgangsmåte) og at du helt til slutt kommenterer resultatene med tanke på hva som var målsetningen (konklusjon).

2.3 Krav til utforming av laboratoriejournalen

Laboratoriejournal skal være:

- Lett leselig.

Bruk godt leselig håndskrift. Det er spesielt viktig at du skriver godt leselige tall.

- Oversiktlig og klar.

Bidra til dette ved å:

- tabulere måleresultater,
- tegne enkle figurer og diagrammer med hensiktsmessige variable og akseinnndelinger,
- avsette god plass mellom forskjellige emner,
- ikke skrive oppi det som du har skrevet før,
- bruke klart, entydig og enkelt språk.

- Pålitelig.

Du fremmer pålitelighet ved å:

- skrive nøyaktig det du gjør, selv om det ikke skulle stå i laboratorieheftet,
- skrive fortløpende alle kommentarer og resultater direkte i journalen uten å bruke løse ark med henblikk på senere innføring,
- bygge opplysningene på direkte observasjoner i laboratoriet – for eksempel bør instrumentlistene dine være en fortegnelse over instrumentene du finner i laboratoriet og ikke bygge på de opplysningene som en kan finne om instrumentene i laboratorieheftet,

²De mest vanlige prefikser: T = tera = 10^{12} ; G = giga = 10^9 ; M = mega = 10^6 ; k = kilo = 10^3 ; c = centi = 10^{-2} ; m = milli = 10^{-3} ; μ = mikro = 10^{-6} ; n = nano = 10^{-9} ; p = piko = 10^{-12} . Merk at prefiksene skrives med opprettet type (ikke *kursiv*).

- kontrollere avlesning av instrumenter etter at resultatet er ført i journalen – bruk for eksempel følgende prosedyre: les av – noter – les av igjen og kontroller,
- skrive alle målte tallverdier inn i journalen nøyaktig slik som de ble lest av måleinstrumentet (ikke rund av) og presiser enheten,
- utføre alle omregninger eksplisitt i journalen med eksplisitt angivelse og forklaring av omregningsfaktorer,
- gjøre alle beregninger, tabeller, diagrammer og skisser med tilhørende forklarings-tekster ferdige i journalen.

«Kosmetiske» forandringer hører ikke hjemme i en journal! Hvis du har skrevet feil i journalen skal du kun trekke en enkelt strek over feilen og skrive teksten på nytt på riktig måte. Unngå å bruke korrekturlakk. Det du på et visst tidspunkt tror at er feil kan senere vise seg å være riktig. Korreksjoner som fører til at det korrigerte blir uleselig kan da føre til at du mister viktige opplysninger.

Du skal føre journalen med penn, med unntak av diagrammer som bør tegnes med blyant. Erfaring tilsier at du her må viske ut en del, for eksempel når det viser seg at du har valgt feil skala på en akse. Dette er et unntak fra regelen om ikke å utføre «kosmetiske» forandringer.

Journalen skal du føre i en innbundet protokoll i A4-størrelse. Merk helst forsiden med (i) navn, (ii) gruppenummer, (iii) kursbetegnelse, (iv) semester og (v) år, i alle fall med (i) og (ii).

For å holde oversikt over laboratoriejournalens innhold og muliggjøre kryssreferanser, skal du nummerere sidene i journalen fortløpende og reserver omtrent de første seks sidene i journalen for en innholdsfortegnelse over oppgavene, som du bygger ut etter hvert som du fører journalen.

Alle kurvediagrammer og figurer som fremstilles på data skal skrives ut for å inkluderes i journalen. Alle løse ark skal renskjæres rektangulært og limes inn i journalen.

2.4 Grafiske fremstillinger

I naturvitenskapelige og tekniske dokumenter er grafiske fremstillinger i form av formelle tabeller, diagrammer, figurer og frittstående matematiske uttrykk ofte viktigere som informasjonsbærere enn selve teksten. Disse elementene bør derfor utformes som mest mulig selvstendige enheter.

Det lønner seg allerede på journalstadiet i dokumentasjon av et arbeide å fremstille slike grafiske fremstillinger som selvstendige enheter. Dette rasjonaliserer journalføringen og forbereder videre tilrettelegging av de grafiske fremstillingene i en eventuell senere rapport. Derfor inkluderes det her en kort presentasjon av retningslinjer for grafiske fremstillinger. En mer fyldig innføring i bruk av grafiske fremstillinger i rapporter finnes i kapittel 8.3.3.

Identifikasjonsnummer

Tabeller, figurer og frittstående matematiske uttrykk tilordnes et eget identifikasjonsnummer som det kan refereres til i teksten. Hver av disse identifiseres med separate nummerfølger, som tabell 1, tabell 2, ..., (1), (2), ... (for ligninger), og figur 1, figur 2, ...

Forklarende tekster

Tabeller og figurer tildeles også forklarende tekster. Disse forklarer fremstillingens innhold og symbolbruk og gir henvisninger til det kildemateriale som fremstillingene bygger på. For eksempel bør det i teksten til et kurvediagram som regel gis en referanse til en tabell over tallmaterialet som diagrammet bygger på. Forklaringsteksten for tabeller plasseres over tabellen mens forklaringsteksten for diagrammer og figurer plasseres under diagrammet eller figuren.

De fleste større forlag, forvaltningsenheter og industribedrifter utarbeider egne detaljerte standarder for hvordan grafiske elementer skal settes opp i egne dokumenter. I tråd med dette skal du følge en bestemt standard når du setter opp tabeller og figurer i journaler og rapporter i forbindelse med arbeidet under laboratoriekursene. Til dette formål har vi valgt å følge standarden for grafiske fremstillinger til forlaget The Institute of Physics Publishing (IOPP). Standarden er i sin helhet tilgjengelige på vevsadressen <http://iop.org/Journals/textstyle>. I kapittel 8 kommer vi tilbake til denne problemstillingen i sin helhet. Alle grafiske fremstillinger i dette heftet er satt opp ifølge denne standarden.

2.5 Numeriske beregninger

Den teoretiske beskrivelse av fysikken er stort sett formulert matematisk slik at konkrete fysiske tilstander kan beskrives i form av tallverdier. Numeriske beregninger er derfor den viktigste prosedyre du har for å trekke konklusjoner om konkrete fysiske tilstander fra teoretiske modeller. Eksperimentelle undersøkelser av konkrete fysiske tilstander består stort sett i å måle disse tallverdier direkte eller indirekte. Numeriske beregninger spiller derfor en sentral rolle i å frembringe og sammenligne eksperimentelle og teoretiske resultater.

2.5.1 Planlegging av numeriske beregninger

Du bør foreta numeriske beregninger slik at mulige beregningsfeil minimaliseres. Et middel til å oppnå dette er å presentere beregninger og resultater systematisk ved å sette opp beregningsprosedyren i tabulær form med loddrette kolonner. Videre reduseres antall numeriske regneoperasjoner ved å regne algebraisk så langt som mulig før du går over til numeriske beregninger. Og sist men ikke minst: legg inn kontrollrutiner.

La oss se litt nærmere på gode kontrollrutiner:

- Dimensjonsanalyse.

Kontroller at det er samsvar mellom dimensjonene til alle ledd i hvert algebraisk uttrykk og at sluttsvaret gjengis med riktig dimensjon. For eksempel bør du med en gang se feilen i uttrykket $\ell + \ell^2$ hvor ℓ er en lengde. Likeledes bør du være klar over at en størrelse x må være ubenevnt i alle uttrykk som kan utvikles i potensrekker av x . Dette blir innlysende hvis du betrakter for eksempel utvikling av funksjonene $\exp x \approx 1 + x + x^2/2 + \dots$ og $\sin x \approx x - x^3/6 + \dots$. Med andre ord må du alltid(!) ha dimensjonsløs størrelse x i $\exp x$, $\sin x$, $\tan x$, $\ln x$ og så videre. Radianer er en dimensjonsløs størrelse.

- Grensetilfeller.

Kontroller at algebraiske uttrykk for fysiske størrelser reduseres til korrekt form i spesielle enkle (grense)tilfeller. De bør variere på fysikalsk riktig måte og ha riktig symmetri.

- Uregelmessigheter.

Se etter uregelmessigheter i utviklingen av beregningene. I beregningstabeller kommer uregelmessigheter tydeligst frem i differensen mellom kolonneverdier. Uregelmessigheter kommer også tydelig frem i diagrammatisk fremstilling av resultater når den forventede hovedvariasjonen i resultatene er trukket ut av datamaterialet. Egne sjekk-kolonner med differanse mellom kolonneverdier eller plotting av differansen mellom for eksempel beregnet og målt verdi kan derfor brukes for å se etter uregelmessigheter.

- Størrelsesorden, prefikser.

Kontroller at de beregnede tallverdier er av riktig størrelsesorden. Du kan i mange tilfeller komme langt med enkel hoderegning! Velg hensiktsmessige enhetsprefikser for de enkelte tallverdier. Det beste er å velge enhetsprefiksene slik at måltallet får en størrelse mellom 0,1 og 1000. For eksempel angi 10 mm og ikke 0,010 m. Husk å ta med enheten i tillegg til måltallet!

Kontroll av en beregning ved å gjenta beregningen med samme prosedyre gir vanligvis samme feil. Beregningsprosedyren bør derfor varieres når en beregning sjekkes ved gjentakelse.

2.5.2 Målefeil og signifikante sifre

En viktig avgjørelse du tar angående presentasjon av de enkelte tallverdier er bestemmelse av antall signifikante sifre. I laboratoriesammenheng bør antall signifikante sifre som tas med i sluttsvaret stå i rimelig forhold til den presisjonen som kan oppnås eksperimentelt. Som hovedregel skal du ikke gi inntrykk av at resultatet er mer presist enn det faktisk er. Det finnes også *beregningsmessige forhold* som du bør være oppmerksom på. De viktigste av disse er illustrert i følgende eksempler. En mer detaljert presentasjon av signifikante sifre og feilregning finner du i kapittel 4.

Eksempel 1. Avrundingsfeil.

I en beregning avrundes tallverdiene til et antall sifre som står i stil til målenøyaktighet og nøyaktighet i oppgitte data. Hvis for eksempel størrelsene $x = 1,7305$ og $y = 7,3625$ skal avrundes til fire signifikante sifre, blir disse henholdsvis 1,731 og 7,363. Etter denne avrundingen er presisjonen i angivelsen av det minste tallet ca. $5 \cdot 10^{-4}$, det vil si 0,05%. Summen $x + y$ er lik 9,093 når den angis med fire signifikante sifre, mens summen av de avrundede tallverdiene blir 9,094. For å unngå at beregningsfeil bidrar til feil i fysiske størrelser under

beregning er det vanlig å inkludere *ett eller to ekstra siffer* under beregningsprosessen. De ekstra sifrene blir så strøket i resultatet. I klartekst skal man altså i dette eksemplet summere $1,7305 + 7,3625$ og ikke $1,731 + 7,363$.

Eksempel 2. Antall signifikante sifre i avledede tall.

Tallet $x = 1,32 \cdot 10^{-2} = 0,0132$ har tre signifikante sifre. Det avledete tallet $y = \exp x = 1,0133$ er her angitt med fem signifikante sifre for å gi omtrent samme nøyaktighet. Med kun tre sifre: 1,01 er angivelsen unødvendig unøyaktig. Man skjønner kanskje dette lettere ved å se på rekkeutviklingen $\exp x = 1 + x + x^2/2 \dots$. Konklusjonen er at antall gjeldende sifre i et tall x og et avledet tall $y(x)$ behøver ikke å være det samme.

Eksempel 3. Antall signifikante sifre rundt $1 \cdot 10^n$.

Tallverdier som ligger like over $1 \cdot 10^n$ (n er et vilkårlig heltall) bør angis med ett siffer mer enn tall like under. Dette innses ved å sammenlikne 9,95 og 10,1. Tallene er omtrent like store og har tre signifikante sifre, men 9,95 har nøyaktighet på $\pm 0,005$ mens $10,1 \pm 0,05$. Siste bør angis med fire sifre, for eksempel 10,06, altså med like mange sifre etter komma som 9,95.

Eksempel 4. Kumulative feil

Tallene $x = 1,731$ og $y = 1,735$ har begge fire signifikante sifre. Differansen $y - x = 0,004$ har kun ett signifikant siffer som her tilsvarer at en beregningsfeil på $\pm 25\%$ blir innført i beregningen ved å gjennomføre den med kun fire signifikante sifre i x og y . Gjentatte regneoperasjoner av denne typen kan føre til helt meningsløse svar. For å unngå dette bør en her ta med flere signifikante sifre i x og y , hvis dette er mulig.

2.5.3 Manuell tallbehandling

Med manuell tallbehandling forstås beregninger utført med «papir og penn», eventuelt ved hjelp av en kalkulator. Manuelle beregningsmåter brukes for enkle beregninger. Siden beregningene er enkle, dokumenteres mellomregningen ikke og må gjentas hvis beregningen må sjekkes. Som antydnet i Eksempel 3 over bør beregninger gjennomføres med ett eller to sifre utover det presisjonen i angivelsen av tallverdiene tilsier (i målte tallverdier begrenses presisjonen i angivelsen av tallverdier av presisjonen i målingen) for å unngå at avrundingsfeil i beregningene reduserer presisjonen. Du fremmer klarhet ved å sette to streker under et slutt svar og eventuelt en strek under et viktig mellom svar.

2.5.4 Tallbehandling med datamaskin

I laboratoriekurset har du i de fleste arbeidsøktene tilgang til en datamaskin med det numeriske beregningsprogrammet Matlab. I første omgang skal du lære å bruke programmet for å løse enkle beregningsoppgaver, og videre skal vi fokusere på å bruke det til å behandle måledata og presentere resultatet som grafer. Laboratoriekurset inneholder en egen økt der studentene vil få en innføring i bruk av Matlab, og Matlab vil også bli brukt ved flere laboratorieøkter i dette kurset og i etterfølgende laboratoriekurs.

2.6 Oppsummering

Hvordan skrive en journal (eventuelt strukturere arbeidsnotatene dine):

1. Tittel, dato, navn på personene som utfører eksperimentet.
2. Hensikten med eksperimentet.
(Du bør kommentere dette på slutten av føringen)
3. Liste over brukt apparatur.
(ta med produsent, id-nummer, usikkerhet, etc., ikke ta med penn, blyant, datamaskin, etc.)
4. Skisse av instrumentoppsettet.
5. Beskrivelse.
(det du faktisk *gjør*, ikke det heftet sier at du skal gjøre)
6. Resultater.
(samling av målinger i tabeller og figurer, små utregninger)
7. Analyse/diskusjon.
(usikkerhetsberegninger)
8. Diskusjon/konklusjon.
(feilkilder, forbedringer)

Husk å skrive ting ned mens de skjer, ikke anta at du kommer til å huske alt et par timer senere eller når du kommer hjem.

Generelle ting å huske på:

- Alltid ta med enheter.
- Bruk penn til tekst og blyant til figurer.
- Stryk over hvis du skriver ~~feil~~ feil.
- Enslige målinger kan skrives under punkt 5, for eksempel, "Først veide vi ting 1, $m_1 = 0,532\text{g}$, som ..."
- Bruk formelle tabeller (ingen vertikale linjer).
- Hold det pent og ryddig slik at du kan finne det du leter etter senere (men ikke sløs med papir).

Kapittel 3

LINEÆR BEVEGELSE

Mål: Hensikten med oppgaven er å måle fysiske størrelser knyttet til et mekanisk system og deretter sammenlikne disse med teoretiske verdier. De teoretiske størrelsene følger fra newtonsk mekanikk og målingene gjøres ved hjelp av et dataloggingsutstyr med sensorer for kraft og posisjon. De målte størrelsene blir videre bearbeidet i regneark. Hensikten er også å gi en nærmere forståelse av de fysiske størrelsene posisjon, fart og akselerasjon og kinetisk og potensiell energi.

3.1 Teori

3.1.1 Det mekaniske systemet

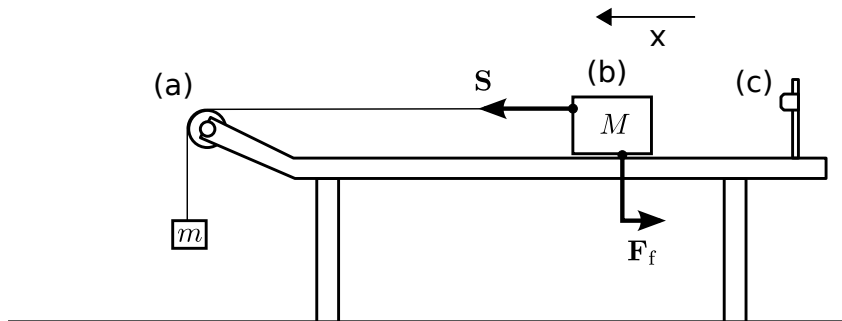
Det mekaniske systemet som skal undersøkes er vist i figur 3.1. Det består av en vogn med masse M og et fallende legeme med masse m .¹ Disse er forbundet med en snor som ruller på en trinse. Du skal i denne oppgaven undersøke posisjon, fart og akselerasjon til vognen med masse M og se på friksjonen mellom vognen og underlaget. Dere skal også undersøke systemets mekaniske energi.

3.1.2 Bevegelsen til M etter at den lille massen har nådd gulvet

Bevegelsen kan deles i to tidsområder, før og etter at den lille massen treffer gulvet. Etter at den lille massen har truffet gulvet, er den store massen bare utsatt for friksjonskrefter.² Dynamikkbanen er ikke helt friksjonsfri, slik at etter at den lille massen treffer gulvet, vil bevegelsen bremses litt opp. I dette eksperimentet antar vi at friksjonskraften F_f er propor-

¹På laboratoriet er det to forskjellige oppsett av dette systemet. Det ene oppsettet er en luftputevogn som glir på en luftputebane, mens det andre oppsettet er en vogn som ruller på en rullebane. Teorien for begge oppsettene er den samme.

²Her og i resten av eksperimentet antar vi at massen til snoren kan neglisjeres.



Figur 3.1: Figur av apparatoppsettet. Masse m er forbundet med snor rundt trinse (a) til masse M . På masse M er det festet en kraftmåler (b) som måler snordraget på masse M . Bevegelsen til masse M registreres med avstandsmåleren (c).

sjonal med normalkraften N på legemet,³ som i dette tilfellet er tyngden Mg av legemet,

$$F_f = \mu N = \mu Mg, \quad (3-1)$$

der μ er friksjonskoeffisienten. Ved hjelp av Newtons 2. lov får vi for denne delen av bevegelsen

$$-\mu Mg = Ma_2 \quad \text{som gir} \quad a_2 = -\mu g, \quad \text{eller} \quad \mu = -a_2/g. \quad (3-2)$$

Akselerasjonen a_2 , regnes med fortegn. Den er konstant i tid, og dette forteller oss at bevegelsen blir jevnt retardert.

3.1.3 Bevegelsen før den lille massen har nådd gulvet

Vi vil først bestemme teoretisk snordrag S og akselerasjon a_1 til systemet for den første delen av bevegelsen. Bruker vi Newtons 2. lov på hele systemet, m og M , vil snordraget bli en indre kraft (motsatte og like store på de to massene) og falle bort. De ytre kreftene er tyngden til det lille loddet og friksjonen,

$$mg - \mu Mg = (m + M)a_1, \quad (3-3)$$

som gir akselerasjonen a_1 i første del av bevegelsen,

$$a_1 = g \frac{m - \mu M}{m + M} = g \frac{m/M - \mu}{1 + m/M}. \quad (3-4)$$

Snordraget S kan finnes ved å bruke Newtons 2. lov på M ,

$$S - \mu Mg = Ma_1, \quad (3-5)$$

³Denne antagelsen er god når det gjelder glidefriksjon. I praksis vil også rullefriksjon og luftmotstand bidra til F_f . Disse formene for friksjon har en mer komplisert form enn ligning (3-1), og vil avhenge av flere størrelser (for eksempel er luftmotstanden avhengig av hastigheten v). Her vil vi for enkelhets skyld anta at all friksjon modelleres som glidefriksjon.

som gir snordraget

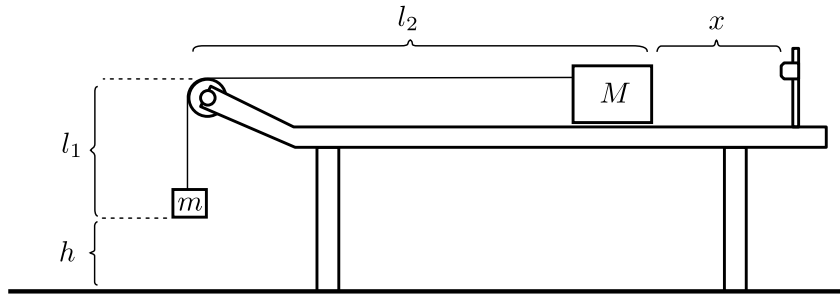
$$S = M(a_1 + \mu g) = mg \frac{1 + \mu}{1 + m/M}. \quad (3-6)$$

Merk at snordraget, som måles av kraftmåleren, ikke er lik tyngden til det fallende legemet. Massen til vogna M inkluderer kraftmåleren, og begge massene M og m finnes ved veiing.

3.1.4 Energibevarelse

Når det ikke er friksjon, vil den mekaniske energien til systemet være bevart i tid. I vårt tilfelle er den mekaniske energien til det samlede systemet før m når gulvet lik

$$E = \frac{1}{2}(M + m)v^2 + mgh. \quad (3-7)$$



Figur 3.2: Skisse av systemet og dynamikkbanen med definisjon av størrelsene h , l_1 , l_2 og x .

Avstanden mellom fartsmåleren og trinsa, og likeledes avstanden mellom trinsa og gulvet, er fast og sammen utgjør disse strekningene en lengde kalt L .

$$(h + l_1) + (x + l_2) = L, \quad (3-8)$$

der l_1 er den vertikale delen av tråden pluss tykkelsen av m og l_2 er den horisontale delen av tråden pluss tykkelsen av M . Summen av disse kaller vi l , og dette er en konstant lengde helt til m treffer gulvet. Dermed er

$$h + l + x = L \quad \text{eller} \quad h = L - l - x, \quad (3-9)$$

slik at samlet energi uttrykt ved de målte størrelsene v og x blir:

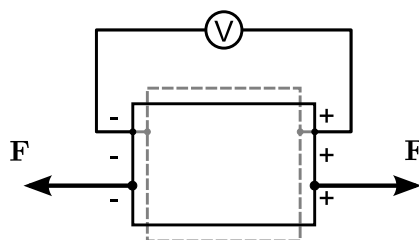
$$E = \frac{1}{2}(M + m)v^2 + mg(L - l - x) = \frac{1}{2}(M + m)v^2 - mgx + mg(L - l). \quad (3-10)$$

Størrelsen $L - l$ er konstant, og siden potensiell energi kan regnes i forhold til hvilken som helst høyde, trenger vi ikke å ta med det siste leddet i beregningen.

3.2 Litt om målesensorene

3.2.1 Virkemåten til kraftmåleren

Når en piezoelektrisk krystall utsettes for mekanisk spenning, endres overflateladningen på krystallen, som vist i figur 3.3. Overflateladningene er årsak til en elektrisk potensialforskjell over krystallen, og denne viser seg å være proporsjonal med kraften. Systemet kan kalibreres, slik at den målte spenningen som skyldes kraftpåvirkningen kan omsettes til en kraft.



Figur 3.3: Prinsippskisse for en piezoelektrisk krystall. Stiplet figur viser formen på krystallen før krefter påføres, mens formen under kraftpåvirkning er angitt med heltrukken linje. Under kraftpåvirkning vil overflateladning på krystallen endres, som antydnet på figuren, og den resulterende spenningsforskjellen kan måles.

3.2.2 Virkemåten til posisjonsmåleren

Posisjonsdetektoren i Pasco-loggesystemet inneholder en lydkilde som sender ut kortvarige lyder (ultralyd) med jevne mellomrom. En bruker det omvendte prinsippet av det som er antydnet for kraftmåleren; en tilført spenning over krystallen skaper deformasjoner, som i sin tur forårsaker lydbølger. I tillegg inneholder posisjonsdetektoren en lydmåler. Posisjonen til objektet, i forhold til ekkoloddet, er målt tidsforskjell mellom utsendt og reflektert lydpuls, multiplisert med lydhastigheten og dividert med en faktor to, siden lyden tilbakelegger den dobbelte strekningen. Posisjonsmåleren er altså i prinsippet et ekkolodd. Ekkoloddet, eller posisjonsdetektoren, står i forbindelse med en datalogger, slik at sammenhørende tider for lydutsendelse og posisjon til objektet blir lagret i en datafil som vist i tabell 3.1.

Inversverdien til tiden $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ mellom to periodiske lydsignaler, eller antallet ganger det sendes ut lyd i sekundet, kalles loggfrekvensen, $f = 1/\Delta t$. Denne, i tillegg til det totale antallet målinger n en ønsker å gjøre, også kalt loggeperioden, bestemmes av brukeren.

3.2.3 Derivasjon av diskret målte størrelser

Størrelser som er målt slik som beskrevet ovenfor og vist i tabell 3.1 sier vi er målt ved diskrete tidspunkt. Størrelser som teoretisk kan avledes av disse ved bruk av infinitesimale

Tabell 3.1: En skjematisk datafil for posisjonsmålinger.

| Måling nr. i | Tidspunkt for måling, t_i | Posisjon ved måling, x_i |
|----------------|-----------------------------|----------------------------|
| 1 | t_1 | x_1 |
| 2 | t_2 | x_2 |
| \vdots | \vdots | \vdots |
| i | t_i | x_i |
| \vdots | \vdots | \vdots |
| n | t_n | x_n |

differanser, det vil si derivasjon eller integrasjon, vil nå måtte beregnes ved bruk av endelige differanser.

For eksempel vil hastigheten v som er den tidsderivert av posisjonen x beregnes som følger,

$$v = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (3-11)$$

der Δx er tilbakelagt strekning i tidsrommet Δt . Utregningen gjøres for alle posisjoner som er logget x_i . For å få symmetri om tidspunktet t_i , der i er loggeindeksen, kan følgende størrelse brukes,

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}. \quad (3-12)$$

For akselerasjonen har en et tilsvarende uttrykk gitt ved hastigheten.

3.3 Litt om Pasco dataloggingssystem

Alle fysiske størrelser er målbare og det fins mange forskjellige instrumenter for å gjøre dette. I et instrument blir ofte den fysiske størrelsen, for eksempel en kraft, omsatt til et elektrisk signal som avleses. Det er da viktig at det er en lineær sammenheng mellom størrelsen (kraften) en skal måle og avlest elektrisk signal (spenningen) og at instrumentet er kalibrert. Kalibrering av et instrument vil si at en utsetter instrumentet for kjent størrelse, for eksempel kraften 1 N, og fastslår den tilhørende styrken på det elektriske signalet.

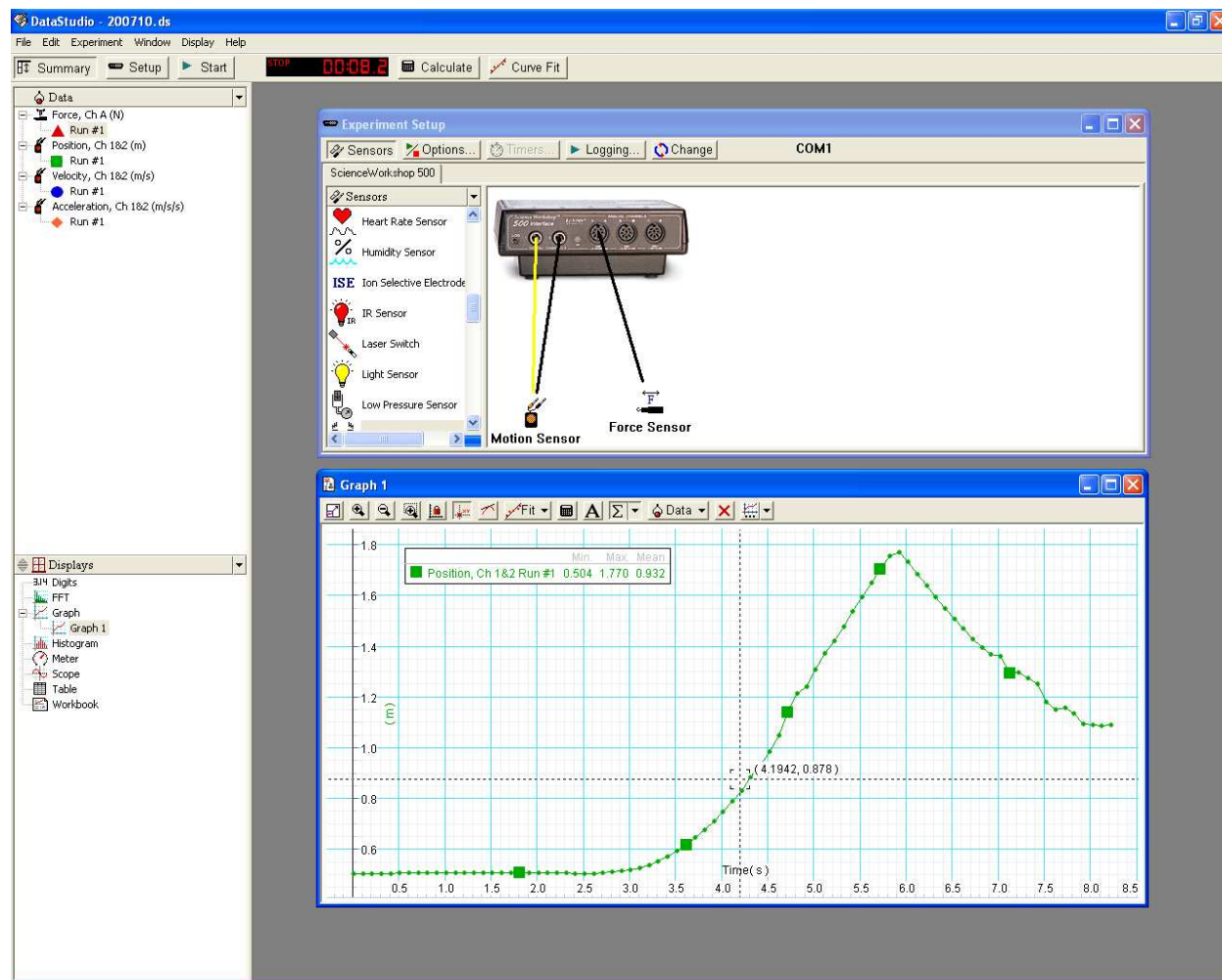
I et dataloggingssystem er avlesningen av instrumentet automatisert slik at avlesningen fremkommer som et tall og at dette gjøres med jevne mellomrom. Instrumentene for måling av forskjellige fysiske størrelser kalles ofte sensorer av ulike slag; for eksempel kraftsensor, temperatursensor, og så videre.

Når du skal måle forskjellige fysiske størrelser ved hjelp av Pasco dataloggingsutstyret, går du frem som følger:

1. Start DataStudio og velg «Create new experiment»

Du får frem et skjermbilde som vist i figur 3.4.

- **Experiment Setup:** Her styrer/kontrollerer du dataloggeren. Til venstre i dette vinduet er det en alfabetisk liste med ulike typer sensorer som kan legges til.
- **Data:** Her vises de ulike størrelsene som kan måles (alt etter hvilke sensorer som er lagt til), og de måledata som hittil er samlet inn.
- **Displays:** Her vises ikoner for ulike måter å presentere data. Når et sett med måledata blir fremvist ved hjelp av denne menyen vil det dukke opp i skjermen, for eksempel som en graf, slik som vist i figur 3.4.



Figur 3.4: Skjerm bilde av Pasco dataloggingsystem.

2. Velg målesensorer

Sensorene for måling av ulike størrelser ligger listet alfabetisk i vinduet til venstre i *Experimental Setup*-vinduet og har illustrative symboler. Programvaren til Pasco virker etter «dra-og-slipp»-prinsippet. Du kan også **dobbelklikke på symbolene** for å aktivere sensorene, og koblingene til dataloggeren vil vises. Hvis det ikke allerede er koblet opp, kobles ledningene fra sensorene til dataloggeren (fysisk) slik at det stemmer med bildet i *Experimental Setup*-vinduet.

3. Velg målefrekvens

Dobbelklikk på en sensor i *Experimental Setup*-vinduet. Du får frem en side der du kan

kontrollere loggefrekvensen.

4. Start målingene

Trykk **start** og målingene starter. Trykk **stopp** når du er ferdig. Du kan også starte og stoppe målingene automatisk. Dette gjøres fra menylinjen, ved bruk av: *Experiment/ Set Sampling Options*. Hver gang du trykker start kommer det frem en ny målerserie i Data-vinduet (Run 1, Run 2 og så videre) for hver sensor. Disse kan slettes dersom du ønsker å fjerne en måleserie. Dersom du ønsker å fjerne en måleserie, kan du også gjøre dette fra menylinjen: *Experiment/ Delete All Data Runs*.

5. Velg fremvisning av data (displays)

En kan velge ulike måter for å fremvisning av målte data:

- Dobbeltklikk på symbolet i *displays*-vinduet (for eksempel en graf).
- Dra datasymbolet fra *data*-vinduet og ned på et symbol i *display*-vinduet (for eksempel graph).
- Dra et display-symbol inn i *setup*-vinduet.

3.4 Eksperimentelt

3.4.1 Oppsett av DataStudio

Du skal nå sette opp dataloggingssystemet, slik at vi får logget målingene fra de to sensorene i forsøket, kraftmåleren og ekkoloddet. Se kapittel 3.3 for nærmere detaljer.

- Kople til «Force Sensor» og «Motion Sensor».
- Dobbeltklikk på bevegelsessensoren (Motion Sensor). Velg for eksempel en loggefrekvens på 10 eller 20 Hz.
- Dobbeltklikk på kraftsensoren. Velg samme loggefrekvens.
- Pass på at automatisk start/stopp er avslått.
- Husk å lagre det du gjør i tilfelle du skulle få bruk for det eller må gjenopprette senere. Alt du gjør elektronisk i laboratoriekurset skal lagres på hjemmeområdet ditt og ikke på maskinen på laboratoriet. For å få tilgang til hjemmeområdet ditt fra maskinen du sitter på må du først koble opp hjemmeområdet ditt. Det gjør du ved å gå på 'Min datamaskin'. Der velger du 'Tools/Map network drive'. Velg en plassering, og skriv inn '\\sambaad.stud.ntnu.no\brukernavn'. Deretter passord i neste vindu. Du vil nå kunne velge hjemmeområdet ditt når arbeidet skal lagres.

3.4.2 Kontroll av ekkolodd

Ekkoloddet måler posisjonen til vognen med masse M . Du skal nå undersøke ekkoloddet.

- Gjør en måling av posisjonen til vognen, mens vognen holdes i samme posisjon. Sjekk at resultatet som dataloggingssystemet gir, stemmer sånn noenlunde med avstanden fra sensoren, som dere kan finne ved å se på målebåndet ved rullebanen/luftputebanen. Noter ned differansen mellom det ekkoloddet viser og avstanden gitt ved målebåndet. Du vil få bruk for dette senere.
- Gjennomfør en måling av posisjonen til vognen der vognen først holdes i ro ved 50,0 cm, og deretter flyttes til 150,0 cm og holdes i ro der (bruk målebåndet til å avlese posisjonen). Avstanden mellom disse to posisjonene er 100,0 cm. Sjekk at dataloggingssystemet gir samme avstand mellom posisjonene (Merk at selve posisjonsverdien kan være annerledes i dataloggingssystemet avhengig av hvor ekkoloddet er plassert i forhold til nullpunkt på målebåndet, men differansen mellom posisjonene skal være den samme, dersom ekkoloddet er riktig kalibrert.). Dersom avstanden mellom posisjonene funnet ved dataloggeren avviker fra posisjonen funnet ved målebåndet kan det hende at ekkoloddet ikke er nøyaktig kalibrert.⁴ Ta kontakt med laboratorieveileder.
- Les av posisjonen som vognen M har idet masse m treffer gulvet.

3.4.3 Kontroll av kraftmåler

Kraftmåleren i forsøket er festet til vognen, og måler snordraget som snoren utfører på vognen. Merk at kraftmåleren måler positive verdier når den blir presset inn, mens verdien er negativ under strekk. Vi skal nå undersøke at denne gir riktige verdier ved å teste mot en kjent kraft.

- Vei kontrolloddet med vekten. Som kontrollodd kan du bruke det lille loddet med masse m .
- Ta kraftsensoren av vognen.
- Nullstill kraftføleren ved å trykke «Tare» når det ikke er noe belastning (hold knappen inne mer enn 2 s).
- Heng kontrolloddet opp etter kraftmåleren, og logg resultatene fra kraftmåleren med dataloggingssystemet.
- Sjekk at resultatene stemmer overens med det du ville forventet utfra $F = mg$, for kontrolloddet.

⁴Ekkoloddet regner ut avstanden ved bruk av en innlagt verdi for lydhastigheten. Lydhastighet i lufta varierer blant annet som funksjon av temperaturen. For eksempel er lydhastigheten ved 20 °C 343,2 m/s, mens den ved 25 °C er 346,1 m/s.

3.4.4 Gjennomføring av målingene

Vi skal nå gjennomføre selve målingene av posisjonen til vognen og kraften fra snoren på vognen, når systemet starter fra utgangsposisjonen.

- Sett kraftsensoren tilbake på vognen.
- Mål massen til vognen med kraftsensor M og massen til det fallende legemet m .
- Fest snoren som masse m henger i, på kraftsensoren.
- Sjekk at vognen vil stoppe og sprette tilbake fra bremsen (elastisk strikk for luftputebane eller magnetisk brems for rullebane).
- Forbered forsøket ved at dere tenker gjennom hvordan dere skal gjennomføre forsøket. Her kan dere velge å la en person starte/stoppe målingene i DataStudio mens den andre slipper vognen. Eventuelt kan dere bruke betinget start og stopp i DataStudio. En kan da starte ved posisjon for eksempel 0,60 m (rise above) og stoppe etter for eksempel 5 s. Målingene vil da starte automatisk når avstanden mellom målesensor og vognen øker forbi 60 cm, og stoppe automatisk etter 5 s, og begge er da frigjort til å gjøre arbeidsoppgaver ved forsøksoppsettet.
- Nullstill kraftføleren ved å trykke «Tare» når det ikke er noe belastning (hold knappen inne mer enn 2 s).
- Pass på at det er ikke er strekk i ledningen til kraftsensoren, mens dere nå skal utføre målingene (det vil gi en ekstra kraft på vognen M som vi ikke har tatt hensyn til i teorien). Dette kan gjøres ved at en av dere holder ledningen i slakk vinkelrett ut fra vognen mens målingene utføres.
- Slå på luftputebanen (for de som har det), og flytt vognen til den posisjonen vognen skal slippes ifra. Noter ned denne posisjonen.
- Gjennomfør en måleserie (trykk på START), og slipp vognen. Logging av måleresultatene starter og stopper automatisk (se punkt over).
- Fremstill målinger av *kraft*, *posisjon*, *fart* og *akselerasjon* i samme diagram (*merk og dra*). Juster grafene slik at de har felles origo for x -aksene (tiden).
- Observer grafene og sjekk at du har fått gode målinger. Hvis ikke, lag ny måleserie (slett den gamle, *delete last run*). Lag en utskrift av grafene. Kommenter måleresultatene. Kan dere identifisere når masse m treffer gulvet på grafene?

3.4.5 Dataanalyse

- Anta at energien er bevart og finn ut maksimalhastigheten som vognen M kan oppnå. Hvordan stemmer dette med resultatene?

- Undersøk om det er friksjon mellom vognen og underlaget ved å bestemme friksjonskoeffisienten, se kapittel 3.1.2. Dersom resultatene viser en noe ujevn akselerasjon i det aktuelle intervallet kan du bruke gjennomsnittsverdien over flere målepunkter som et mål for akselerasjonen her.
- Finn akselerasjonen før loddet m treffer bakken. Sammenlign med det du skulle forventet utifra teori, se kapittel 3.1.3.
- Før loddet treffer bakken vil snordraget ha et utslag som er negativt, siden måleren strekkes. Finn kraften i dette intervallet, og sammenlign med teoretisk verdi, se kapittel 3.1.3.

Vi skal nå bruke Excel til å analysere dataene fra målingene.⁵ Analysen i det følgende kunne vært gjort i dataloggingsprogrammet, men vi skal selv gjøre noen av beregningene som dataloggingsprogrammet har gjort, for å få en bedre forståelse av de ulike fysiske størrelsene.

- Eksporter resultatene fra målingen av posisjon og de tilhørende tidene fra dataloggingssystemet til en tekstfil, som du deretter kan importere i et Excel-regneark. Hvis du får problemer med dette, ta kontakt med laboratorieveilederen.
- Husk å lagre regnearket med jevne mellomrom på hjemmeområdet ditt.
- Regn ut hastigheten og akselerasjonen i kolonnene til høyre for posisjonen (se kapittel 3.2.3). Husk å plote resultatene fra Excel, og sjekk at de stemmer med plottene i dataloggingssystemet.
- Sett av to kolonner som skal benyttes til energiberegninger. Regn ut den kinetiske energien til systemet (det vil si både M og m) i den første kolonnen. I den andre kolonnen skal du regne ut den potensielle energien til systemet. Plott begge kolonnene og sammenlign den kinetiske og den potensielle energien i lys av kapittel 3.1.4. Regn så ut den totale mekaniske energien i en ny kolonne. Er den mekaniske energien bevart?

⁵Senere i laboratoriekurset vil du bli introdusert for Matlab, som, for de fleste applikasjoner i eksperimentell fysikk, er et langt bedre verktøy til databehandling og analyse enn Excel.

Kapittel 4

FEIL I FYSISKE MÅLINGER

4.1 Målefeil

Når fysiske fenomener modelleres ved hjelp av matematiske modeller, blir fysiske størrelser behandlet som om de var matematiske størrelser selv om de er vesensforskjellige. For det første er matematiske størrelser ubenevnte mens fysiske størrelser alltid er benevnte enten som et antall eller ved en standardenhet. For det andre kan verdien til matematiske størrelser ofte angis som en bestemt desimalbrøk mens verdien til fysiske størrelser aldri kan angis som en bestemt desimalbrøk som fremfor alle andre angir den sanne verdi for størrelsen. Denne ubestemtheten i fysiske størrelser følger av vår oppfatning av materiens oppbygging samt de målemetoder vi bruker for å bestemme verdien til fysiske størrelser.

Den ubestemthet som følger av målemetodene er en konsekvens av at våre sanser og våre instrumenter gir informasjon med endelig oppløsning. Når vi prøver å fastsette verdien til en fysisk størrelse som en bestemt desimalbrøk av en enhet vil vi alltid, til syvende og sist, komme til det punkt hvor neste siffer i desimalbrøken ikke kan fastsettes. Følgelig vil resultatet av en måling av en fysisk størrelse alltid vil være et intervall på en tallinje. I numeriske beregninger med fysiske størrelser oppnår man imidlertid betydelige forenklinger ved å representere størrelsene ved hjelp av bestemte desimalbrøker isteden for ved intervaller. Til dette formål velges vanligvis en desimalbrøk nær midten av det intervall som ble fastlagt under målingen. Denne desimalbrøken betegnes som den fysiske størrelsens måltall og utstrekningen av intervallet til begge sider oppfattes som en målefeil. Hvis målingen er upresis er utstrekningen av feilintervallet stor. Hvis målingen er presis er utstrekningen av feilintervallet liten.

Hvis du under måling av en fysisk størrelse har bestemt de fire første sifrene i desimalbrøken som representerer størrelsens verdi til for eksempel 2,345, men kan ikke bestemme det femte sifferet betyr dette at du som resultat av målingen kan fastslå at størrelsens sanne verdi ligger i intervallet $[2,3445, 2,3455)$ på tallinjen. Matematisk angis måltallet som $2,3450 \pm 0,0005$, men dersom det som er skrevet er bare 2,345, så skal vi i fysikken forstå at det implisitt er ment en usikkerhet på opptil 0,0005. Alle andre tall i intervallet representerer også mulige sanne verdier.

4.2 Angivelse av resultatet fra en måling av en fysisk størrelse

Måling av en fysisk størrelse er en operasjon som innebærer fastsettelse av et måltall q for størrelsen uttrykt i bestemte standardenheter og en tilhørende målefeil Δq . Målefeilen kan oppgis som absolutt feil Δq eller som relativ feil $\Delta q/q$. Den relative feilen angir hvor presis målingen er, som forholdet mellom intervallets utstrekning og størrelsens tallverdi. I praksis er det ofte denne feilen som er av størst interesse.

Når måleresultat angis i tallform kan resultatet skrives på to måter:

- $q = (q_0 \pm \Delta q)$ [enhet].
Eksempel: $q = (256 \pm 1)$ m.
- $q = q_0$ [enhet] $\pm \Delta q/q$ hvor $\Delta q/q$ angis i prosent eller som ppm.
Eksempel: $q = 256$ m $\pm 0,5\%$.

Når måleresultat angis grafisk i kurvediagrammer er det rasjonelt å antyde målefeilen ved å trekke linjer i gjennom målepunktene parallelt med aksene og med lengde lik målefeilen slik som vist i figur 4.1.¹

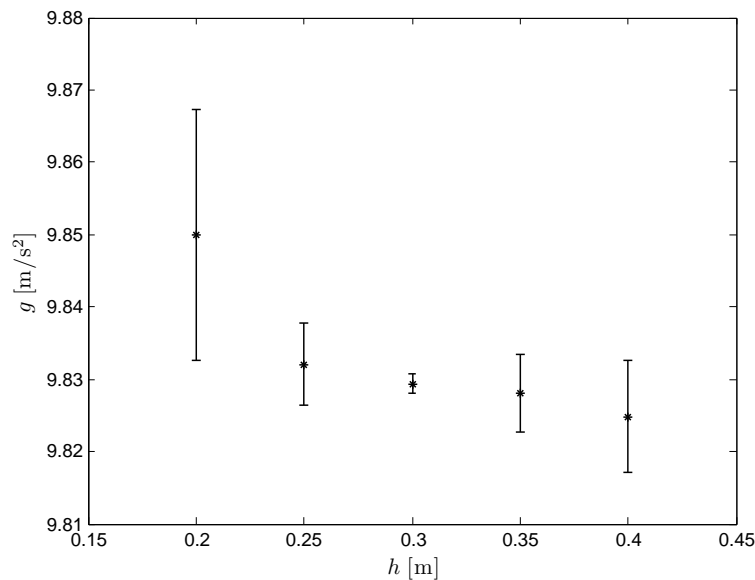
Grafiske angivelser av målefeilen er ofte til god hjelp når beste kurve skal trekkes gjennom en punktskare. Vær imidlertid oppmerksom på at overdreven bruk av grafisk feilangivelse kan overlesse et diagram og gjøre det uklart. Vanligvis er det nok å angi feilen i to til tre punkter i hvert diagram unntatt når feilen varierer sterkt fra punkt til punkt.

Nøyaktigheten i målte tallverdier for fysiske størrelser gir anvisning om det antall sifre som er tilstrekkelig for å angi størrelsens verdi. Ta med så mange sifre at kun det siste sifferet er beheftet med usikkerhet (unntaksvis de to siste sifrene).

4.3 Analyse av målefeilen

Det er ofte hensiktsmessig å skille mellom tre hovedtyper av målefeil: 1. Tilfeldige feil, 2. Systematiske feil og 3. Grove feil.

¹ Dette eksemplet er hentet fra pendeleksperimentet som dere skal gjennomføre senere i laboratoriekurset i kapittel 5. Her kommer en liten forklaring av figuren, som dere vil få større forståelse av når dere har gjennomført eksperimentet: Figuren viser fem ulike målinger av tyngdeakselerasjonen g gitt som funksjon avstanden mellom pendelens opphengningspunkt og masse-middelpunkt, h . Tyngdeakselerasjonen er funnet ved hjelp av ligning (5-19) der pendelens svingeperiode T , pendelens lengde l og bredde b og h er målt eksperimentelt. Figuren illustrerer meget godt at usikkerheten i måling av g blir liten når h velges lik pendelens reduserte lengde r , slik som beskrevet i kapittel 5.1.3.



Figur 4.1: Eksempel på grafisk angivelse av målefeil.

4.3.1 Tilfeldige feil

Måltallet for fysiske størrelser som fremkommer ved måling er vanligvis et resultat av telling, avlesning av skala eller avlesning av en digital avlesningsenhet.

Telling er en målemetode som i prinsipp ikke er direkte beheftet med tilfeldige feil. De mest vanlige årsakene til tilfeldige feil i avlesning av måltall er tilfeldigheter i resultatet som kommer av subjektive vurderinger ved avlesning av skala eller tilfeldigheter i resultatet som kommer av at verdien av det minst signifikante siffer i et digitalt avlesningsvindu egentlig er en avrundet verdi. Dessuten vil tilfeldig drift i verdien på parametre som ikke er kontrollert i eksperimentet ofte føre til tilfeldighet i måleresultatet.

Ved avlesning av skala sammenligner vi posisjonen av en kontur (på en viser eller en gjenstand) med markeringsstrekene på skalaen. Denne prosessen er begrenset både av øyets oppløsningsevne og skarpheten, tettheten og bredden av markeringsstrekene. To fremgangsmåter er hovedsakelig i bruk for å bestemme feilintervallet ved avlesning av skala: Statistiske metoder og skjønn.

Foreløpig skal vi unngå å bruke statistiske metoder og forutsetter at du som regel estimerer størrelsen på feilintervall ved skjønn. Dette skjønnet kan du vanligvis utøve på følgende måte:

- Bestem den største posisjon q_1 på skalaen, som helt sikkert er mindre enn minste tenkelige avlest verdi.
- Bestem så den minste posisjon q_2 på skalaen, som helt sikkert er større enn største tenkelige avlest verdi.
- Feilintervallets utstrekning kan da bestemmes som $\Delta q = |q_2 - q_1|$ og som regel vil

midten av dette intervallet gi det beste skjønn for måltallet.

Når måleresultatet foreligger som avlesning fra et digitalt avlesningsvindu henger utstrekningen av feilintervallet sammen med det antall sifre som angis i målevinduet.

Hvis du for eksempel ved avlesning av en tre-siffrs digital avlesningsenhet har fått tallet 235 som resultat vil du som regel, på grunn av tilfeldighet i siste siffer ikke kunne avgjøre om måltallet er 234, 235 eller 236. Det vil si avlesning av digitale avlesningsenheter har vanligvis en usikkerhet som tilsvarende ± 1 i siste siffer. I tillegg til dette må du ta hensyn til de feilintervaller som fabrikanten til måleutstyret angir. Opplysninger om dette finnes i utstyrets bruksanvisning.

Generelt kan vi si at tilfeldige feil oppstår når våre sanser eller instrumenter presses mot grensen av sin oppløsning og når verdien av antatt konstante parametre i et eksperiment fluktuerer tilfeldig og ukontrollert. Tilfeldige feil er alltid til stede i eksperimenter. De bør forsøkes redusert ved å bruke presise instrumenter, kontrollere ytre parametre, eller ved å ta mange målinger og bruke statistiske metoder, men de kan aldri fjernes helt.

4.3.2 Systematiske feil

Vanlige årsaker til systematiske feil er:

- Den teoretiske modellen som brukes for å tolke måleresultatene ikke er naturtro.
- Apparaturen ikke er kalibrert nøyaktig.
- Apparaturen er defekt.

Et eksempel på en systematisk feil forårsaket av en teoretisk modell som ikke er naturtro finner du i fortolkningsmodellen for Cavendisheksperimentet i kapittel 7.² I dette eksperimentet blir gravitasjonskonstanten bestemt ved å måle gravitasjonskraften mellom store og små kulepar ved hjelp av en torsjonsvekt. Under utledningen her blir det kun tatt hensyn til gravitasjonsvekselvirkningen mellom nærmeste store og små kulepar, mens innflytelsen av alle andre masser på torsjonsvektens svingninger blir neglisjert. Prinsipielt sett vil dette føre til en systematisk feil i bestemmelsen av G . Det gjenstår imidlertid å utrede om denne feilen har praktisk betydning. Med andre ord, om den er av samme størrelsesorden eller større enn andre feil i eksperimentet. Et eksempel på systematisk feil på grunn av en unøyaktig kalibrert eller defekt apparatur er bruk av en klokke som er feil justert eller går for sakte. Ikke-konstante systematiske feil kan også forekomme, for eksempel når nullpunktet i et måleinstrument driver systematisk med tiden eller temperaturen.

Mens størrelsen av de tilfeldige feilene hovedsakelig påvirker utstrekningen av feilintervallet så vil systematiske feil hovedsakelig endre feilintervallets plassering på tallaksen i forhold til dens egentlige plassering, som vist i figur 4.2.

²Dette eksperimentet skal dere gjennomføre senere i laboratoriekurset.

Systematiske feil er vanligvis konstante under en serie med avlesninger og de kan derfor være vanskelig å oppdage. Når størrelsen av systematiske feil er kjent kan imidlertid måleresultatene korrigeres. Eksperimenter bør planlegges med sikte på å unngå systematiske feil. Dette kan gjøres ved å planlegge bruk av tilstrekkelig god teori og å sørge for pålitelige kalibreringer. Det er også viktig å planlegge eksperimenter slik at systematiske feil kan oppdages. Dette kan for eksempel gjøres ved å lage apparaturen slik at den kan brukes til å gjennomføre målinger hvor svaret er kjent fra tidligere anerkjente, presise målinger eller fra teoretiske betraktninger. Noen ganger kan det være vanskelig å skille mellom systematiske feil og tilfeldige feil.

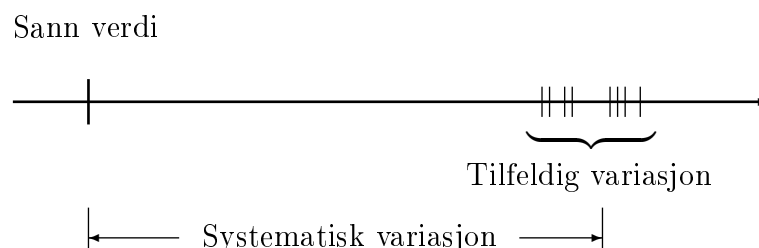
4.3.3 Grove feil

Grove feil eller personlige feil er feil som oppstår på grunn av menneskelig svikt ved planlegging eller gjennomføring av eksperimenter som for eksempel tellefeil i telling av pendelsvingninger, feil i avlesning av skala eller digitalt avlesningsvindu. Mot grove feil hjelper kun god nattesøvn, systematiske arbeidsmåter og pauser etter behov.

4.4 Feilregning

Det er hensiktsmessig å skille mellom måleprosedyrer som innebærer (i) direkte og (ii) indirekte bestemmelse av verdien til fysiske størrelser. Ved direkte bestemmelse fås måleresultatet gjennom en enkelt måling med et måleinstrument. Feilen i verdien til den fysiske størrelsen blir da gitt av presisjonen til måleinstrumentet. Opplysninger om presisjonen til måleinstrumentet oppgis som regel av produsenten og finnes i instrumentets bruksanvisning.

Ved indirekte bestemmelse fås måleresultatet gjennom en sammensatt måling som innebærer at flere størrelser måles direkte og den søkte verdi finnes gjennom beregning basert på en bestemt tolkningsmodell. Representasjon av måleresultat ved hjelp av et måltall og et feilintervall rundt måltallet gjør det naturlig å dele alle beregninger basert på måleresultat i to regneoperasjoner. Den ene knyttet til måltallet og den andre til feilintervallet. Regneoperasjoner knyttet til måltall følger de vanlige algebraiske regneregler for tall og fordrer ikke videre kommentarer. Regneoperasjoner knyttet til feilintervallet følger et eget sett med regneregler som samlet betegnes som feilregning.

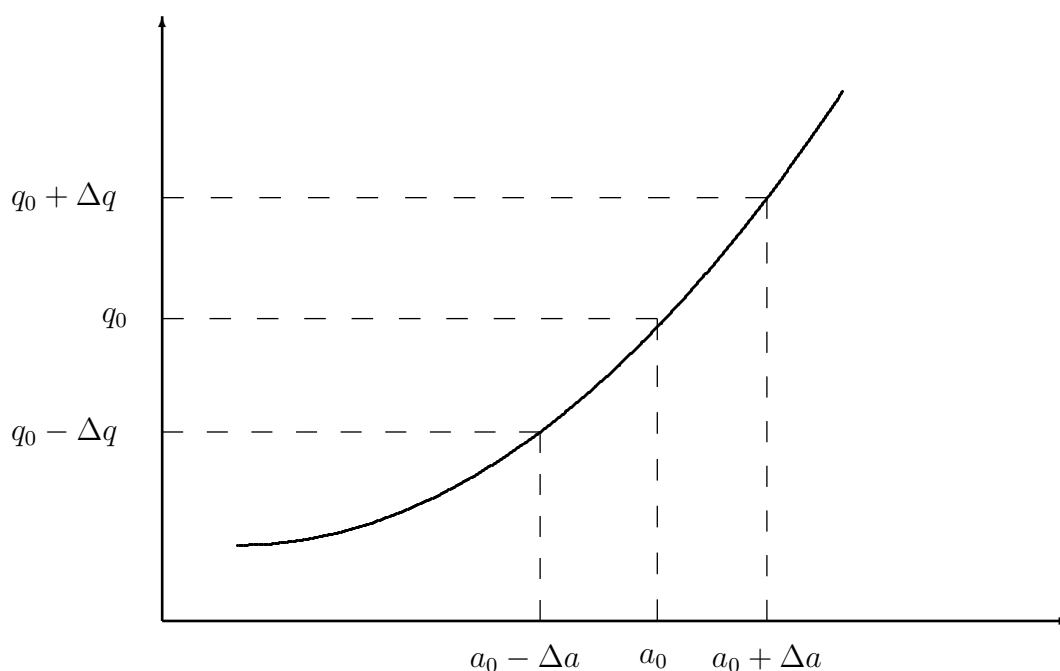


Figur 4.2: Relasjonen mellom tilfeldige og systematiske feil.

Bestemmelse av snordraget i ligning (3-6) er et godt eksempel på en indirekte bestemmelse av verdien til en fysisk størrelse. Her blir snordraget S bestemt fra målte og oppgitte verdier av størrelsene m, M, g og μ .

Generelt innebærer indirekte bestemmelse at en størrelse q , som ifølge tolkningsmodellen $q = q(a, b, c, \dots)$ er en funksjon av variablene a, b, c, \dots , skal bestemmes fra målte verdier av disse variablene. Det er rimelig å forvente at om det er målefeil $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ i henholdsvis a, b, c, \dots så vil disse akkumuleres gjennom beregningene og gi en feil Δq i q . Derfor må Δq kunne oppfattes som en funksjon $\Delta q = \Delta q(a, \Delta a, b, \Delta b, \dots)$. Feilregningens oppgave er å bestemme formen på denne funksjonen.

4.4.1 Det enkle tilfellet



Figur 4.3: Feilen Δq i q på grunn av feilen Δa i a .

Se først på det enkle tilfelle hvor størrelsen q kun avhenger av en målt størrelse a , det vil si at $q = q(a)$. Hvis a måles med usikkerhet Δa og måltallet for a , som representerer midtpunktet i usikkerhetsintervallet $(a - \Delta a, a + \Delta a)$, betegnes med a_0 , kan du umiddelbart finne midtpunktet $q_0 = q(a_0)$ for usikkerhetsintervallet for q gjennom alminnelig algebraisk beregning. For å finne utstrekningen Δq av usikkerhetsintervallet rundt q_0 må du imidlertid bruke feilregning som essensielt bygger på enkel bruk av differensialregning.

Fra figur 4.3 ser du at hvis Δa er en liten størrelse kan du i intervallet $(a - \Delta a, a + \Delta a)$ approksimere funksjonen $q(a)$ med en rett linje. Da blir

$$\Delta q \approx q(a_0 + \Delta a) - q(a_0) \approx \frac{dq}{da} \cdot \Delta a \quad (4-1)$$

hvor verdien av dq/da er evaluert i a_0 . Feilen Δq i q på grunn av feilen Δa i a blir slik proporsjonal med Δa der proporsjonalitetskonstanten er stigningstallet i a_0 .

Dersom stigningstallet skulle være negativt, vil vi ta absoluttverdien av stigningstallet fordi utstrekningen av et feilintervall alltid må være en positiv størrelse. Fra dette ser du at om a varierer i et intervall av størrelse $\pm\Delta a$ vil q variere i et intervall av størrelse $\pm\Delta q$ og en feil Δa i a vil føre til en feil Δq i q hvor

$$\Delta q = \left| \frac{dq}{da} \right| \Delta a. \quad (4-2)$$

Eksempel 1. Feil i bestemmelse av omkrets og areal av en sirkel.

Omkretsen $O = 2\pi r$ og arealet $A = \pi r^2$ av en sirkel kan bestemmes fra en målt verdi av radien $r = r_0 \pm \Delta r$. Ifølge ligning (4-1) blir feilen i bestemmelsen av omkretsen og arealet henholdsvis

$$\Delta O = \left| \frac{dO}{dr} \right| \Delta r = 2\pi \Delta r, \quad (4-3)$$

og

$$\Delta A = \left| \frac{dA}{dr} \right| \Delta r = 2\pi r \Delta r. \quad (4-4)$$

Divisjon av uttrykkene (4-3) og (4-4) med henholdsvis O og A gir uttrykkene for den relative feilen

$$\frac{\Delta O}{O} = \frac{\Delta r}{r}, \quad (4-5)$$

og

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \frac{\Delta r}{r} \quad (4-6)$$

som viser at den relative feilen i målingen av radien har dobbelt så stor innvirkning på den relative feilen i arealet enn i omkretsen. Dette kommer av at r går inn som $r^2 = r \cdot r$ (det vil si to ganger) i uttrykket for arealet og kun en gang i uttrykket for omkretsen.

4.4.2 Det generelle tilfellet

Vi ser nå på det generelle tilfelle hvor størrelsen q avhenger av flere målte primærstørrelser a, b, c, \dots , det vil si at $q = q(a, b, c, \dots)$ og at a, b, c, \dots måles med usikkerheter henholdsvis $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$

Partiell derivasjon

Før vi kan gi den generelle formen for usikkerheten i q må vi innføre en form for derivasjon som er meget sentral under analyse av funksjoner med flere variabler og som kalles *partiell derivasjon*. Ved partiell derivasjon av en funksjon med flere variabler, $q = q(a, b, c, \dots)$ blir q derivert med hensyn på en av variablene, mens de andre variablene, som det ikke deriveres med hensyn på, betraktes som konstanter. Partiell derivasjon har et eget symbol « ∂ » istedenfor « d » for derivasjon, for å tydeliggjøre dette. Vi illustrerer bruk av partiell derivasjon ved hjelp av to eksempler.

Eksempel 2. Partiell derivasjon.

Vi har en størrelse q som er indirekte gitt ved størrelsene a og b . Gitt relasjonen $q = a + b$ finner vi den partiell deriverte av q med hensyn på a ved å derivere uttrykket mens vi ser på b som en konstant,

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 1. \quad (4-7)$$

Tilsvarende finner vi at

$$\frac{\partial q}{\partial b} = 1. \quad (4-8)$$

Dersom q istedet er gitt ved $q = a^2b$ har vi

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 2ab, \quad (4-9)$$

og

$$\frac{\partial q}{\partial b} = a^2. \quad (4-10)$$

Eksempel 3. Partiell derivasjon sammenlignet med total derivasjon.

Den derivasjonen dere til nå er mest kjent med kalles egentlig *total derivasjon* og symbolet som ofte benyttes er «d», som dere sikkert er kjent med. Dersom vi har en funksjon av en variabel, $q = q(a)$, er partiell derivasjon og total derivasjon i praksis det samme. Dersom vi istedet har en funksjon av flere variabler, $q = q(a, b, c, \dots)$, er partiell derivasjon enklere enn total derivasjon. Årsaken til dette er at en under total derivasjon må ta hensyn til at de andre variablene kan være avhengige av den variabelen en deriverer med hensyn på, mens en under partiell derivasjon kan anse alle andre variabler som konstanter, som er enkle å derivere. Dette kan illustreres ved å totalderivere uttrykkene som vi partiellderivate i eksemplet over. Gitt $q = a + b$ har vi

$$\frac{dq}{da} = 1 + \frac{db}{da}, \quad (4-11)$$

der b generelt må betraktes som en funksjon av a , $b = b(a)$ og vi bruker kjerneregelen når vi skal derivere det siste leddet i funksjonen. Tilsvarende får vi at

$$\frac{dq}{db} = \frac{da}{db} + 1. \quad (4-12)$$

Dersom q er gitt ved $q = a^2b$ har vi at

$$\frac{dq}{da} = 2ab + a^2 \frac{db}{da}. \quad (4-13)$$

Legg merke til at vi nå har brukt produktregelen i tillegg til kjerneregelen. For den totalderiverte av q med hensyn på b , får vi

$$\frac{dq}{db} = 2a + a^2 \frac{da}{db}. \quad (4-14)$$

Gauss' feilforplantningslov

Det kan vises, for eksempel i referanse [1], at feilen (eller usikkerheten) Δq i størrelsen $q(a, b, c, \dots)$ er gitt ved uttrykket

$$(\Delta q)^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial c} \Delta c\right)^2 + \dots \quad (4-15)$$

Dette uttrykket er det som ofte refereres til som *Gauss' feilforplantningslov*. Ligning (4-15) gjelder under forutsetning av at primærstørrelsene $a, b, c \dots$ er uavhengige og at usikkerhetene i primærstørrelsene kan anses som små.

Ved bruk av Gauss' feilforplantningslov lønner det seg ofte å gå systematisk til verks når en skal regne ut høyre side i ligning (4-15). En partiellderiverer q med hensyn på hver eneste variabel som q måtte være avhengig av. Hver partiellderivert vil nå være et bokstavuttrykk gitt av variablene $a, b, c \dots$. Ofte vil en finne felles faktorer i de ulike bokstavuttrykkene for de partiellderivate, og en kan da forenkle høyre side av ligning (4-15) ved å trekke ut felles faktorer fra leddene. Når en har forenklet bokstavuttrykket så mye som mulig, kan en sette inn tallverdiene som er målt for $a, b, c \dots$ og $\Delta a, \Delta b, \Delta c \dots$ og finne tallverdien for usikkerheten i Δq .

Relativ feil

Ofte når en arbeider med Gauss' feilforplantningslov, kan det lønne seg å manipulere uttrykkene slik at det er den relative feilen ($\Delta a/a, \Delta b/b, \Delta c/c, \dots$) som inngår i leddene i ligning (4-15). Fordelene med å bruke relativ feil er flere: For det første er den relative feilen en *dimensjonsløs* størrelse. Det vil si at den er enhetsløs, og derfor er dette en størrelse som det er lett å forholde seg til; det er simpelthen et tall som sier hvor stor feilen i en størrelse er i forhold til den verdien som er målt. Dernest kan en også enkelt sammenligne den relative feilen i de ulike størrelsene som inngår i feilforplantningen, uavhengig av enhetene som de ulike størrelsene måtte ha. For eksempel gir det ingen mening å sammenligne en usikkerhet på 0,03 kg i en målt masse med en usikkerhet på 1,1 m i en målt lengde fordi enhetene er vidt forskjellige. Derimot gir det god mening å sammenligne en relativ feil på 0,02 i den målte massen med en relativ feil på 0,06 i den målte lengden; det forteller oss at usikkerheten i den målte lengden er 3 ganger større enn usikkerheten i den målte massen, når usikkerheten er betraktet i forhold til målverdien.

Dessuten viser det seg at dersom en i ligning (4-15) regner ut den relative feilen $\Delta q/q$ istedet for Δq , vil uttrykkene ofte forenkle seg. Dette vil vi illustrere ved å regne ut feilforplantningen for et generelt uttrykk på formen

$$q = \frac{ab^n}{c^m} \quad (4-16)$$

ved bruk av ligning (4-15). Ved partiell derivasjon av uttrykket i ligning (4-16) finner vi at

$$(\Delta q)^2 = \left(\frac{b^n}{c^m} \Delta a\right)^2 + \left(n \frac{ab^{n-1}}{c^m} \Delta b\right)^2 + \left(-m \frac{ab^n}{c^{m+1}} \Delta c\right)^2. \quad (4-17)$$

Hvis vi nå dividerer begge sider av ligning (4-17) med q^2 slik at vi nå får kvadratet av den relative feilen i q på venstre side, og setter inn uttrykket for q i ligning (4-16) på høyre side, får vi

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2 = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(n \frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(m \frac{\Delta c}{c}\right)^2. \quad (4-18)$$

Ikke bare er dette uttrykket enklere enn det opprinnelige i ligning (4-17); vi ser at det her kun er relative feil i variablene som inngår, noe som forenkler beregningene. Dersom vi nå har et uttrykk som kun inneholder multiplikasjon og divisjon, slik som ligning (4-16), så kan vi med en gang skrive opp uttrykket for den relative feilen, ved bruk av ligning (4-18), uten å måtte behøve å regne ut alle deriverte i ligning (4-15) hver gang.

Eksempel 4. Feil i bestemmelse av kinetisk energi.

Bevegelsesenergien til et legeme er gitt ved $E_k = mv^2/2$ og kan finnes eksperimentelt ved å måle hastigheten v og massen m til et legeme i bevegelse. Ifølge ligning (4-15) blir den absolutte feilen i bestemmelsen av den kinetiske energien

$$\Delta E_k = \sqrt{(mv\Delta v)^2 + \left(\frac{v^2}{2}\Delta m\right)^2} \quad (4-19)$$

Divisjon av dette uttrykket med E_k gir uttrykket for den relative feilen

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2} \quad (4-20)$$

som viser at den relative feilen i bestemmelsen av v veier mest i den relative presisjonen til E_k . Det vil si at v må bestemmes med dobbelt så stor presisjon som m for å ha samme vekt som feilkilde. Merk at en kunne ha kommet frem til ligning (4-20) direkte, uten partiell derivasjon, ved bruk av ligning (4-18).

Eksempel 5. Stor forskjell i absolutt feil.

Hvis for eksempel $q = a+b$, $\Delta a = 8$ og $\Delta b = 2$ får vi at $(\Delta q)^2 = (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 = (8^2 + 2^2) = 68$ og $\Delta q \approx 8$. Her kunne feilen i b vært neglisjert siden den bidrar kun med 3% av totalfeilen.

Eksempel 6. Feilen i en liten størrelse.

Når forskjellen i verdi hos to størrelser som skal adderes er stor kan du tåle stor feil i den lille størrelsen uten at feilen i summen blir merkbart større. Anta for eksempel at $a = 100 \pm 6$ (6% feil) og $b = 5 \pm \Delta b$. Vi gir Δb ingen verdi, men spør: Hvor stor kan Δb bli uten at Δq blir mye større enn Δa ? Hvis $q = a + b$ blir $(\Delta q)^2 = (\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 = 36 + (\Delta b)^2$. Selv om vi setter $\Delta b = 3$ det vil si en feil på hele 60% i b så blir $\Delta q \approx 6.7$ som er knapt merkbar økning i forhold til Δa .

Eksempel 7. Stor forskjell i relativ feil.

Når $q = ab$ eller $q = a/b$ blir ifølge ligning (4-18) $(\Delta q/q)^2 = (\Delta a/a)^2 + (\Delta b/b)^2$. Det vil si at hvis $\Delta a/a > 3(\Delta b/b)$ vil $(\Delta b/b)^2 \ll (\Delta a/a)^2$ og feilen i b kan neglisjeres. Her er forholdstallet 3 valgt som grenseverdi fordi bidraget fra $\Delta a/a$ i uttrykket for $(\Delta q/q)^2$ da vil være omtrent en størrelsesorden større enn bidraget fra $\Delta b/b$.

Eksempel 8. Feilen i en differanse.

Anta at $q = a - b$, $a = 100 \pm 2$ og $b = 96 \pm 2$. Det vil si både a og b måles med relativ usikkerhet på cirka 2%. Ifølge ligning (4-15) blir $\Delta q = [(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2]^{1/2} \approx 2.8$. Det vil si at den relative feilen $\Delta q/q \approx 71\%$. Pass godt på feilen i liten differanse mellom to store størrelser.

Eksempel 9. Statistisk uavhengighet.

Anta at $q = a^2$ og at feilen i a er lik Δa . Feilen Δq i q kan bestemmes direkte fra ligning (4-18) til å være $\Delta q/q = 2(\Delta a/a)$. Det er også tilsynelatende mulig å bestemme Δq ved

å sette $a = b$ i ligningene (4-16) og (4-18) som gir at $\Delta q/q = \sqrt{2} \cdot (\Delta a/a)$. Grunnen til denne lille uoverensstemmelsen er at det under utledningen av ligning (4-18) via Gauss' feilforplantningslov er forutsatt at størrelsene a og b er statistisk uavhengige. Hvis du setter $a = b$ i ligning (4-18) bryter du denne forutsetningen.

Eksempel 10. Bruk av hjelpestørrelser.

Av og til, når vi skal studere feilforplantningen i store og vanskelige uttrykk, kan det lønne seg å bruke hjelpestørrelser som kan forenkle beregningene betydelig. Her skal vi illustrere bruk av hjelpestørrelser ved å regne ut feilforplantningen i den korrigerte verdien for gravitasjonskonstanten, som dere kommer til å bli bedre kjent med i kapittel 7 når dere skal finne gravitasjonskonstanten eksperimentelt. Her bruker vi kun uttrykket som et eksempel der det er nyttig å bruke hjelpestørrelser, og du trenger ingen kjennskap til størrelsene som inngår, utover at det er størrelser som blir målt med målverdi og måleusikkerhet. Den korrigerte verdien for gravitasjonskonstanten er oppgitt i ligning (7-19), som med ligningene (7-14) og (7-17) innsatt, blir

$$G_{\text{kor}} = \pi^2 \frac{Sb^2r}{T^2LM(1 - b^3/(b^2 + 4r^2)^{3/2})}. \quad (4-21)$$

Vi ser at dette uttrykket inneholder både addisjon og subtraksjon noe som umuliggjør bruk av ligning (4-18) til å regne ut feilforplantningen, og vi er derfor i utgangspunktet nødt til å bruke det generelle uttrykket i ligning (4-15), noe som er en formidabel oppgave. Hvis vi nå innfører hjelpestørrelsen³

$$k = \frac{b^2r}{1 - b^3/(b^2 + 4r^2)^{3/2}}, \quad (4-22)$$

ser vi at vi kan skrive ligning (4-21) som

$$G_{\text{kor}} = \pi^2 \frac{Sk}{T^2LM}, \quad (4-23)$$

og vi kan nå bruke ligning (4-18) direkte til å finne

$$\left(\frac{\Delta G_{\text{kor}}}{G_{\text{kor}}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2. \quad (4-24)$$

Det gjenstår fortsatt å finne et uttrykk for $\Delta k/k$ gitt ved b , r , Δb og Δr , men vi har altså forenklet beregningen fra å bruke ligning (4-15) med ligning (4-21) med seks variabler til å bruke ligning (4-15) med ligning (4-22) med bare to variabler.

4.5 Statistiske feilberegninger

Som nevnt i kapittel 4.3.1 kan man bruke statistiske metoder til å bestemme målefeilen i en måling av en fysisk størrelse. Det må her understrekes at statistikk er særlig formålstjenlig når det kommer til målinger som er preget av tilfeldige feil. Bruk av statistiske metoder vil på

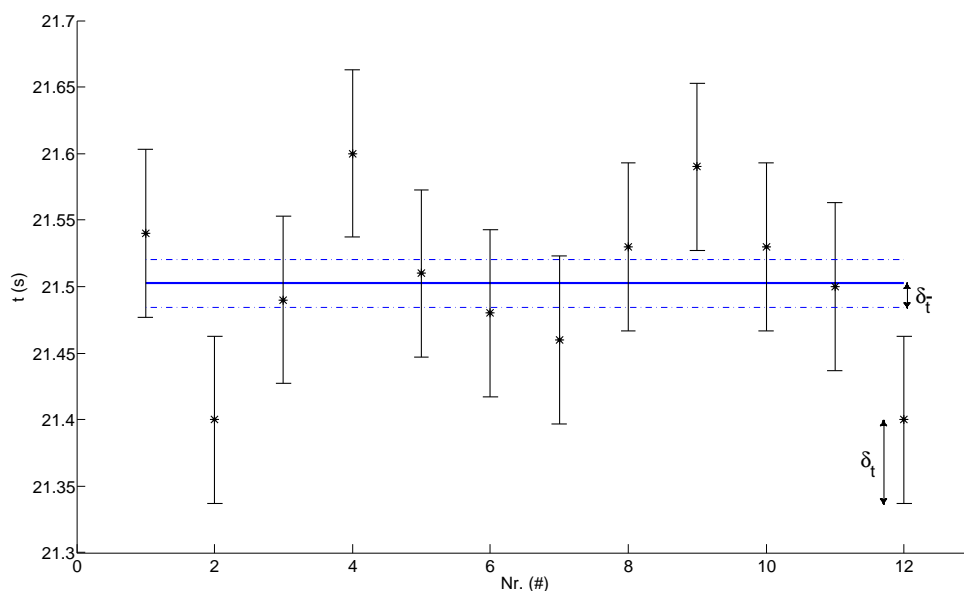
³Her er det lurt å velge hjelpestørrelser slik at hjelpestørrelsen og de gjenværende størrelsene er uavhengige. Her kunne vi for eksempel valgt $k = 1/(1 - b^3/(b^2 + 4r^2)^{3/2})$ som fortsatt ville gitt et uttrykk for G_{kor} kun bestående av multiplikasjon og divisjon, men siden nå b og r ville inngått både i og utenfor hjelpestørrelsen må en ta hensyn til dette og bruke produktregelen ved derivasjon, og en kunne ikke tatt i bruk ligning (4-18) etterpå.

ingen måte ta høyde for systematiske feil i modell eller apparatur. Nå vil vi introdusere noen statistiske størrelser og begreper som er nødvendige for å kunne benytte seg av statistikk i forbindelse med feilanalyse av eksperimentelle data.

Dersom en har tid og mulighet til det, vil det i de fleste tilfeller være hensiktsmessig å ta flere målinger av den samme størrelsen for å få en mest mulig presis måleverdi. Dette kan begrunnes ved at en gjennom å ta flere målinger etterhvert vil utligne den tilfeldige feilen, dersom en antar *gjennomsnittet* av alle målingene som måltall. Gjennomsnittet for en måleserie med N enkeltmålinger x_i , er gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4-25)$$

For å illustrere dette, vises det i figur 4.4 et eksempel på en måleserie med 12 målinger av en fysisk størrelse. I prinsippet kunne vi antatt en hvilken som helst av disse 12 målingene som måltallet for den aktuelle fysiske størrelsen, men vi ser at gjennomsnittsverdien er sentralt plassert i måleserien, og kan antas å ligge nærmere den «korrekte» verdien enn en tilfeldig valgt enkeltmåling.



Figur 4.4: Måleserie med 12 målinger av 10 periodiske svingninger for en pendel. De ulike målingene er angitt som *, mens den tilhørende gjennomsnittsverdien er angitt som den tykke blå linjen. Standardavvik δ_t er angitt som feilskranker med utgangspunkt i hver enkelt måling, mens standardfeilen $\delta_{\bar{t}}$ er angitt som stiplet blå linje på hver side av gjennomsnittsverdien.

Videre er det også hensiktsmessig å bruke statistikk til å beregne tallverdier for feilen i

målingen. Dersom vi antar en enkeltmåling som måltall for den aktuelle fysiske størrelsen er *standardavvik* et godt mål for feilen. Standardavvik er gitt ved

$$\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2\right)}, \quad (4-26)$$

og er en statistisk størrelse som måler spredningen i en dataserie⁴. Denne størrelsen passer derfor godt som et mål på feilen i en måling som er preget av tilfeldige feil, fordi tilfeldig feil synliggjøres ved tilfeldig spredning av gjentatte målinger, slik som vist i figur 4.2.

Likevel, tidligere har vi argumentert for å bruke middelverdien som måltall for den fysiske størrelsen som er blitt målt i måleserien, og da antas *standardfeil*, som er standardavviket til en middelverdi, å være et godt mål for målefeilen,

$$\delta_{\bar{x}} = \left(\frac{\delta_x}{\sqrt{N}}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2\right)}. \quad (4-27)$$

Av lign. (4-27) ser vi at standardfeilen er en størrelse som både tar hensyn til spredningen i måleserien, og til at en middelverdi blir mer presis dersom antall målinger øker, da standardfeilen kan finnes ved å dele standardavviket på \sqrt{N} . I figur 4.4 er både standardavvik og standardfeilen angitt. Her er det tydelig at middelverdien kan sies å være mer presis enn en hvilken som helst av enkeltmålingene, da feilen i middelverdien (gitt ved standardfeilen) er mindre enn feilen i enkeltmålingene (gitt ved standardavviket). Dersom vi fra måleserien i figur 4.4 nå antar gjennomsnittet som måltall for den fysiske størrelsen (svingetiden), ser vi at vi kan oppgi måleresultatet som $t = (21,503 \pm 0,018)$ s, der $t_0 = 21,503$ s er gjennomsnittet til måleserien, og $\Delta t = 0,018$ s er standardfeilen til måleserien.

Litteratur:

Utfyllende litteratur finnes i G. L. Squires «Practical Physics» [1].

⁴Av lign. (4-26) ser vi at standardavvik er kvadratroten av en sum, der leddene i summen er kvadratet til avviket et datapunkt har fra middelverdien i måleserien. I en dataserie med stor spredning ser vi at standardavviket blir stort fordi en her vil ha flere store ledd i summen. Legg merke til at det som står under rottegnet i seg selv ligner på en middelverdi av størrelsen $(x_i - \bar{x})^2$, der en har delt med $N-1$ istedet for N . Dette har sammenheng med at middelverdien som inngår i (4-26) er beregnet fra samme måleserie som standardavviket, og da vil en få et riktigere (forventningsrett) mål på spredningen ved å dele med $N-1$ istedet for N . Dette vil dere lære mer om i statistikk-kurset.

Kapittel 5

BESTEMMELSE AV TYNGDENS AKSELERASJON

Mål: I denne oppgaven skal du finne en verdi for tyngdens akselerasjon g med usikkerhet. Måleprinsippet er basert på at en pendel under bestemte vilkår vil svinge med en periode som kun er avhengig av dimensjonene til pendelen og av tyngdens akselerasjon.¹ Om vi kjenner den matematiske modellen for en slik svingebevegelsen, kan vi måle pendeldimensjonene og svingetiden og ut fra dette beregne et estimat for g . Hovedhensikten med denne laboratorieoppgaven er å få erfaring med dataanalyse og usikkerhetsberegninger, og derfor skal vi gjøre en rekke målinger av svingetiden for å bruke statistiske metoder til å analysere disse.

Bestemmelsen av tyngdens akselerasjon er en laboratorieoppgave som strekker seg over to laboratorieøkter. I den første laboratorieøkten introduseres du for måleusikkerhet og usikkerhetsberegning samtidig som du gjennomfører de faktiske målingene av svingetiden til pendelen. I den påfølgende laboratorieøkten skal du analysere mer i detalj de måledata du tok opp på den første laboratorieøkten. Her får du en introduksjon i bruk av Matlab, som du så vil benytte for å effektivt beregne middelvei, standardavvik og standardfeil for store måleserier. Gjennom laboratorieoppgaven vil du lære hvordan usikkerheten i en størrelse (her svingetiden) vil påvirke usikkerheten i en annen, sammensatt størrelse (her tyngdens akselerasjon), og du vil etter hvert kunne beregne en forholdsvis nøyaktig verdi for g med måleusikkerhet.

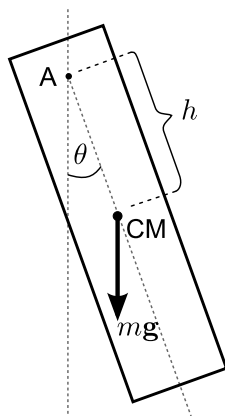
5.1 Teori og bakgrunnsstoff

Figur 5.1 viser en fysisk pendel² med masse m som svinger om en rotasjonsakse A. Avstanden fra opphengningspunktet A til massemidelpunktet (CM) er h . Vi skal nå vise hvordan svingetiden til denne pendelen avhenger av tyngdens akselerasjon g , og for å gjøre dette må vi sette opp bevegelsesligningen for pendelen. Trolig har du hittil bare behandlet bevegelses-

¹ En mer moderne metode for bestemmelse av g er at en måler posisjonen til et fallende legeme med (optiske) interferometriske metoder og tiden med atomklokke.

²En pendel kalles en *fysisk* pendel dersom vi vil presisere at vi ikke snakker om en *matematisk* pendel, som er en pendel der all masse er samlet i ett punkt.

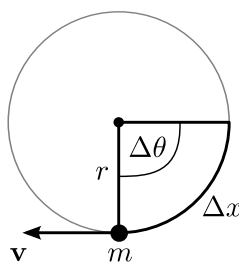
ligninger for lineær bevegelse, så først må vi definere noen begreper tilknyttet rotasjonsbevegelse. (En fullstendig forståelse av rotasjonsmekanikk er imidlertid ingen forutsetning for å forstå måleprinsippene og usikkerhetsanalysen som utgjør resten av kapitlet.)



Figur 5.1: Fysisk pendel. A er opphengningspunktet og CM er massemidelpunktet.

5.1.1 Kort introduksjon til rotasjonsmekanikk

Den enkleste måten å introdusere rotasjonsmekanikk er å bruke analogier til lineær mekanikk. For hver størrelse som beskriver lineær bevegelse finnes det en tilsvarende størrelse for å beskrive rotasjonsbevegelse. Vi skal forklare disse analogiene ved å se på den aller enkleste rotasjonsbevegelsen: En punktmasse m som beveger seg langs en sirkel med radius r .



Figur 5.2: Rotasjonsbevegelse.

Slik som posisjonen til en punktmasse i lineær bevegelse beskrives for eksempel ved en koordinat $x(t)$ vil vi beskrive rotasjonsbevegelsen med en vinkel $\theta(t)$. Dersom denne vinkelen i løpet av en tid Δt har endret seg med $\Delta\theta$ så har partikkelen tilbakelagt en buelengde $\Delta x = r\Delta\theta$ langs sirkelen. Lar vi $\Delta t \rightarrow 0$ får vi (tangential)hastigheten

$$v = \frac{dx}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \equiv r\omega, \quad (5-1)$$

der vi har definert *vinkelhastigheten* ω som den tidsderiverte til vinkelen. Vi sier at størrelsen ω er analog til størrelsen v . Tilsvarende er akselerasjonen langs sirkelbanen gitt ved

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = r \frac{d^2\theta}{dt^2} \equiv r\alpha, \quad (5-2)$$

der *vinkelakselerasjonen* α er den dobbeltderiverte av vinkelen med hensyn på tid.

Vi antar nå at punktmassen blir utsatt for en kraft F tangentielt på sirkelen. Bevegelsesligningen for punktmassen er da gitt ved Newtons 2. lov, $F = ma$. For å bruke størrelsene som er naturlige for rotasjonsbevegelser utnytter vi formel (5-2) og får

$$F = mr\alpha. \quad (5-3)$$

Dersom vi multipliserer med radien på begge sider blir dette

$$Fr = mr^2 \cdot \alpha. \quad (5-4)$$

Vi innfører så to nye størrelser $\tau = Fr$ og $I = mr^2$, og får en omskrevet Newtons 2. lov på formen

$$\tau = I\alpha. \quad (5-5)$$

Størrelsen τ kalles *dreiemomentet* og er rotasjonsanalogien til kraften F , mens I kalles *tregghetsmomentet* og er rotasjonsanalogien til massen m . Siden vinkelakselerasjonen α er analog til akselerasjonen a ser vi at Newtons 2. lov i ligning (5-5) er på samme form som den ”linære” utgaven $F = ma$, men med hver størrelse byttet ut med den analoge størrelsen for rotasjonsmekanikk.

Ligning (5-5) kalles ofte *spinnsatsen* og gjelder helt generelt for rotasjonsbevegelser. Da må vi imidlertid innføre følgende generelle definisjoner av dreiemomentet og tregghetsmomentet: Dersom vinkelen φ mellom radiusvektoren \mathbf{r} og kraften \mathbf{F} ikke er 90° , er dreiemomentet gitt ved

$$\tau = Fr \sin \varphi. \quad (5-6)$$

Dersom vi har flere punktmasser m_i med avstander r_i til rotasjonsaksen, er tregghetsmomentet gitt ved

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (5-7)$$

5.1.2 Bevegelsesligning og svingetid for en fysisk pendel

Vi skal nå anvende spinnsatsen (5-5) på bevegelsen til den fysiske pendelen. Dreiemomentet som virker på pendelen kommer av tyngdekraften $m\mathbf{g}$ som virker på massemiddepunktet CM, se figur 5.1. Vektoren fra rotasjonsaksen A til angrepspunktet til kraften har nå lengde h , og vinkelen mellom denne vektoren og kraften er θ , altså den samme vinkelen som beskriver posisjonen til pendelen i forhold til loddlinjen. Legg merke til at dreiemomentet alltid vil ha motsatt retning av vinkelutslaget, og bevegelsesligningen for pendelen blir derfor

$$-mgh \sin \theta = I_A \alpha, \quad (5-8)$$

der I_A er tregghetsmomentet med hensyn til rotasjonsaksen A. For å kunne løse ligningen gjør vi nå antagelsen at utslagsvinkelen θ er liten, slik at vi kan skrive

$$\sin \theta \approx \theta. \quad (5-9)$$

Dette gir bevegelsesligningen

$$mgh\theta = -I_A \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (5-10)$$

Løsningen av denne ligningen er

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \phi), \quad (5-11)$$

der θ_0 er maksimalutslaget til pendelen og ϕ kalles fasevinkelen. Begge disse størrelsene er integrasjonskonstanter fra løsningen av bevegelsesligningen som er en andre ordens differensialligningen. Sirkelfrekvensen ω_0 er her gitt ved

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I_A}}. \quad (5-12)$$

(Du kan overbevise deg selv om at dette er en løsning på bevegelsesligningen ved å dobbeltderivere ligning (5-11), sette inn for sirkelfrekvensen (5-12), og så sammenligne venstre og høyre side av ligning (5-10).)

Ifølge Steiners sats kan treghetsmomentet til et legeme om rotasjonsaksen A uttrykkes ved treghetsmomentet til legemet om massemiddelpunktet ved³

$$I_A = I_{CM} + mh^2. \quad (5-13)$$

Treghetsmomentet I_{CM} til en rektangulær stav med lengde l og bredde b om CM kan beregnes fra ligning (5-7) til å være (se lærebok for utledning)

$$I_{CM} = m \cdot \frac{l^2 + b^2}{12}. \quad (5-14)$$

Dermed kan vi uttrykke det totale treghetsmomentet til pendelen om A som

$$I_A = m(r^2 + h^2), \quad (5-15)$$

der vi har innført hjelpestørrelsen

$$r \equiv \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{12}}. \quad (5-16)$$

Denne størrelsen r kalles *treghetsradien* til pendelen, og benevnes også som den reduserte lengden til pendelen.⁴

Funksjonen $\theta(t)$ som beskriver pendelbevegelsen er en periodisk funksjon, og dette kan vi formulere matematisk som

$$\theta(t + T) = \theta(t) \quad \Rightarrow \quad \omega_0 \cdot T = 2\pi k, \quad (5-17)$$

der k generelt er et heltall. Vi definerer T som perioden til pendelbevegelsen, altså *svingetiden*, og setter derfor $k = 1$ i det som følger. Kombinert med ligningene (5-15) og (5-12) gir det følgende uttrykk for svingetiden:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^2 + h^2}{gh}}. \quad (5-18)$$

Uttrykket over viser at svingetiden T er en funksjon av h ; avstanden mellom opphengningspunktet A og massemiddelpunktet CM.

³Steiners sats på formen den har her er et generelt resultat som følger fra definisjonen (5-7).

⁴ Motivasjonen for å innføre en redusert lengde er at treghetsmomentet til ethvert legeme (I) kan skrives som produktet av massen til legemet (m) og kvadratet av en eller annen størrelse med dimensjon lengde. Vi velger å kalle denne lengdestørrelsen for den reduserte lengden r , og uttrykket er gitt fra definisjonen $I = mr^2$; ved å innføre r har vi dermed «redusert» uttrykket for et vilkårlig treghetsmomentet til formen for treghetsmomentet til en tilsvarende punktmasse. (Merk at i vårt tilfelle gjelder det treghetsmomentet I_{CM} om massesenteret til staven, ikke treghetsmomentet I_A om rotasjonsaksen.)

5.1.3 Beregning av tyngdens akselerasjon fra minimal svingetid

Dersom vi vil beregne verdien for tyngdens akselerasjon g for en gitt verdi av h der målt svingetid er T , så blir uttrykket for dette

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{r^2 + h^2}{h}. \quad (5-19)$$

Det viser seg at vi vil få en mer nøyaktig måling av tyngdeakselerasjonen dersom vi måler for den verdi av h som gir kortest svingetid. Dersom uttrykket (5-18) for svingetiden deriveres med hensyn på h , får en

$$\frac{dT}{dh} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r^2 + h^2}{gh} \right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{2h \cdot gh - (r^2 + h^2) \cdot g}{(gh)^2} \right). \quad (5-20)$$

Uttrykket i den siste parentesen blir null når $h = r$, så da har svingetiden et minimum. Når en setter $h = r$ tilbake i uttrykket for svingetiden, får en den minimale svingetiden til å bli

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2r}{g}}, \quad (5-21)$$

eller når en løser dette med hensyn på tyngdens akselerasjon,

$$g = \frac{8\pi^2 \cdot r}{T^2}. \quad (5-22)$$

Det er dette uttrykket vi skal bruke i vår bestemmelse av tyngdens akselerasjon. (I en oppgave i kapittel 5.2.2 får du anledning til å overbevise deg selv om at vi faktisk får minst usikkerhet i g når svingetiden er minimal, det vil si når vi kan bruke formelen ovenfor.)

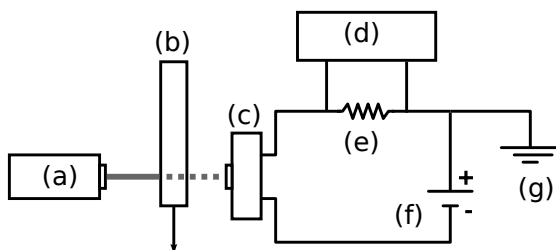
5.1.4 Tidsmålinger

Prinsippet for å måle svingetiden er som følger: Det rettes en lysstråle mot pendelen, og pendelbevegelsen vil periodisk skygge for en fotodetektor som er plassert på den andre siden, som vist i figur 5.3.⁵ Utgangsspenningen (signalet) fra fotodetektoren vil være null når pendelen skygger for detektoren og endelig ellers; et typisk tidsforløp er vist i figur 5.4.

I vårt tilfelle føres signalet til PC via et dataloggingsystem, og vi bruker et Matlab-skript til å behandle signalet og beregne svingetiden. Du kan enkelt kjøre dette skriptet fra kommandovinduet i Matlab, som beskrevet nedenfor i kapittel 5.2.⁶

⁵Det er ikke avgjørende for denne laboratorieøkten at du forstår hvordan fotodetektoren fungerer, men her er en kort forklaring av det elektriske kretsdiagrammet i figur 5.3: En konstant ytre spenning (her ca. 5 V) legges over en fotodiode og en elektrisk motstand koblet i serie. Fotodioden leder kun strøm dersom den blir truffet av fotoner fra lyskilden, og når det skjer, vil det gå en strøm gjennom kretsen. Det resulterende spenningsfallet over motstanden kan måles av et voltmeter koblet i parallell med motstanden. (I vårt tilfelle føres spenningen over motstanden ut til et dataloggingsystem.)

⁶For denne laboratorieøkten her er det ikke nødvendig å være kjent med Matlab fra før, men se eventuelt kapittel 6 for en innføring. Neste laboratorieøkt vil i sin helhet være viet til bruk av Matlab.



Figur 5.3: Skisse over apparatur for måling av pendelens svingetid (sett ovenfra til venstre og sett fra siden til høyre): a) Lyskilde, b) pendel, c) fotodetektor, og d) opphengningsanretning for pendel. Kretsdiagrammet omsluttet av stiplet linje illustrerer typisk elektrisk oppbygning av en fotodetektor: e) Fotodiode, f) spenningskilde, g) motstand, h) voltmeter (utgangsspenning/signal), og i) jord.

Et vesentlig poeng i forbindelse med tidsmålingen er at dataloggingsystemet vi bruker er begrenset oppad til en loggefrekvens på 50 000 Hz. Den tilsvarende begrensningen i oppløsningen til tidsmålingene vil være tydelig i målingen av de enkelte svingetidene, men vil være neglisjerbar dersom vi tar middelverdien av mange svingninger.

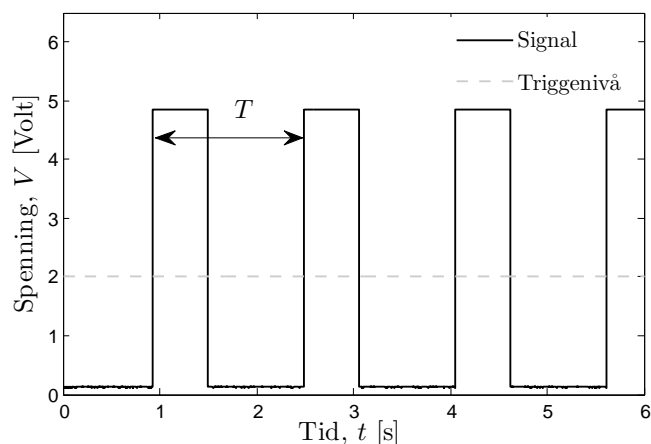
5.1.5 Bruk av mikrometerskrue i lengdemålinger

I vår fremgangsmåte vil verdien vi får for tyngdens akselerasjon avhenge ikke bare av svingetiden, men også av lengden på pendelen. Derfor må også lengden l måles med god presisjon, og til dette bruker vi en måleskinne med en mikrometerskrue, som vist i figur 5.5.

En mikrometerskruen brukes generelt til å måle små objekter (under 2-3 cm) med en nøyaktighet ned til hundredels mm ($10\ \mu\text{m}$), for eksempel tykkelsen på strenger. (I vår anvendelse av mikrometerskruen gjør vi ingen direkte måling av noen tykkelse, men heller en indirekte måling av en lengdeforskjell; mer om det senere.) Mikrometerskruen er et presisjonsinstrument som må behandles med forsiktighet. P.g.a. at gjengestigningen er meget liten blir det stor forsterkning i momentoverføringen fra justeringsskruen til den bevegelige referanseflata. Anvend derfor så lite dreiemoment som mulig når du skrur mikrometerskruen til anslag. Mikrometerskruer er utstyrt med en friksjonskobling som skal brukes for å oppnå lite og repeterbart tilsetningsmoment. Friksjonskoblingen sitter ytterst på skruen; bruk denne.

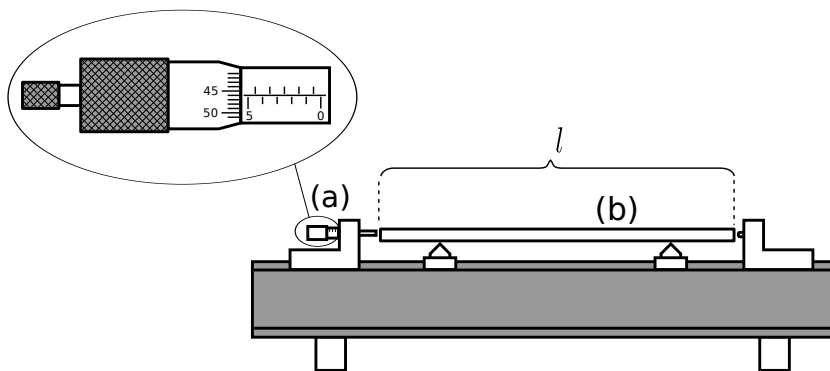
En omdreining på mikrometerskruen tilsvarer 0,50 mm, som er delt inn i 50 delestreker. For å gjøre en avlesning må du først lese av antall halve mm (det vil si antall hele omdreininger av skruen) fra skalaen på den delen av sylindere som sitter i ro. Deretter leser du av den overskytende antall hundredels mm (det vil si hvor stor del av den siste omdreiningen som er gjennomført) fra skalaen på den roterende delen av sylindere.

Alle målinger er en sammenligning med en standard, som for lengdemåling er meterstaven. Måleprinsippet her er at vi først måler avstanden mellom enden på en meterstav (når denne er plassert i måleskinne) og et vilkårlig referansepunkt gitt av hvor mikrometerskruen er festet på skinnen. Deretter måler vi på samme vis avstanden fra det samme referansepunktet til enden på pendelen. Dermed har vi funnet hvor mye lengden på pendelen avviker fra den



Figur 5.4: Tidsforløp til signal fra fotodetektoren. Hver gang signalet er økende og passerer et gitt triggenivå, starter en periodeteller. Når den samme hendelsen inntreffer igjen, vil periodetelleren stoppe. På denne måten måles svingetiden T .

kjente standardlengden. Den praktiske gjennomføringen er beskrevet mer i detalj i punktene nedenfor.

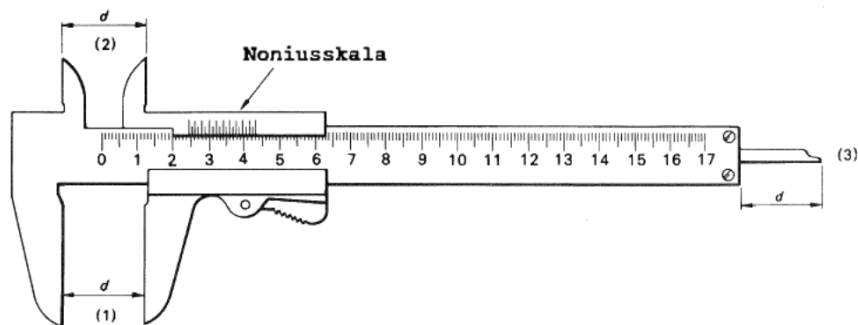


Figur 5.5: Skisse av skinne for lengdemåling: a) Mikrometerskrue, b) meterstav eller pendel. Selve mikrometerskruen vises i forstørret utgave oppe til venstre.

5.1.6 Bruk av skyvelære i lengdemålinger

Vi skal også måle bredden til pendelen, og skal da bruke en skyvelære med noniusskala. Nonius er en hjelpeskala til avlesning av brøkdeler av skalaenheter på en målestokk. For eksempel er det på skyvelæren en nonius for avlesning av tiendedels mm. Der er en lengde på 9 mm på noniusen delt inn i 10 deler som vist i figur 5.6. Når en avlesning skal foretas, finnes først det hele antall mm på den egentlige målestokken. Noniusen er plassert slik at dens nullpunkt faller i det observerte punktet, og man bestemmer den delstrek på noniusen som faller sammen med en delstrek på målestokken. Nummeret på denne streken på noniusen

gir det overskytende antall tiendedels mm. Vi skal bruke skyvelæren til å måle bredden på pendelen med god presisjon.



Figur 5.6: Skyvelære. Størrelsen kan måles ved en av de tre markerte « d » ved (1) for ytre mål, (2) for indre mål og (3) for eksempel dybder av hull. Nonius-skalaens virkemåte er forklart i teksten.

5.1.7 Nullpunkt på måleinstrument

Som en siste, generell oppfordring når det gjelder måleinstrumenter: Sjekk alltid nullpunktet på måleutstyr før du tar det i bruk. På samme vis som du bør sjekke at det står 0000 i avlesningsvinduet på vekten når veiepannen er tom, sjekk også at indikatorlinja på skyvelæren og mikrometerskruen står ved nullpunktet på skalaen når referanseflatene berører hverandre. Hvis du oppdager nullfeil bør du, før du tar utstyret i bruk, nullstille utstyret hvis det er mulig (vekt) eller hvis det ikke er mulig (mikrometerskrue, skyvelære) notere nullfeilen og korrigere måleresultatene tilsvarende.

5.2 Eksperimentell gjennomføring

Dette delkapittelet beskriver hvilke målinger og beregninger du skal gjennomføre i løpet av den første laboratorieøkten om tyngdens akselerasjon, det vil si laboratorieøkt nr. 2.

5.2.1 Måling av lengde og bredde

Først må vi finne dimensjonene til pendelen vår.

- Legg meterstaven i måleskinnen som vist på figur 5.4, og skyv staven mot en rektangulær forhøyning i den ene enden av skinna. I den andre enden av skinna er det en mikrometerskrue. Roter omdreiningskrue til det bevegelige sylinderhodet anslutter den andre enden av meterstaven. Les av verdien til posisjonen av mikrometerskruen, x_m , som forklart i kapittel 5.1.5.

- Bytt så ut meterstaven med pendelen (ta først av opphengningsanretningen til pendelen), og gjør samme operasjon for pendelen, x_p . Pendellengden er da $l = 1,000015 \text{ m} + (x_p - x_m)$.
- Begge studentene i teamet gjør dette, slik at dere får to lengdemålinger l_1 og l_2 , og lengden av pendelen settes til middelverdien

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2}. \quad (5-23)$$

For å estimere usikkerheten i denne målingen vil vi for nå bruke uttrykket

$$\Delta l = \frac{|l_1 - l_2|}{2}. \quad (5-24)$$

(Vi kommer tilbake med en begrunnelse av dette estimatet i kapittel 5.2.5).

- Mål bredden b til pendelen med en skyvelære; se delkapittel 5.1.6 om bruk av skyvelære og noniusskalaen. Estimer usikkerheten Δb fra oppløsningen på måleinstrumentet. (Baserst på måleskalaen på skyvelæren, hvilken oppløsning vil du estimere?) Dere bør måle bredden på flere ulike posisjoner langs pendelen for å forsikre dere om at b innenfor måleusikkerheten er konstant langs hele pendelen.
- Beregn treghetsradien r til pendelen fra ligning (5-16). Usikkerheten Δr kan du finne ved å estimere den relative usikkerheten i treghetsradien til å være lik den relative usikkerheten i lengden, $\Delta r/r \approx \Delta l/l$. (Vi vil begrunne denne antagelsen i kapittel 5.2.6.)

5.2.2 Svingetid som funksjon av h

Nå vil vi undersøke hvordan svingetiden til pendelen varierer med avstanden h mellom opphengningspunktet og masse-middelpunktet, før vi velger den h som gir minimal svingetid. Først setter du opp datamaskinen slik at du er klar for å måle pendelsvingningene.

- Åpne hjemmeområdet ditt (se kapittel 3.4.1 hvis du har glemt hvordan du gjør dette). Deretter må du kopiere filene som hører til denne laboratorieoppgaven fra hjemmesiden til laboratoriekurset til en katalog på hjemmeområdet ditt. Disse filene trenger du for å gjøre målingene i Matlab.
- Du kan deretter åpne Matlab. Endre «Current Folder» øverst i Matlab-vinduet til den aktuelle katalogen på hjemmeområdet ditt der filene er lagret.

Vi vil velge oss (minst) fem ulike verdier av h som vi skal bestemme svingetiden for, for eksempel jevnt fordelt i intervallet 20 cm til 40 cm. For hver verdi, gjør følgende:

- Still inn pendelen slik at h får den valgte verdien. Det er vanskelig å måle avstanden h nøyaktig, men et forslag til metode er som følger. Legg pendelen på de to klossene som er utlagt på arbeidsplassen. Legg målestaven oppå pendelen, sett den inntil opphengningspunktet og forskyv så opphengningspunktet slik at den hvite streken på pendelen (masse-middelpunktet) sammenfaller med ønsket posisjon på målestaven. Prøv også å estimere usikkerheten Δh .

- Sett pendelen i svingning med liten svingeamplitude og forsikre deg om at laserstrålen treffer dioden kun én gang per svingeperiode.
- Mål svingeperioden T ved å skrive kommandoen `pendel` i kommandovinduet i Matlab og trykke på enter. Dette kjører Matlab-skriptet ved samme navn. Prinsippet bak målingen er beskrevet i delkapittel 5.1.4. For å se dokumentasjon (syntaks) for pendelkommandoen, kan du skrive `help pendel` i kommandovinduet og trykke enter.
- Gjenta målingen minst tre ganger og beregn middelervidien til svingeperioden. Før inn middelervidien og alle målingene av T for alle verdiene av h i en tabell i laboratoriejournalen. Spør laboratorieveilederen dersom du er usikker på hva som er en rasjonell måte å føre opp tabellen.

Når vi har alle måleresultatene kan vi undersøke om det virker rimelig at svingetiden har et minimum for den h -verdien som teorien tilsier.

- Tegn en figur i laboratoriejournalen der du plotter inn middelervidiene dine for T i et koordinatsystem med h langs x -aksen og T langs y -aksen.
- Ser det ut fra målingene dine som om $T(h)$ har et globalt minimum i det h -intervallet du har valgt? Dersom du hadde tegnet en glatt kurve gjennom målepunktene i figuren din, hvor ser det ut som minimum for denne kurven ville være? Stemmer resultatet med prediksjonen $h = r$ med den beregnede verdien for tregheitsradien r ?

5.2.3 Målinger av minimal svingetid

Nå er vi klare til å gjøre hovedmålingene, og moralen er – som du vil forstå bedre senere – at jo flere målinger, jo bedre. Derfor vil vi automatisere datainnsamlingen noe, og fremgangsmåten blir som følger.⁷

- Sett avstanden fra opphengningspunktet til massesenterpunktet til den verdien av tregheitsradien du beregnet, og sett pendelen i svingning som før.
- Bruk kommando `multipendel` til å måle perioden til et på forhånd angitt antall svingninger. For dataanalysen i neste laboratorieøkt vil vi trenge 50 målinger for svingetiden.
- Svingetidene blir lagret elektronisk i filen `T.dat` i den katalogen du arbeider i på hjemmeområdet ditt. (Du trenger derfor ikke skrive opp tabellen i laboratoriejournalen din, men referer heller til elektronisk lagrede data.)
- For sikkerhets skyld kan du også sette i gang registrering av et ekstra datasett mens du går videre. Pass på å lagre det første datasettet under et annet navn på hjemmeområdet ditt før du starter `multipendel` slik at dette ikke blir overskrevet av det ekstra datasettet. Sjekk at filene faktisk inneholder fornuftige data før du avslutter.

⁷Vi kan nevne her at en annen fremgangsmåte som kan være like effektiv er å måle tiden Δt det tar å gjennomføre et stort antall N svingninger, for så å beregne perioden som $T = \Delta t/N$. Siden en del av formålet med øvelsen er statistisk analyse av måleserier så gjør vi ikke dette her.

Middelverdien av målingene av T for $h = r$, samt den resulterende verdien for tyngdens akselerasjon, skal vi beregne i Matlab neste laboratorieøkt. Likevel vil vi gjøre et estimat allerede nå for å se om målingene ser ut til å gi en rimelig verdi.

- Velg en typisk verdi av T fra datasettet, og finn et grovestimat for g ved å bruke ligning (5-22).

5.2.4 Usikkerhetsberegning

Beregninger av standardavvik og standardfeil for denne ganske lange dataserien skal vi gjøre i Matlab, så det kan vente til neste laboratorieøkt. Vi skal imidlertid forberede oss til usikkerhetsberegningen ved å anvende Gauss' feilforplantningslov på ligning (5-22) for å finne et uttrykk for relativ usikkerhet $\Delta g/g$. Dette uttrykket vil være en funksjon av argumentene i funksjonen $g(r, T)$, samt usikkerheten til disse størrelsene.

- Se først om du kan bruke en forenklet formel fra kapittel 4.4 for funksjoner som har samme form som ligning (5-22) til å finne relativ usikkerhet.
- Bruk deretter den generelle formen for Gauss' feilforplantningslov (4-15) der du partiellderiverer $g(r, T)$. Utnytt gjerne tipsene i kapittel 4.4.2 for å finne et uttrykk for relativ usikkerhet, og spør laboratorieveilederen om hjelp dersom du er usikker. Du bør nå ende opp med samme uttrykk som i punktet over.
- Basert på uttrykket du fant, har du verdier for alle variablene som inngår, eller er det noen som mangler? Kan du si noe om hvilken størrelse det er viktigst at vi måler nøyaktig?
- Dersom du ønsker et estimat for måleusikkerheten før neste laboratorieøkt, kan du gjøre som følger: Gjør et anslag for usikkerheten ΔT i den måleverdien for svingetiden du valgte i forrige delkapittel basert på hvor stor variasjon det er mellom T -verdiene i måleserien. Bruk deretter uttrykket du fant ovenfor til å beregne Δg . Hovedårsaken til eventuell unøyaktighet i denne verdien vil trolig være at vi bare har et grovestimat for ΔT , men i neste laboratorieøkt skal vi beregne et bedre estimat fra standardavviket til måleserien.

5.2.5 Tillegg 1: Usikkerhetsberegning for Δl

Vi skal nå diskutere mer i detalj estimatet for Δl gitt i ligning (5-24) ved å betrakte målingen av l på to forskjellige måter. Først skal vi se på målingene av l_1, l_2 som en måleserie med to elementer, der middelverdien er gitt ved $(l_1 + l_2)/2 = \bar{l} \equiv l$. Standardavviket til måleserien kan i henhold til ligning (4-26) regnes ut ved

$$\delta_{l_i} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \left[(l_1 - l)^2 + (l_2 - l)^2 \right]}. \quad (5-25)$$

Setter vi inn for l (og $N = 2$) gir dette

$$\delta_{l_i} = \sqrt{\left(l_1 - \frac{l_1 + l_2}{2}\right)^2 + \left(l_2 - \frac{l_1 + l_2}{2}\right)^2}, \quad (5-26)$$

og vi får at standardavviket er lik

$$\delta_{l_i} = \frac{1}{2} \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + (l_2 - l_1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |l_1 - l_2|. \quad (5-27)$$

Om vi sier at usikkerheten til l kan estimeres som standardfeilen til måleserien, $\Delta l \approx \delta_{l_i} / \sqrt{N}$ (mer om standardavvik og standardfeil kommer i neste laboratorieøkt), så får vi usikkerheten

$$\Delta l = \frac{1}{2} |l_1 - l_2|. \quad (5-28)$$

Vi ender altså opp med uttrykket vi oppga i kapittel 5.2.1.

Den andre måten er å betrakte middelveiden l som en funksjon av de to enkeltmålingene, for så å bruke Gauss' feilforplantingslov til å finne usikkerheten Δl . Lengden er da gitt ved funksjonen

$$l = l(l_1, l_2) = \frac{1}{2} l_1 + \frac{1}{2} l_2. \quad (5-29)$$

Om vi anvender den generelle formen for Gauss' feilforplantingslov på denne funksjonen, det vil si partiellderiverer den med hensyn til variablene l_1 og l_2 , så får vi

$$\Delta l = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \Delta l_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta l_2\right)^2}. \quad (5-30)$$

Dersom vi antar at usikkerheten i de to målingene er like, $\Delta l_1 = \Delta l_2 \equiv \Delta l_i$, så forenkles dette til

$$\Delta l = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta l_i + \Delta l_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta l_i. \quad (5-31)$$

Dette reduseres igjen til resultatet $\Delta l = \frac{1}{2} |l_1 - l_2|$ dersom vi setter inn standardavviket (5-27) som et estimat for usikkerheten Δl_i .⁸

Du bør nå være overbevist om at $\Delta l = |l_1 - l_2|/2$ er et rimelig estimat. Imidlertid kunne det også virke naturlig å bruke $\Delta l = |l_1 - l_2|$ som et enda enklere estimat på usikkerheten. Dersom du bare er interessert i et grovestimat kan dette ofte være greit, siden det som regel er bedre å overestimere usikkerheten litt enn å gi inntrykk av at presisjonen er bedre enn den faktisk er.

Et alternativ til å estimere usikkerheten Δl_i (i stedet for standardavviket δ_{l_i}) er å basere seg på oppløsningen til måleinstrumentet. Her kan vi bruke den oppgitte relasjonen for en enkeltmåling av lengden,

$$l_i = l_m + x_p - x_m, \quad (5-32)$$

der vi har innført l_m som en konstant lik den oppgitte lengden til referansestaven, det vil si vi vil nå anta neglisjerbar usikkerhet for denne. For dette tilfellet gir Gauss' feilforplantingslov

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x_p)^2 + (\Delta x_m)^2}. \quad (5-33)$$

⁸At de to fremgangsmåtene her gir samme resultat er ikke så overraskende når vi innser at standardfeilen ikke er annet en usikkerheten til en middelveid, og denne usikkerheten kan du finne ved å benytte Gauss' feilforplantingslov på uttrykket for middelveiden.

Usikkerheten Δx heftet ved bruk av mikrometerskruen setter vi lik oppløsningen til skalaen på instrumentet, og siden denne er lik for x_p og x_m så får vi estimatet $\Delta l = \sqrt{2}\Delta x$.

Sett så inn verdi for Δx og sammenlign med verdien du fikk ved å bruke $\Delta l = |l_1 - l_2|/2$. Hvilket av uttrykkene vil du si gir det mest riktige inntrykket av usikkerheten til l i dette tilfellet? Noe forenklet så bør svaret være: Det uttrykket som gir størst verdi for usikkerheten. Årsaken er at det er fort gjort at du slumper til å få $|l_1 - l_2| \approx 0$ selv om tilfeldige feil egentlig er større; en måleserie med bare to målinger er tross alt et ganske tynt grunnlag for å estimere usikkerhet. Generelt bør en ta flere målinger (her av l_i) for å estimere usikkerhet ved standardavvik, men selv om gjentatte målinger alle skulle gi samme resultat så trenger ikke det bety at usikkerheten er null; dersom de tilfeldige variasjonene er mindre enn oppløsningen til måleinstrumentet kan vi ganske enkelt ikke bruke standardavviket til å estimere usikkerheten på en fornuftig måte. Er dette tilfelle, så vil det være oppløsningen til måleinstrumentet som avgjør usikkerheten i målingen.⁹

5.2.6 Tillegg 2: Usikkerhetsberegning for Δr

I begynnelsen av kapittel 5.2 ba vi deg akseptere at $\Delta r/r \approx \Delta l/l$ var en god approksimasjon. Vi skal nå gå gjennom begrunnelsen for denne påstanden.

Ved å anvende den generelle formen for Gauss' feilforplantingslov på uttrykket (5-16) for treghetsradien, finner vi

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2l}{l^2 + b^2} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{2b}{l^2 + b^2} \Delta b\right)^2} = \frac{\sqrt{(l\Delta l)^2 + (b\Delta b)^2}}{l^2 + b^2}. \quad (5-34)$$

(Hint: Bruk kjerneregelen for derivasjon, og innfør eventuelt også en hjelpestørrelse $k = (l^2 + b^2)/12$ og benytt deg av ligning (4-2).)

Siden b/l er i størrelsesorden $3 \cdot 10^{-2}$ kan vi trygt neglisjere det andre leddet i nevneren $l^2 + b^2 = l^2[1 + (b/l)^2]$. For å se om vi kan gjøre tilsvarende forenkling i telleren, skriver vi om uttrykket til

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{1}{l^2} \sqrt{(l\Delta l)^2 + (b\Delta b)^2} = \frac{\Delta l}{l} \sqrt{1 + \left(\frac{b\Delta b}{l\Delta l}\right)^2}. \quad (5-35)$$

Om vi antar $\Delta l \approx 5 \cdot 10^{-5}$ m og $\Delta b \approx 10^{-4}$ m, så får vi $(b\Delta b)/(l\Delta l) \approx 10^{-1}$, og det er derfor også trygt å neglisjere det andre leddet i radikanden.¹⁰ Da står vi igjen med resultatet

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{\Delta l}{l}. \quad (5-36)$$

⁹I praksis vil vi som oftest bruke skjønn når vi estimerer slike måleusikkerheter, og det læres etter hvert som du får mer erfaring med laboratoriearbeid. Noen ganger inkluderer vi til og med omtrentlige bidrag fra kjente *systematiske feil* i estimatet av den tilfeldige feilen. Dette illustrerer bare at skillet mellom tilfeldige og systematiske feil ikke alltid er like klart.

¹⁰Her kan du innvende at vi like gjerne kunne gjort antagelsen $l^2 + b^2 \approx l^2$ allerede i ligning (5-16) for treghetsradien r , og dermed kommet frem til svaret på enklere vis. Selv om dette er en rimelig antagelse, og dessuten viser seg å være aldeles korrekt i dette tilfellet, kan vi ikke generelt vite *a priori* at vi kan forenkle usikkerhetsberegningen på slik en måte. For eksempel var det ikke gitt at $(b\Delta b)^2/(l\Delta l)^2 \ll 1$ selv om vi hadde at $(b/l)^2 \ll 1$.

5.3 Dataanalyse med Matlab

Dette delkapittelet beskriver hvilke oppgaver du skal gjennomføre i Matlab i laboratorieøkt nr. 3, det vil si den andre laboratorieøkten for pendeleksperimentet. Siden vi ikke forutsetter forhåndskunnskaper i Matlab eller programmering av noe slag vil vi gå ganske forsiktig frem og beskrive steg for steg i dataanalysen. Vi henviser også til kapittel 6 for en introduksjon til Matlab. (Dersom du ikke har noe som helst erfaring med Matlab eller lignende verktøy og systemer, anbefaler vi at du går gjennom i alle fall deler av denne introduksjonen før eller parallelt med oppgavene nedenfor. Dersom du derimot føler du har en del tidligere erfaring oppfordres du til å se om du finner mer effektive løsninger enn dem vi foreslår nedenfor.)

For alle oppgavene her anbefaler vi at du samler ditt løsningsforslag (Matlab-koden) i en m-fil slik at du enkelt kan finne igjen og redigere kommandoene senere. Det er anbefalt at du forsøker å kjøre koden etter hvert som du arbeider deg gjennom punktene nedenfor slik at du til enhver tid forsikrer deg om at koden virker og forstår hva den gjør. Du trenger ikke journalføre alt du gjør denne laboratorieøkten, men ta med såpass mye at du får komplettert journalen du begynte på forrige laboratorieøkt. Svar også på de konkrete spørsmålene som stilles nedenfor.

5.3.1 Tyngdens akselerasjon med usikkerhet

Nå skal vi gå over til en mer presis bestemmelse av tyngdeakselerasjonen g og usikkerheten i denne, og da må vi først finne igjen de data vi lagret for minimal svingetid på forrige laboratorieøkt.

- Opprett først en m-fil på hjemmeområdet ditt som beskrevet i kapittel 6.3, og sørg for at m-filen og datafilen befinner seg i samme mappe på hjemmeområdet ditt.
- Last inn datafilen ved for eksempel å bruke kommandoen `data = load('T.dat')`.
- Plott alle målepunktene for eksempel med kommandoen `plot(data, '+')`. (Merk at vi ikke ønsker noen linje mellom målepunktene, så vi spesifiserer derfor bare markørtype i det andre argumentet. Argument for x -verdier er utelatt, og x -verdiene blir dermed de positive heltallene.)
- Marker aksene ved å bruke kommandoene `xlabel` og `ylabel`, husk å angi enhet for y -aksen.¹¹

Deretter bruker vi Matlab-scriptet til å gjøre beregninger på datasettet, med mål om å finne en verdi for g med en estimert måleusikkerhet Δg . For å beregne middelerdi og standardavvik kunne vi ganske enkelt brukt henholdsvis `mean` og `std`, men for å få bedre forståelse både av de statistiske begrepene og bruken av Matlab skal vi først gjøre beregningene ved å

¹¹Trolig vil du se at standardinnstillingene til Matlab ikke gir så finoppløselig y -akse som vi kunne ønske. For å bøte på dette kan vi sette inn kommandoen `axis1 = axes()`; før plottekommandoen, for så å sette inn den noe mer kryptiske kommandoen `set(axis1, 'yticklabel', num2str(get(axis1, 'YTick'))', '%.5f\n'))` etter plottekommandoen.

summere vektorer med funksjonen `sum` i stedet. Eventuelt kan du også bruke løkker, som forklart i kapittel 6.3.2. Sjekk deretter at de innebygde kommandoene gir det samme resultatet som koden din.

- Beregn først middelverdien \bar{T} til måleserien T_i for svingetiden, og lagre resultatet i en variabel `Tm` (for eksempel).
- Opprett variabler for verdiene til l , b . Beregn treghetsradien ved hjelp av disse variablene, og lagre resultatet i variabelen `r`.
- Beregn så et mer nøyaktig estimat på tyngdens akselerasjon der du bruker svingetiden `Tm` og treghetsradien `r`.
- Vi begynner nå med usikkerhetsberegningen: Opprett en variabel der du lagrer verdien du estimerte for Δl . Beregn Δr og lagre denne i en ny variabel.
- Beregn standardavviket δ_T til T_i ved hjelp av ligning (4-26). (Hint: Lag først en vektor der elementene er de enkelte leddene i summen i ligning (4-26).)
- Beregn til slutt standardfeilen $\delta_{\bar{T}}$ til T_i .
- Bruk formelen du fant fra Gauss' feilforplantningslov i forrige laboratorieøkt til å beregne relativ usikkerhet $\Delta g/g$ til verdien for g du fant ovenfor. Vil du bruke standardavviket eller standardfeilen til å estimere usikkerheten ΔT som inngår her? Forklar valget ditt.
- Finn verdien for absolutt usikkerhet Δg , og skriv opp sluttresultatet ditt for tyngdens akselerasjon på formen $g \pm \Delta g$ i laboratoriejournalen. (Pass på at du tar med et rimelig antall siffer i måltallet og usikkerheten, jf. delkapittel 4.2, eventuelt sjekk med laboratorieveileder.)
- I 1971 målte Statens kartverk tyngdens akselerasjon i kjelleren på Gamle Fysikk til å være $g = (9,8214675 \pm 0,0000004) \text{ m/s}^2$. Sammenlign resultatet ditt med denne verdien. Ligger verdien inne i feilintervallet ditt? Tyder sammenligningen på at resultatet ditt er beheftet med systematiske feil? Hvilke mulige kilder til systematiske feil kan du tenke deg i dette forsøket?

Før vi går videre vil vi bare avsløre at det er mange mulige kilder til systematiske feil i dette forsøket, og noen av disse har trolig hatt en betydelig innvirkning på resultatet du fikk. Derimot er usikkerheten du beregnet trolig ganske liten, men denne tar bare høyde for kjente tilfeldige feil, så reell usikkerhet i forsøket vil nok være noe større. De mest betydelige systematiske feilene kunne vi i prinsippet kompensert for, men en mer grundig behandling ville kreve en del ny matematikk og fysikk, så derfor går derfor ikke inn på dette nå. Vi ber deg derfor høre med veileder om du lurer på om det er feilkilder du kan ha glemte, eller er interessert i forslag på hvordan du kunne tatt hensyn til disse.

5.3.2 Svingetid som funksjon av h

For å få mer øvelse i plotting, skal vi nå plote resultatene fra forrige laboratorieøkt for svingetid for varierende avstand mellom massesenter og opphengningspunkt. Deretter plotter vi en teoretisk kurve, for å se om måleresultatene er som forventet.

- Opprett en ny m-fil på hjemmeområdet ditt. Lim inn kodelinjer fra forrige m-fil slik at du har variabler der verdiene for r og g er definert. (Alternativt kan du fortsette i samme m-fil som før dersom du klarer å gjøre det på en ryddig måte, eller du kan for eksempel skrive om den første m-filen til en funksjon som returnerer verdien for g .)
- Opprett to vektorer **T** og **h** der du lagrer målte verdier for henholdsvis gjennomsnittlig svingetid og avstanden mellom massesenter og opphengningspunkt.
- Plott vektorene **T** og **h** mot hverandre (T som en funksjon av h) som beskrevet i kapittel 6.2.4. Prøv å unngå heltrukne linjer mellom datapunktene.
- Gi aksene navn, og husk å angi enhet.
- Opprett så en ny vektor **hteori** med ca. 100 elementer som har verdier jevnt fordelt i et passende intervall som inkluderer de målte h -verdiene du lagret i **h**.
- Opprett en vektor **Tteori** der du beregner teoretisk svingetid ved å sette **hteori**, **r** og **g** inn i formel (5-18). NB: Husk på at **hteori** er en vektor.
- Plott til slutt vektorene **hteori** og **Tteori** mot hverandre i samme figur som du plottet de målte verdiene.
- Vis figuren til veileder og vurder om formel (5-18) gir en god beskrivelse av virkeligheten.

Vi skal nå forsøke å forklare hvorfor vi valgte å måle den minimale svingetiden for å få en mest mulig presis verdi for tyngdens akselerasjon.

- Anvend Gauss' feilforplantningslov på ligning (5-19) til å finne et uttrykk for relativ usikkerhet $\Delta g/g$ som tar hensyn til usikkerheten i både T , r og h .¹²
- Overbevis deg selv om at uttrykket reduseres til det du fant i forrige laboratorieøkt når du setter $h = r$.
- Basert på dette uttrykket, kan du forklare hvorfor det reduserer usikkerheten til måleprosedyren at vi velger å måle den *minimale* svingetiden.¹³

¹²Hint: Du kan velge å innføre hjelpestørrelsen $k = (h^2 + r^2)/h$ dersom du synes det forenkler utregningene. Du skal til slutt ende opp med et uttrykk som

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{4 \left(\frac{\Delta T}{T} \right)^2 + 4 \left(\frac{r^2}{h^2 + r^2} \frac{\Delta r}{r} \right)^2 + \left(\frac{h^2 - r^2}{h^2 + r^2} \frac{\Delta h}{h} \right)^2}. \quad (5-37)$$

¹³Se også figur 4.1.

- Kan du gi et annet argument for at det er den minimale svingetiden vi bør måle, basert på figuren du laget for svingetid som funksjon av h ? (Hint: Se på figuren og tenk deg at du skulle beregne svingetiden T for en målt verdi $h = r$. Sammenlignet med andre $h \neq r$, hvor stor betydning for verdien av T har tilfeldige feil i målingen av h her? Du skal ikke trenge å regne, men bruk gjerne det du vet om Gauss' feilforplantningslov i argumentet ditt.)

5.3.3 Mer om standardavvik og standardfeil

Neste oppgave skal illustrere hva standardavvik og standardfeil egentlig er, og hvorfor standardfeilen viser at vi får mindre tilfeldig feil jo flere målinger vi gjør. Vi ser først på spredningene til enkeltmålingene i datasettet, og deretter ser vi hvordan spredningen endrer seg når vi slår sammen enkeltmålinger i grupper.

- Plott en rett horisontal linje som representerer middelveiden i figuren sammen med datapunktene.¹⁴ Ser datapunktene ut til å fordele seg likt over og under middelveiden, eller ser svingetiden ut til å endre seg over tid?
- Plott deretter to horisontale linjer som ligger på $\bar{T} \pm \delta_T$ og to horisontale linjer som ligger på $\bar{T} \pm \delta_{\bar{T}}$. Bruk gjerne ulike linjetyper eller farger til å skille de ulike linjene fra hverandre. De fire siste linjene viser hvilke målinger for svingetiden som ligger innenfor henholdsvis ett standardavvik og en standardfeil fra middelveiden. Ser det ut som målingene stort sett ligger mindre enn ett standardavvik fra middelveiden?
- Del opp datasettet slik at du får fem vektorer som hver inneholder ti ulike måleverdier for svingetiden. Opprett så en vektor som inneholder middelveidene til de fem gruppene med målinger, og en vektor som inneholder standardfeilen til de fem gruppene med målinger. (Her kan du gjerne bruke de innebygde kommandoene `mean` og `std`.) Hver middelvei representerer altså et resultat fått ved å gjenta målingen flere ganger, og standardfeilen er et mål på usikkerheten i dette resultatet.
- Kopier koden du brukte til å plote dataserien med middelvei slik at du får en ny figur som også viser målepunktene og middelveiden til disse. Du kan bruke kommandoen `figure` til å opprette en tom figur.
- I den nye figuren bruker du så kommandoen `errorbar` til å plote de fem middelveidene med hver sin usikkerhet (feilbar) gitt ved standardfeilen. Som x -verdier kan du bruke for eksempel 5,5, 15,5, og så videre, slik at disse middelveidene plasseres midt i de gruppene av enkeltmålinger de representerer.
- Har middelveidene mindre spredning enn enkeltmålingene, det vil si fordeler de seg nærmere middelveiden for hele måleserien? Samsvarer dette med hvor mye mindre usikkerheten til middelveidene er sammenlignet med usikkerheten til enkeltmålingene?¹⁵

¹⁴Hint: Husk at en rett linje er definert ved to punkter, som i Matlab er hensiktsmessig representert ved to vektorer `[x1,x2]` og `[y1,y2]`.

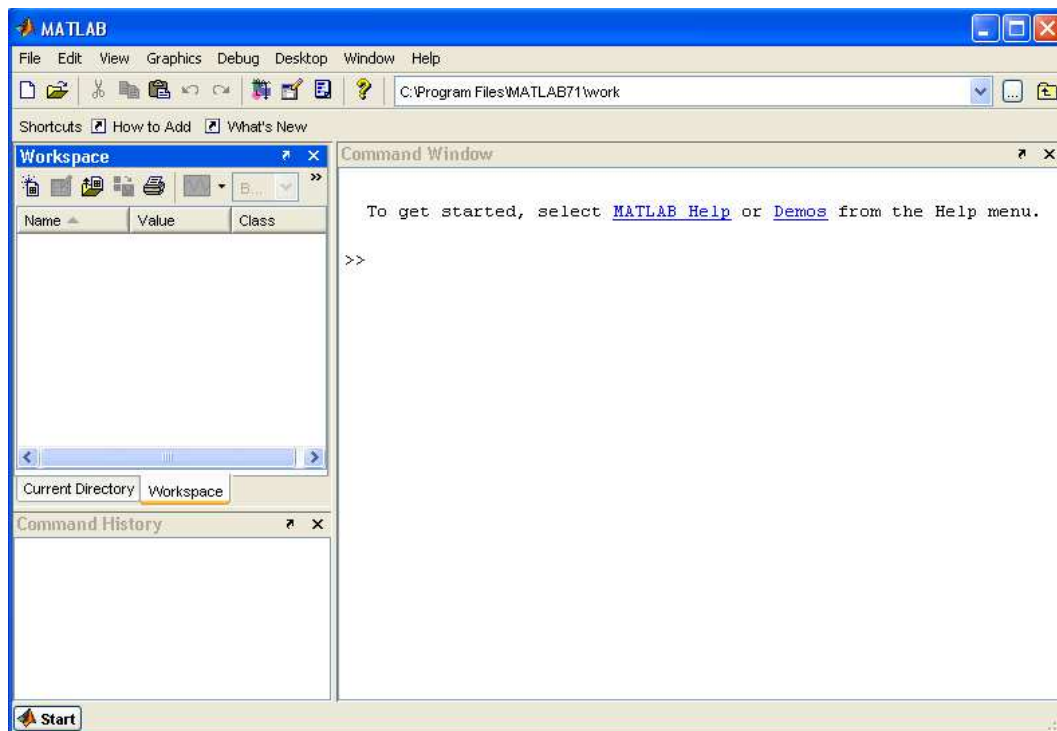
¹⁵ For å vise usikkerheten til en enkeltmåling til sammenligning, kan du plote for eksempel den første enkeltmålingen om igjen med `errorbar` og bruke standardavviket til hele datasettet som usikkerhet.

- Er de fem middelveiene like innenfor måleusikkerheten? Kan du ut fra dette si noe om svingetiden har endret seg i løpet av målingene eller ei?

Kapittel 6

INNFORING I MATLAB

Mål: I dette kapitlet skal vi se på hvordan vi kan bruke Matlab til å analysere eksperimentelle data. Å analysere et stort datasett med tall, som ofte fremkommer fra eksperimenter, kan være tidkrevende uten bruk av gode elektroniske hjelpemidler. Dataprogrammet Matlab er velegnet for å hjelpe deg med akkurat dette, nemlig analyse og presentasjon av eksperimentelle data. I første omgang vil vi gi en enkel introduksjon av programmet som lærer deg å gjøre enkle beregninger. I Matlab er alle innleste data lagret i vektorer og/eller i matriser (arrays, det vil si datatabeller), så deretter går vi gjennom hvordan vi utnytter disse, og hvordan vi presenterer slike data i figurer som punkter eller kurver. Til slutt ser vi på andre nyttige funksjoner og hvordan vi setter sammen kommandoer til et skript.



Figur 6.1: Hovedvinduet i programmet Matlab.

6.1 Matlab-vinduet

- Start Matlab, og hent opp hovedvinduet. Det kan nå se ut omtrent som i figur 6.1.
- Øverst i vinduet finner du den vanlige menylinjen og verktøylinjen. Sjekk ut disse og finn ut hva de ulike knappene gjør. Merk spesielt hjelpemenyen (denne vil du få mye bruk for). Merk deg også boksen som viser hvilken mappe du jobber fra i programmet.
- Matlab-vinduet i figur 6.1 inneholder tre mindre vinduer. Til høyre finner du ‘Command Window’. Dette er hovedvinduet, der alle kommandoer du vil at programmet skal utføre skrives inn, og der resultatene blir vist. Kommandoene må skrives på linjen som starter med `>>`.
- Til venstre finner du vinduet ‘Workspace’ og ‘Command History’. I ‘Workspace’ vil du til enhver tid finne alle variabler (vektorer, matriser, og så videre) som du har definert, beregnet, eller lastet inn i programmet. Alle kommandoer du skriver inn blir lagret i ‘Command History’, slik at de enkelt kan finnes igjen senere. Du kan også finne igjen tidligere kommandoer ved å trykke på oppovertasten når du står på kommandolinja.

Det som følger er en gjennomgang av de mest grunnleggende kommandoene og funksjonene du kan få bruk for i dette (og senere) laboratoriekurs. Dersom dette er ditt første møte med Matlab, anbefales det at du går gjennom punktene nedenfor og utfører kommandoene som er opplistet. (Du kan eventuelt også bruke noen minutter på dette på egenhånd før laboratorieøvelsen dersom du vil forsikre deg om at du er godt forberedt.) Prøv å forstå hva som skjer, og sjekk gjerne forståelsen din ved å forsøke å modifisere kommandoene. Dersom du har noe kjennskap til Matlab eller lignende systemer fra før, kan du vurdere hvor grundig du har utbytte av å gå gjennom de ulike leksjonene nedenfor. Har du allerede en del erfaring fra for eksempel IT Grunnkurs, så greier det seg å skimme raskt gjennom punktene.

6.2 Grunnleggende Matlab-kommandoer

- Matlab kan brukes til å gjøre numeriske beregninger. Skriv for eksempel
`>> 9 + 3`
- Du kan lagre resultatet et tall til en variabel slik:
`>> a = 9 + 3;` (eller ganske enkelt `a = 12;`)
 Nå inneholder variabelen `a` (venstre side av likheten) tallet 12 (høyre side av likheten). Når du setter et semikolon til slutt slik som her så skrives ikke resultatet av kommandoen ut på skjermen. Allikevel blir tallet lagret i programmet (se i workspace-vinduet) med navn, verdi og type.
- En enkel måte å sjekke verdien til en lagret variabel er å skrive variabelnavnet (uten semikolon),
`>> a`
 og verdien blir skrevet til skjerm.

- Du kan nå overskrive `a` for eksempel på følgende vis:
`>> a = a + 3`
Verdien til `a` blir etter dette 15.
- Trenger du resultatet fra forrige regneoperasjon, så kan du bruke den automatiske variabelen `ans` som i følgende eksempel:
`>> a + 3`
`>> ans - 3`
- En veldig nyttig kommando er hjelpekommandoen `help`. Denne kunne for eksempel benyttes i forrige eksempel slik: `>> help ans` for å skrive ut dokumentasjon på skjermen. Tilsvarende kan du gjøre for alle kommandoer og funksjoner som introduseres nedenfor for å finne ut mer i detalj hvordan de brukes.

6.2.1 Matematiske beregninger

- Tall kan skrives på standardformat ved å bruke `e` eller `E`. (Merk at den interne representasjonen av tallet kan være annerledes enn den som vises på skjermen.):
`>> b = 2.34129e-6`
- Dersom Matlab ikke viser så mange desimaler som du skulle ønske:
`>> format long`
(Eller `format short` for å redusere antall desimaler igjen. Merk at kommandoen bare påvirker visningsformatet i kommandovinduet for påfølgende kommandoer, ikke formatet tall lagres med.)
- Har du bruk for konstanten π , så ligger den lagret i en innebygd variabel,
`>> pi`
- Du kan utføre elementære regneoperasjoner på variabler ved å bruke de tilhørende operatorene, for eksempel som vist her:
`>> c = a*b` (multiplikasjon)
`>> d = a/b` (divisjon)
`>> e = a^2` (potens)
- For andre regneoperasjoner må du bruke tilhørende funksjoner, som for eksempel:
`>> sin(pi/2)` (sinus)
`>> sqrt(81)` (kvadratrott)
`>> exp(1)` (eksponentialfunksjon)
Merk at slike funksjoner har et argument som må omslutes av parenteser som vist over.

6.2.2 Vektorer

- I Matlab er det ofte veldig hensiktsmessig å organisere tall i vektorer. En vektor kan konstrueres for eksempel slik:
`>> m = [1,2,3,4,5]`

Du kan også velge å adskille elementene i vektoren med mellomrom i stedet for komma; resultatet er det samme.

- En enkel måte å opprette en vektor med et fast differanse mellom verdien til hvert element er å bruke kolon-operatoren. Kommandoen

```
>> n = 1:10
```

opprettet en vektor med alle heltall fra 1 til 10. Dersom differansen mellom elementene ikke skal være lik 1 så kan du spesifisere det for eksempel ved å skrive¹

```
>> l = 1:0.5:10
```

(Du kan bruke klammeparenteser som ovenfor også når du oppretter vektorer ved hjelp av kolonoperatoren, men det er ikke nødvendig.)

- Du kan hente ut et bestemt element i vektoren på denne måten:

```
>> k = l(9)
```

Om du vil hente ut flere elementer kan du bruke en indeksvektor i stedet for en enkelt-indeks som argument, for eksempel slik:

```
>> k = l(6:12)
```

- Trenger du lengden til en vektor så finner du ved hjelp av

```
>> len = length(l)
```

6.2.3 Vektorberegninger

- Du kan utføre regneoperasjoner på vektorer på (nesten) samme måte som på skalare tall eller variabler. For addisjon, subtraksjon og de fleste matematiske funksjoner virker da regneoperasjonen på hvert enkelt element i vektoren:

```
>> 2*[1,2,3,4,5] + 1
```

```
>> sqrt([1,2,3,4,5])
```

(Eksempelene her kan vi naturligvis forkorte ved å bruke vektorvariabelen `m` som vi opprettet ovenfor.)

- Du kan også addere eller subtrahere vektorer, men da må vektorene naturligvis ha like mange elementer:

```
>> [1,2,3,4,5] + [2,3,4,5,6]
```

- For multiplikasjon, divisjon og eksponenter er det litt mer komplisert fordi disse operasjonene både kan defineres som matriseoperasjoner² og som elementvise skalare operasjoner. Foreløpig får vi mest bruk regneoperasjoner som virker element for element, og du spesifiserer dette ved å sette punktum-operatoren fremfor den aktuelle operatoren som vist i eksemplene nedenfor:

```
>> [1,2,3,4,5] .^2
```

```
>> [1,2,3,4,5] .*[5,4,3,2,1]
```

¹ En alternativ metode for å opprette en vektor med jevnt fordelte tall i et intervall kan illustreres slik:
`> l = linspace(1,10,19)`

Denne funksjonen skal gi samme resultat som `> l = 1:0.5:10`, altså 19 tall mellom 1 og 10. (Dersom du sløyfer det siste argumentet så får du en vektor med 100 elementer.)

²Litt tilleggsinformasjon om matriser og matriseoperasjoner kan du finne i kapittel 6.2.6.

- Summen av alle elementene i en vektor kan du enkelt finne slik:
`>> S = sum(m)`
- På tilsvarende vis kan vi utføre statistisk analyse av data i en vektor:
`>> meanM = mean(m)` (middelerverdi)
`>> deltaM = std(m)` (standardavvik)

6.2.4 Plotting

- Skal vi plotte en funksjon $f(x)$ i Matlab, så må vi først definere et diskret sett av x -verdier som vi skal beregne f -verdier for. Det gjør vi som forklart i forrige delkapittel:
`>> x = [0.1:0.1:20];`
 NB: Nå er det lurt å ta med semikolonet til slutt fordi vi ikke trenger å skrive ut alle 200 elementene på skjermen.
- Så beregner vi funksjonsverdien for alle x -verdiene,
`>> f = sin(x);`
- Så kan vi tegne grafen av f -funksjonen (plotte den). Det kan vi enklest gjøre med
`>> plot(x,f)`
 Altså er første argument i plottefunksjonen x -verdien, og andre argument er y -verdien. (Dersom du bare skriver inn ett argument, så tolker Matlab dette som y -verdien.)
- Du kan spesifisere hvordan grafen skal se ut ved å gi et tredje argument som består av et sett tegnkoder omsluttet av enkle anførselstegn. Vil du for eksempel ha en stiptet rød linje så gjør du slik:
`>> plot(x,f,'r--')`
 For å lære mer om plotting av figurer og tegnkoder for ulike farger, linjetyper, markører og så videre, skriv
`>> help plot`
- Merk at når du kjørte plottekommandoen igjen så ble den første grafen du plottet overskrevet, det vil si slettet. Dersom du så vil plotte flere grafer i den samme figuren må du be Matlab om å "holde" på grafen som allerede er der så den ikke blir overskrevet. Dette kan for eksempel gjøres slik:
`>> g = cos(x);`
`>> hold on`
`>> plot(x,g,'b:')`
- Du kan også plotte enkeltpunkter (uten linje imellom) ved å ikke angi noen linjetype i det tredje argumentet,
`>> plot([4 7 10 13 16],[0.5 -0.5 0 -0.5 0.5],'kx')`
- Endre skala på x - og y -aksene kan gjøres slik:
`>> xlim([2 18])`
`>> ylim([-1.2 1.6])`
- Sette navn på x -, y -aksen, og lage tittel på figuren kan gjøres slik:
`>> xlabel('x-variabelen')`

```
>> ylabel('funksjonen')
>> title('Test av plottekommandoen')
```

- For flere grafer i samme vindu kan du legge til tegnforklaring på denne måten:

```
>> legend('sinus','cosinus','datapunkter')
```
- Til slutt nevner vi at du også kan plotte datapunkter med feilbarer, det vil si med angivelse av usikkerhetsintervall. Dette kan du få bruk for i laboratorieøkt nr. 3, og kommandoen du bruker da er for eksempel

```
>> errorbar([7 10 13],[-0.5 0 -0.5],[0.3,0.2,0.3],'m+')
```

 Eneste forskjell fra `plot`-kommandoen er altså at andre argument (y -verdiene) etterfølges av et nytt argument med usikkerhetene til y -verdiene.

Figurer i Matlab kan eksporteres til .jpg, .eps, .pdf, og så videre. (PDF-figurer vil du få bruk for senere når du skal skrive laboratorierapport ved hjelp av LaTeX.)

6.2.5 Behandling av filer, variabler og figurvinduer

- En vektor eller matrise (her `m`) kan lagres til fil (her `datafil.dat`) for eksempel slik:

```
>> dlmwrite('datafil.dat',m)
```
- På tilsvarende vis kan du laste inn data fra en fil til en vektor eller matrise,

```
>> inndata = load('datafil.dat') eller >> inndata = dlmread('datafil.dat')
```

 Merk at filen må ligge i mappen du arbeider i ("current directory") dersom du ikke angir noe annet.
- Slette variabler (enten én angitt variabel eller alle variablene):

```
>> clear c eller clear all;
```
- Slette alt fra skjermbildet i kommandovinduet:

```
>> clc
```

 (NB: Dette sletter ikke variablene. De ligger fortsatt i Workspace.)
- Opprette et nytt figurvindu:

```
>> figure(2)
```

 Dersom det allerede eksisterer et figurvindu med det oppgitte figurnummeret (her: 2), endres fokus til dette vinduet. Bruker du bare kommando `figure` så blir et nytt figurvindu opprettet uansett.
- Lukke vinduer/figurer:

```
>> close eller close 1 eller close all
```

6.2.6 Tillegg: Matriseoperasjoner

Her legger vi ved en kort og overfladisk innføring om matriser, det vil si datatabeller, og operasjoner på disse. Du kan se på dette som en generalisering av kapitlene 6.2.2 og 6.2.3 om vektorer. For en mer grundig innføring i matriser må vi vise til for eksempel TMA4115 Matematikk 3 eller MA1201 Lineær algebra og geometri.

- Matriser kan opprettes på denne måten:
`>> A = [1,2;3,4]`
 Her er brukes semikolon til å skille de ulike radvektorene som matrisen består av.
- Elementer kan hentes ut fra matrisen på tilsvarende vis som for vektorer, og du kan trekke ut en bestemt radvektor eller kolonnevektor ved å skrive henholdsvis
`>> a1 = A(1,:) eller >> b1 = A(:,1)`
- Som for vektorer vil regneoperasjoner i de fleste tilfeller utføres elementvis, men for multiplikasjon, divisjon og potenser må du bruke punktum-operatoren for å fremtvinge dette. Dersom punktum-operatoren utelates i disse tilfellene, utføres regneoperasjonene som *matriseoperasjoner*, men det fungerer kun dersom dimensjonene til matrisene (eller vektorene) stemmer overens. Et eksempel: For en radvektor **a1** og en kolonnevektor **b1** med lik lengde finner du skalarproduktet ved
`>> a1*b1`
 I dette tilfellet er dette skalarproduktet lik elementet **B(1,1)** dersom matrisen **B** er gitt ved matrisemultiplikasjonen
`>> B = A*A`
- Radvektorer transponeres til kolonnevektorer og vice versa ved å bruke apostrof-operatoren:
`>> a1'`

6.3 Bruke Matlab m-filer (skript)

I en m-fil kan du skrive flere kommandoer sammen og kjøre de i én utførelse til slutt. Dette er ofte svært nyttig ved behandling av data. Du kan for eksempel lese inn data fra en tekst-fil, deretter behandle data, og så kanskje lage en fin figur til slutt. Spesielt hvis du har flere datasett som skal behandles på samme måte, er dette en enkel måte å gjøre det på.

Du kan også lage nye funksjoner i Matlab med m-filer. De kan da kalles fra kommandovinduet (eller fra andre m-filer) på samme måte som andre ferdiglagede funksjoner i Matlab.

- Velg 'New M-file' i Matlab vinduet. (Et nytt separat vindu vil åpne seg der en kan redigere den nye m-filen.)
- For å kjøre innholdet i m-fila, trykk på 'run'-knappen (eller F5). Husk å først lagre fila i en katalog på ditt hjemmeområde.
 NB! Ikke bruk '-' eller mellomrom ' ' i filnavn. Det takles ofte dårlig av Matlab.

6.3.1 Forslag til struktur på en enkel m-fil

- Skriv inn i starten på fila kommentarer som forklarer hva fila gjør, hvem som har skrevet den og dato den er skrevet.

- Kommentarer skrives ved å først skrive '%'. Da blir linja en kommentarlinje (teksten blir grønn), og ikke en kommandolinje som programmet senere utfører. Innskrevne kommandoer som du ikke vil slette, men heller ikke kjøre, kan da enkelt utelates ved å sette et '%' først i linja.
- Definer funksjonsnavn hvis du lager en funksjon. (Syntaks: `function returvariabel = funksjonsnavn(argument).`)
- Definer eventuelle konstanter.
- Les inn data fra filer, hvis du trenger det.
- Analyser data.
- Lag figurer og grafer av data.
- Skriv eventuelle resultater til en ny fil hvis ønskelig.
- Hvis du skriver kommandoen `return` et sted i m-fila slutter programmet å kjøre når den kommer dit, og alt nedenfor blir ikke utført.
- Alle variabler inni en funksjon er lokale, det vil si de sees bare inne i denne funksjonen. Du kan dermed ha samme navn som andre variabler utenfor funksjonen uten at det nødvendigvis skaper problemer.

6.3.2 Tillegg: Eksempel med bruk av for-løkker

Vi avslutter med et eksempel der vi også introduserer et vanlig element i Matlab: for-løkker. Dette er en struktur som, når du setter den inn i m-filen, får Matlab til å gjenta en kode-bit ("kroppen" til for-løkken) et gitt antall ganger. Vi illustrerer prinsippet ved et enkelt eksempel der vi (på en tungvint måte) beregner en potens x^n som et produkt av n x -faktorer, ganget sammen én av gangen:

```
% Eksempel: bruk av løkker i Matlab, for laboratorium i Mekanisk fysikk
% Skrevet juli 2010 av laboratorieveilederne i Mekanisk fysikk

x = 2;          % grunntall
n = 4;          % eksponent

xn = x;         % dette er variabelen som til slutt skal få verdien x^n
for i=1:n-1     % telleren 'i' starter lik 1 og øker med 1 for hver gang
    xn = xn*x;  % kroppen til løkken (denne blir til sammen kjørt n-1 ganger)
end            % Matlab går nå tilbake til begynnelsen av løkken dersom i < n

xn             % Til slutt lar vi Matlab skrive ut verdien av x^n
```


Kapittel 7

GRAVITASJONSKONSTANTEN

Mål: Du skal i denne oppgaven tilegne deg større forståelse rundt begrepene kraft og gravitasjonsvekselvirkning. Den universelle gravitasjonsloven blir forklart og satt inn i et historisk perspektiv. Du skal bruke Cavendish' metode for å bestemme gravitasjonskonstanten og ut fra dine eksperimentelle måleresultat finne et estimat for konstanten. Du skal i etterkant av denne oppgaven også utarbeide en rapport, dette er nærmere beskrevet i kapittel 7.6.

7.1 Teoretisk bakgrunn

7.1.1 Gravitasjon

Gravitasjon er en attraktiv kraft som alltid opptrer mellom masser. Selv om gravitasjonen er den første fjernttrekkende kraften vi lærer om i fysikken er det fortsatt mange mysterier knyttet til gravitasjon. Selv om den fenomenologiske beskrivelsen av gravitasjonen for store avstander stort sett har stått uforandret i 300 år vet vi fortsatt lite om hva som forårsaker den. Hovedårsaken til det er at gravitasjonskraften er en forsvinnende svak kraft sett i forhold til andre fjernkrefter som for eksempel elektromagnetiske krefter. Det må derfor veldig store ansamlinger av masse til for at vi skal kunne føle gravitasjonskraften.

Planeter og andre himmellegemer er eksempler på slike store ansamlinger av masse, og det var iakttagelser på himmelen som først motiverte til studier av gravitasjonen. Observasjoner av planetenes baner og diskusjonene rundt solsystemet har påvirket vårt verdensbilde og den filosofiske diskusjonen siden oldtiden.

På slutten av 1600-tallet samlet Isaac Newton tidligere betraktninger og lover om gravitasjonskraften sammen med ny teori til en universell gravitasjonslov. Dette står fortsatt som en av de aller største vitenskapelige bragder og ga mye av grunnlaget for den klassiske mekanikken.

Det siste store bidraget til gravitasjonsloven kom med Einsteins generelle relativitetsteori som innførte begrepet om det krumme verdensrommet. Selv om denne teorien ikke inngår i dette kurset kan det være interessant å vite at den gravitasjonsteorien vi bruker i dag fortsatt

er gjenstand for stor forskningsaktivitet.

Ifølge Newtons universelle gravitasjonslov, vil to masser m_1 og m_2 i tyngdepunktavstand b fra hverandre tiltrekkes av en kraft

$$F = G \frac{m_1 m_2}{b^2}, \quad (7-1)$$

hvor G er gravitasjonskonstanten. Gjeldende tabellverdi for gravitasjonskonstanten er $G = (6,67428 \pm 0,00067) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. [2]

Eksempel 1. Gravitasjonskraften på jordoverflata.

Gravitasjonskrefter mellom jorda og masser ved jordas overflate er som kjent godt merkbare. Ved innsetting av verdier for gravitasjonskonstant, jordmasse og jordradius i ligning (7-1) finner du at gravitasjonskraften på en masse $m = 1,0 \text{ kg}$ ved jordoverflata er ca. 10 N . Til sammenligning finner du ved innsetting av solmasse, jordmasse og jordbaneradius i ligning (7-1) at gravitasjonskraften mellom solen og jorda er ca. $4 \cdot 10^{22} \text{ N}$. Gravitasjonskrefter mellom masser av den størrelsesorden som vi hyppig møter i dagliglivet på jordas overflate er imidlertid meget små. For eksempel finner du ved innsetting i gravitasjonsloven at kraften mellom to personer som hver veier 80 kg og står i en tyngdepunktavstand av 1 m er lik ca. $0,4 \mu\text{N}$, som ikke er merkbart.

Eksempel 2. Gravitasjonskraften på måneoverflata.

Ved innsetting av verdier for månemasse og måneradius i gravitasjonsloven finner du at gravitasjonskraften på en masse $m = 1,0 \text{ kg}$ ved overflata er $1,6 \text{ N}$. Til sammenligning finner du ved innsetting av jordmasse, masse og baneradius i ligning (7-1) at gravitasjonskraften mellom jorda og månen er ca. $2 \cdot 10^{20} \text{ N}$.

Eksempel 3. Eksperimentell bestemmelse av gravitasjonskonstanten.

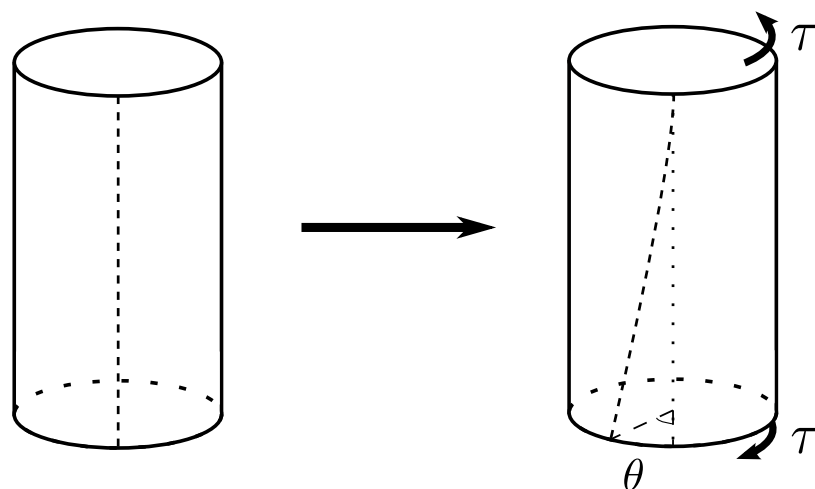
Fra en måling av kraften F mellom to kjente masser m_1 og m_2 i kjent avstand b kan gravitasjonskonstanten bestemmes ved innsetting i ligning (7-1) og omskriving til

$$G = F \frac{b^2}{m_1 m_2}. \quad (7-2)$$

7.2 Måling av gravitasjonskonstanten

Det var Henry Cavendish som i 1798 først lyktes i å bestemme tallverdien til gravitasjonskonstanten [3]. Han brukte en torsjonsvekt for å måle gravitasjonskraften mellom to små masser i kjent tyngdepunktsavstand og bestemte G fra ligning (7-2). Dette var ingen liten bedrift tatt i betraktning at kraften som måles er av størrelsesorden μN .

I torsjonsvekten utnyttes de elastiske egenskapene til en metalltråd som utsettes for torsjon, det vil si vridning. Dersom en utsetter en fastspent stav for et dreiemoment τ , se figur 7.1, vil staven få en vridning i samme retning som momentet. Dersom vridningen kan anses som liten i forhold til stavens totale lengde, har vi at vinkelutslaget til vridningen θ (kalles også



Figur 7.1: Illustrasjon av torsjon i en stav på grunn av et dreiemoment τ . Den stiplede vertikale linjen i illustrasjonen til venstre forestiller en tenkt linje på staven når dreiemomentet er null. I illustrasjonen til høyre er linjen vridd som følge av påsatt dreiemoment τ , og vinkelen som linjen nå har i forhold til utgangsposisjonen er vinkelutslaget θ .

torsjonsvinkelen) er proporsjonal med dreiemomentet som er påført,

$$\tau = D\theta, \quad (7-3)$$

der proporsjonalitetskonstanten D kalles torsjonsstivhet. Merk at denne relasjonen som omhandler rotasjon av et fast legeme, er helt ekvivalent med Hookes lov for en fjær (lineær deformasjon). Det følger at kraften i dreiemomentet $\tau = Fr$ vil være lik

$$F = \frac{D}{r} \cdot \theta, \quad (7-4)$$

hvor r er dreiemomentets arm. Fra ligning (7-4) ser du at i en oppstilling med en tråd med kjent forhold mellom torsjonsstivheten og armen kan kraften bestemmes ved å måle torsjonsvinkelen så lenge torsjonen ikke fører til at elastisitetsgrensen for trådmaterialet overskrides.¹

Under bygging av måleinstrumenter ligger hovedproblemet ofte i kalibrering av måleinstrumentet. Uttrykket (7-4) viser at løsningen av kalibreringsproblemet for en torsjonsvekt ligger i å finne metoder for pålitelig bestemmelse av forholdet D/r .

Ved å variere dimensjonene og materialet kan mykheten i en torsjonstråd reguleres med stor følsomhet. På grunn av disse egenskapene er torsjonsvekten den mest følsomme direkte målemetode for kraft som er kjent, og den eneste målemetode som er tilstrekkelig følsom for direkte bestemmelse av de svake gravitasjonskreftene mellom de massene en vanligvis bruker i laboratoriet.

¹Med elastisitetsgrense menes grensen der θ er så stor at ligning (7-3) ikke lenger er gyldig.

En prinsippsskisse av apparaturen er vist i figur 7.2. En torsjonspendel er hengt opp i et lukket kammer. Pendelmassene er to små blykuler med like masser m , montert i en avstand $2r$ i hver sin ende av en arm med en vekt som er neglisjerbar i forhold til massen til blykulene. Utenfor kammeret er to større blykuler med like masser M montert på en arm slik at sentrene til de store og de små kulene ligger i samme horisontalplan. Armen kan dreies i horisontalplanet om forlengelsen av torsjonstrådens akse. Ved å justere posisjonen til den dreibare armen kan senter-til-senter-avstanden b mellom de små og de store kulene justeres. På grunn av gravitasjonskraften mellom de små og de store kulene vil likevektsposisjonen av torsjonspendelen avhenge av posisjonen til de store kulene.

Måling av gravitasjonskraften mellom de små og de store blykulene utføres i prinsippet på følgende måte: De store blykulene monteres først i posisjon 1 som er vist heltrukket i figur 7.2. Når torsjonspendelen har falt til ro bestemmes torsjonsvinkelen θ_1 for torsjonspendelens likevektsposisjon. De store kulene svinges så til posisjon 2 som er vist stiplet i figur 7.2. Når torsjonspendelen har falt til ro igjen, bestemmes torsjonsvinkelen θ_2 for den nye likevektsposisjonen. Fra figur 7.2 fremgår det at summen av momentbalansen for torsjonsvekten i posisjon 1 og posisjon 2, blir

$$2Fr + 2Fr = D\theta_1 + D\theta_2 \quad (7-5)$$

som gir følgende uttrykk for gravitasjonskraften

$$F = \frac{D}{r} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{4}. \quad (7-6)$$

Fra ligning (7-6) ser du at for å bestemme F må du måle armlengden r og vinkelutslagene θ_i til torsjonspendelen og bestemme torsjonsstivheten D . Måling av armlengden er triviell. Måling av torsjonsvinkelen og bestemmelse av torsjonsstivheten må vi se nærmere på.

7.2.1 Måling av torsjonsvinkelen

For å måle torsjonsvinkelen bruker vi et gammelt måleteknisk knep. Et lite speil er montert ved nedre enden av torsjonstråden parallelt med armen slik at det følger armens bevegelser som vist i figur 7.2. En smal lysstråle rettes mot speilet og retningen til strålen justeres slik at den reflekteres mot en lengdeskala. Som figuren viser vil den reflekterte lysstrålen sveipe over vinkelen 2θ når armen sveiper over vinkelen θ .

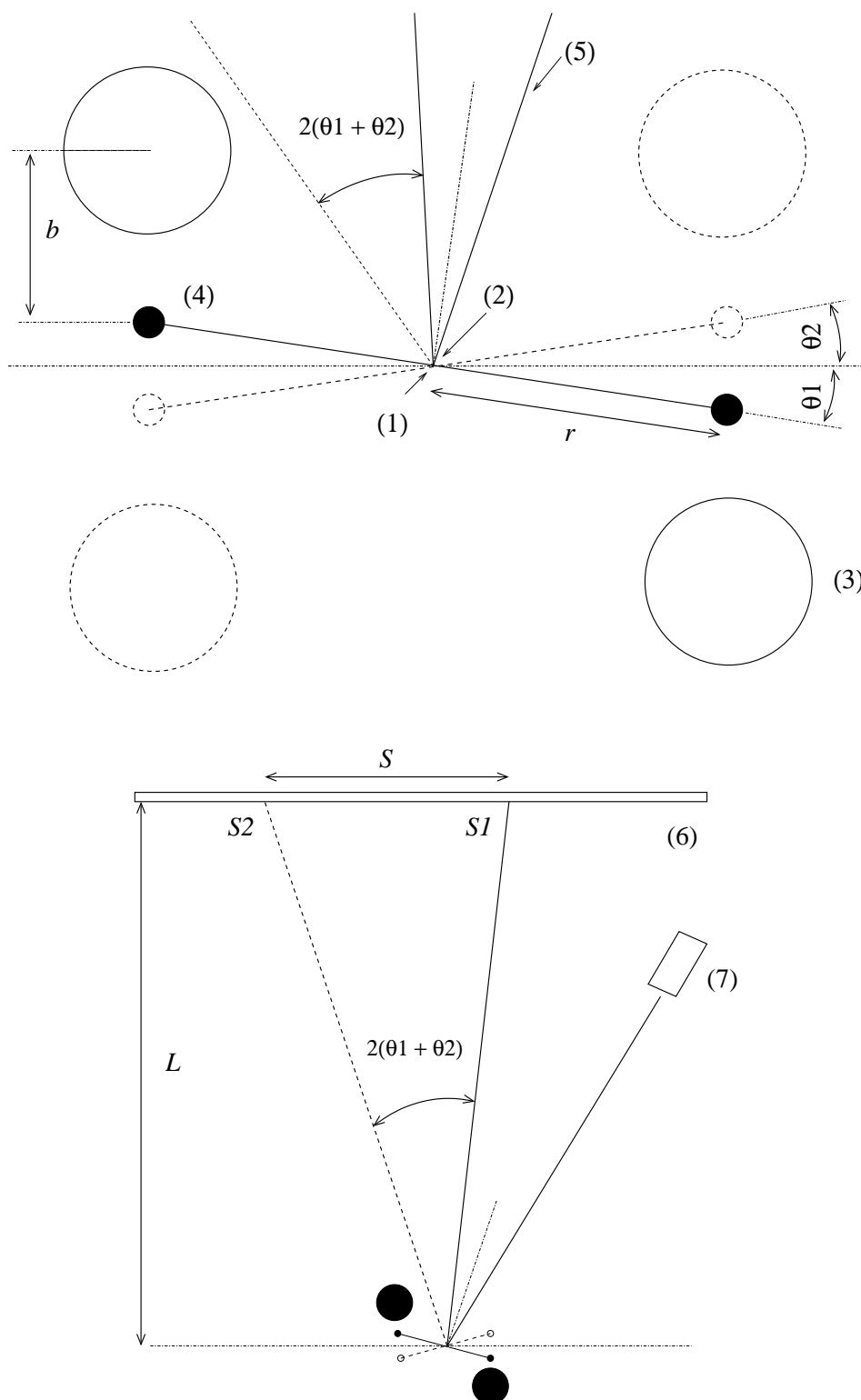
Når avstanden fra speilet til målestaven L er stor i forhold til utslaget S , altså $L \gg S$, er vinkelen $2(\theta_1 + \theta_2)$ (se figur 7.2) gitt ved

$$\frac{S}{L} \approx 2(\theta_1 + \theta_2), \quad (7-7)$$

hvor $S = S_2 - S_1$ og S_1 og S_2 er skalautslagene ved henholdsvis likevektsposisjon θ_1 og θ_2 . L er avstand fra speilet til måleskalaen (linjalen). Tilnærmingen gjelder for små vinkler. Dermed får vi uttrykk for gravitasjonskraften

$$F = \frac{D}{8r} \cdot \frac{S}{L}. \quad (7-8)$$

Ved å velge L stor nok kan nøyaktigheten i vinkelmålingen i prinsippet alltid gjøres stor nok.



Figur 7.2: Den øverste figuren viser et skjematisk diagram av torsjonsvekten i Cavendishoppstillingen sett langs torsjonstråden. (1) Torsjonstråd (vinkelrett på papirplanet), (2) speil, (3) store blykuler, (4) små blykuler, (5) laserlys. Den nederste figuren viser et skjematisk diagram av eksperimentoppsettet. (6) skala, (7) laserkilde. Posisjon 1 er vist heltrukket. Posisjon 2 er vist stiplet. Likevektstiltingen for torsjonspendelen er langs den horisontale strek-punktlinjen når de store blykulene er fjernet.

7.2.2 Bestemmelse av torsjonsstivheten

Når torsjonspendelen utsettes for et dreiemoment, slik at likevektsposisjonen til pendelen forskyves, vil pendelen svinge harmonisk rundt den nye likevektsposisjonen.² Vinkelakselerasjonen α for svingningene til torsjonspendelen er gitt av spinn-ligningen (Newtons 2. lov for rotasjonsbevegelse, se kapittel 5.1.1),

$$\tau = I\alpha, \quad (7-9)$$

der $I = 2mr^2$ er treghetsmomentet til torsjonspendelen i Cavendish-eksperimentet. Dreiemomentet τ som torsjonspendelen utsettes for, kommer fra torsjonstråden, og vi kan da sette ligning (7-3) med et negativt fortegn (vi ser på motkraften *fra* tråden på pendelen; i ligning (7-3) så vi på en ekstern kraft på tråden) inn i ligning (7-9) og får svingeligningen

$$I\ddot{\theta} = -D\theta \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad \text{hvor} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{I}. \quad (7-10)$$

En løsning av denne ligningen er

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \sin \omega_0 t = \theta_0 \cdot \sin \sqrt{\frac{D}{I}} \cdot t, \quad (7-11)$$

som viser at bevegelsen er en enkel harmonisk bevegelse med vinkelhastighet $\omega_0 = \sqrt{D/I}$. Bevegelsen vil være harmonisk så lenge D er konstant, med andre ord så lenge bevegelsen er tilstrekkelig liten til at spenningene i torsjonsfjæra ikke overskrider elastisitetsgrensen. Torsjonsstivheten D kan nå enkelt uttrykkes ved svingeperioden $T = 2\pi/\omega_0$,

$$D = \frac{4\pi^2 I}{T^2}. \quad (7-12)$$

Herfra ser du at for å bestemme D må du måle T og I , som begge er lett målbare.

7.2.3 Beregning av gravitasjonskonstanten

Under forutsetning av at andre masser i omgivelsene til eksperimentet ikke har målbar innvirkning og at vi bruker små vinkler θ , gir kombinasjon av uttrykkene (7-2)³, (7-8) og (7-12) samt at $I = 2mr^2$ følgende uttrykk for gravitasjonskonstanten

$$\begin{aligned} G &= F \cdot \frac{b^2}{mM} = D \cdot \frac{1}{8r} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{b^2}{mM} \\ &= \frac{4\pi^2 I}{T^2} \cdot \frac{1}{8r} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{b^2}{mM} = \frac{4\pi^2 2mr^2}{T^2} \cdot \frac{1}{8r} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{b^2}{mM}, \end{aligned} \quad (7-13)$$

som etter forkortinger gir

²I realiteten er denne svingningen en dempet harmonisk svingning, men vi vil for enkelhets skyld anta at svingningen er harmonisk. Med tanke på relasjonen mellom svingeperioden og torsjonsstivheten som skal utledes her, er effekten av demping neglisjerbar for torsjonspendelen som brukes i Cavendish-eksperimentet.

³Merk at massene m_1 og m_2 i Newtons gravitasjonslov tilsvarer m og M her.

$$G = \pi^2 \frac{Sb^2r}{T^2LM}. \quad (7-14)$$

Uttrykket inneholder kun målbare størrelser. Merk at massen m til de små kulene er forsvunnet fra uttrykket for G . Legg også merke til at oppbyggingen av torsjonsvekten sikrer at kraften mellom små og store kuler alltid er vinkelrett på tyngdeakselerasjonen slik at forstyrrelser fra gravitasjonsvekselvirkning med jorda blir eliminert. Vi kommer tilbake til eventuelle forstyrrelser fra andre masser på eksperimentet i neste delkapittel.

7.3 Feilanalyse i Cavendisheksperimentet

7.3.1 Tilfeldige feil

God eksperimentell planleggingsskikk tilsier at hver av de målte størrelsene i Cavendish-eksperimentet burde måles med en relativ presisjon som er slik at hver av størrelsene gir omtrent like stort bidrag til totalfeilen i bestemmelsen av gravitasjonskonstanten. Her er noen punkter som du må tenke på i forbindelse med eksperimentet:

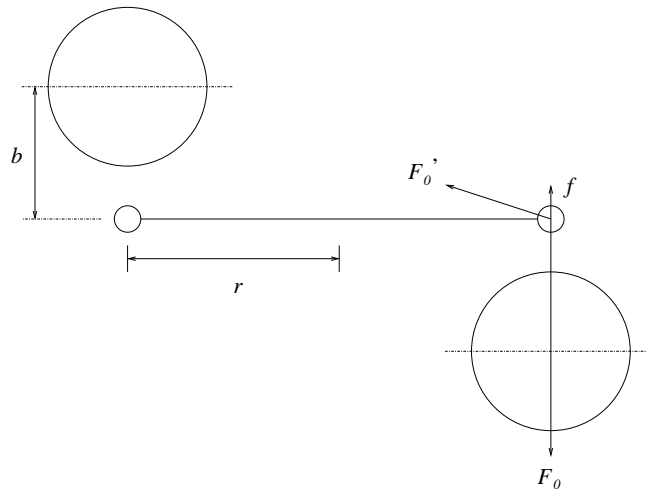
- Kan du fra fortolkningsmodellen $G = \pi^2 Sb^2r/(T^2LM)$ for Cavendisheksperimentet se hvilke størrelser som må måles med størst relativ presisjon?
- Bruk fortolkningsmodellen til å sette opp et uttrykk som viser hvordan den relative feilen $\Delta G/G$ i bestemmelsen av gravitasjonskonstanten avhenger av de relative feilene i de målte størrelsene.
- Anslå de relative målefeilene i Cavendisheksperimentet.
- Kan feilen i noen av de målte størrelsene neglisjeres i forhold til feilen i de andre?
- Bruk dine estimer av feilen i de målte størrelsene til å estimere feilen i bestemmelsen av gravitasjonskonstanten.

7.3.2 Systematiske feil

Under utledning av fortolkningsmodellen $G = \pi^2 Sb^2r/(T^2LM)$ for Cavendisheksperimentet, tok vi kun hensyn til gravitasjonsvekselvirkningen mellom liten kule m og nærmeste store kule M , og vi neglisjerte for eksempel gravitasjonsvekselvirkningen mellom m og motsatt store kule M . Bruk av denne forenklete fortolkningsmodellen vil føre til en systematisk feil.

For å estimere denne feilen kan du se på kraften mellom en liten kule og borteste store kule:

$$F'_0 = G \frac{mM}{b^2 + 4r^2}. \quad (7-15)$$



Figur 7.3: Korreksjon av systematisk feil i Cavendish' eksperiment. Den opprinnelige forklaringsmodellen i kapittel 7.2 tar kun hensyn til gravitasjonsvekselvirkningen mellom liten kule og nærmeste store kule, F_0 . Det er også gravitasjonsvekselvirkning mellom liten kule og motsatt stor kule, F'_0 , med en komponent f som bidrar til å redusere den totale torsjonen på pendelen.

Denne kraften har, som figur 7.3 viser, en komponent f i motsatt retning til kraften F_0 som skal måles. Med $F_0 = GmM/b^2$ lik kraften uten korreksjon viser figuren at

$$f = F'_0 \cdot \sin \alpha = G \frac{mM}{b^2 + 4r^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4r^2}} = G \frac{mM}{b^2} \cdot \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{3/2}} = F_0 \cdot \beta, \quad (7-16)$$

hvor

$$\beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4r^2)^{3/2}} \quad (7-17)$$

er den faktoren som den observerte kraften reduseres med i forhold til antakelsene som den forenklete fortolkningsmodellen bygger på. Den observerte kraften F' blir dermed

$$F' = F_0 - f = F_0(1 - \beta), \quad (7-18)$$

og den korrigerte G_{kor}' blir

$$G_{\text{kor}}' = \frac{G}{1 - \beta}, \quad (7-19)$$

der G er beregnet fra ligning (7-14). Hvor mange prosent utgjør denne systematiske feilen? Blir den korrigerte G større eller mindre enn G beregnet fra likn. (7-14)?

7.4 Forhåndsoppgaver om gravitasjon

For at dere skal få bedre kjennskap til teorien og størrelsene som er i bruk under forsøket, skal dere gjøre noen oppgaver før dere kommer på laboratoriet. Merk at de verdiene som er oppgitt her ikke er helt like med de dere vil måle i laboratoriet. La oss si at vi har målt avstanden mellom kulene til $b = 4,5$ cm og massene til kulene $M = 1,5$ kg og $m = 15$ g.

1. Hvor stor gravitasjonskraft F forventer du da mellom stor og liten blykule?

2. Vil denne kraften være målbar med en moderne analysevekt som har en følsomhet på 0,1 mg?

Torsjonsstivheten til torsjonstråden er avhengig av trådmaterialet, trådens lengde og formen på trådtverrsnittet. For en tråd med sirkulært tverrsnitt med diameter d er torsjonsstivheten gitt ved

$$D = \frac{\pi G' d^4}{32 \ell}, \quad (7-20)$$

der G' er trådens skjærmodul⁴ og ℓ er trådens lengde. For en tråd med rektangulært tverrsnitt $h \times t$ hvor $h \gg t$, er torsjonsstivheten gitt ved

$$D = G' \frac{ht^3}{3\ell}. \quad (7-21)$$

For å optimalisere ytelsen av Cavendisheksperimentet ønsker vi å bruke store blykuler for å få en stor gravitasjonskraft og samtidig å bruke en torsjonstråd med lav torsjonsstivhet for å oppnå stor følsomhet i torsjonsvekten.

3. Forklar hvorfor disse to kravene til optimal ytelse er motstridende.

4. Vil trådtverrsnittets form spille en rolle for et eventuelt kompromiss mellom optimaliseringskravene?

Torsjonstråden er laget av bronse (skjærmodul $G' = 35$ GPa og bruddgrense $\sigma_b = 500$ MPa) med rektangulært tverrsnitt $h \times t = 0,15 \times 0,01$ mm² og lengde $\ell = 25$ cm.

5. Hvor stor torsjonsstivhet D forventer du at tråden vil ha?

Tyngdepunktsavstanden mellom de små blykulene er $2r = 100,0$ mm.

6. Hvor stor statisk utslagsvinkel $2(\theta_1 + \theta_2)$ forventer du å observere?

Av praktiske grunner må avstanden mellom speil og skala begrenses til $L = 3$ m.

7. Hvor stort statisk skalautslag S forventer du å observere?

8. Hvor stor svingeperiode T forventer du for frie svingninger av torsjonspendelen?

7.5 Eksperimentelt

7.5.1 Apparat

Et skjematisk diagram av torsjonsvekten er vist i figur 7.2. Torsjonsvekten er montert i et lukket kammer for å unngå forstyrrelser fra trekk og lignende. Torsjonsvektens parametre er derfor ikke tilgjengelige for måling. Fabrikanten oppgir følgende verdier:

⁴Skjærmodulen er en materialavhengig konstant som angir materialets deformasjonsrespons når det utsettes for krefter som virker parallelt med materialets overflate (skjærkrefter).

- Senter-til-senter avstanden for de små kulene $2r = 100,0$ mm.
- Massen $m = 0,015$ kg.
- Torsjonstråd av bronse, 25 cm lang med et rektangulært tverrsnitt $t \times h = 0,01 \times 0,15$ mm².

Inspiser apparaturen og legg spesielt merke til speilet som roterer sammen med torsjonstråden og til den svingbare armen med de to store blykulene.

7.5.2 Forsiktighetsregler

Siden torsjonsstivheten til tråden i eksperimentet er svært liten, vil eksperimentet i sin helhet være ømfintlig for ytre påvirkninger. Vær derfor generelt forsiktig når du håndterer eksperimentoppsettet for å unngå unøyaktige og feilaktige målinger. Spesielt bør du være klar over følgende:

- Ikke berør stativet med torsjonspendelen mer enn høyst nødvendig.
- Når du beveger de store blykulene, pass på at du ikke «dulter» for mye borti pleksi-glasset som beskytter torsjonspendelen. Et triks er å følge med på refleksen til den store blykula, og stoppe når refleksen møter den virkelige kula.
- De store kulene bør anbringes i holderen og laseren slås på i god tid før eksperimentet gjennomføres slik at eventuelle mekaniske rystelser får tid til å falle til ro og temperaturen er stabilisert.
- Alle vinduer og dører må holdes lukket under eksperimentene for å unngå trekk og temperaturvariasjoner som forstyrrer målingene kraftig.
- Det er lurt å gjøre ferdig de dynamiske målingene før du eventuelt tar pause.
- Blykulene er laget av metallisk bly som er lett deformerbart. Håndter derfor disse med forsiktighet og ikke mist dem i gulvet. Bly er giftig materiale - vask deg derfor på hendene etter at du har tatt på kulene.
- **FARE: Se ikke direkte mot laserstrålen.**

Generelt gjelder som for alle laboratorieøvinger, å behandle utstyret med forsiktighet. Spør hvis det er noe du lurer på.

7.5.3 Måleprosedyre

Du skal nå kartlegge pendelsvingningene i 2×30 minutter for å finne begge likevektspunktene S_1 , S_2 og dessuten svingeperioden T til pendelen. Under analysen av svingedataene skal du bruke et ferdiglaget program skrevet i Matlab. Du må derfor laste dataene inn i Matlab på en slik måte at analyseprogrammet forstår dem. Programmet vil da beregne likevektspunktet for svingingen, svingeperioden og usikkerheten i svingutslaget. Analyseprogrammet vil lage en figur som vist i figur 7.5.

NB! Det er viktig at du lagrer dataene dine korrekt, ellers kan du miste dem, og da er en halv- til en times arbeid plutselig borte!

Du kan gå frem på følgende måte:

- Åpne Matlab-vinduet på vanlig måte.
- Lag en ny mappe på hjemmeområdet ditt, og endre "Current Directory" øverst i Matlab-vinduet til denne mappen.
- Lag en tom 61×3 matrise i Matlab ved å skrive:
`>> S1data = zeros(61,3);`
- Dobbeltklikk på 'S1data' i Workspace. Du vil da få opp en tabell som ligner på den vist i figur 7.4, men med null i alle elementene.
- Fyll inn data i kolonnene etter hvert som dere samler dem hvert 30. sekund. Se tabellen i figur 7.4:
 - Første kolonne: Hele minutter.
 - Andre kolonne: Sekunder.
 - Tredje kolonne: Svingeutslag i millimeter.

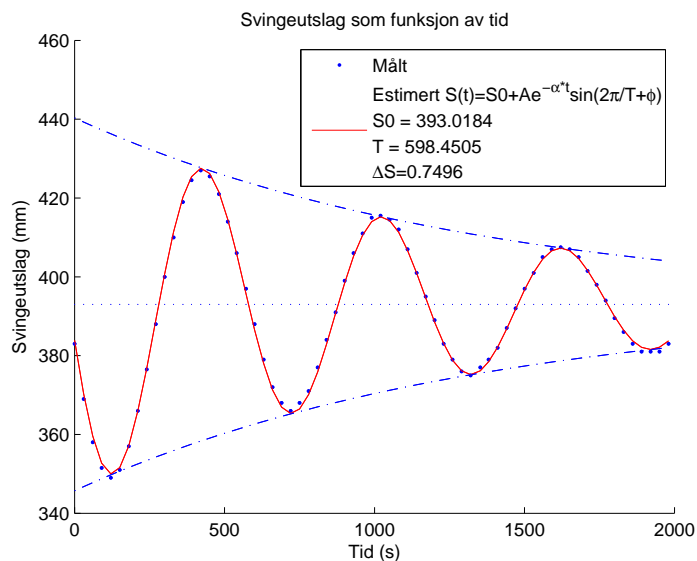
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|----|-----|---|
| 1 | 0 | 0 | 383 | |
| 2 | 0 | 30 | 369 | |
| 3 | 1 | 0 | 358 | |
| 4 | 1 | 30 | 352 | |
| 5 | 2 | 0 | 349 | |
| 6 | 2 | 30 | 0 | |
| 7 | 3 | 0 | 0 | |

Figur 7.4: Forslag til Matlab-tabell for Cavendisheksperimentet. Data skrives inn i tre kolonner. Hele minutter i kolonne 1, sekunder i kolonne 2, svingeutslag i millimeter i kolonne 3.

- Start eksperimentet med å flytte de store blykulene til posisjon 1 (mot anslag ved kammeret på den ene siden). Vent ca 2-3 minutter før dere starter å lese av posisjonen på skalaen. Les av hvert halve minutt i 30 minutter og noter resultatene fortløpende i tabellen.

MERK: Be læreren om hjelp hvis likevektspunktet til pendelen (mot formodning) ser ut til å drive til siden.

- Når alle data er fylt ut, lagre dataene i en txt-fil som 'S1data.txt' på hjemmekatalogen slik:
`>> dlmwrite('S1data.txt', S1data, '\t')`



Figur 7.5: Typisk forløp for amplitude sfa. tid for torsjonspendelen i et Cavendisheksperiment. Punktene er eksperimentelle data. Linjen er en tilpasset dempet harmonisk svingning. Dempningen ses som stiplede linjer som omhyller svingningen. Likevektspunktet, S_0 , perioden, T , og usikkerheten i likevektspunktet, ΔS , er estimert av tilpasningsrutinen i Matlab.

Nå er dataene lagret selv om du skulle finne på å skrive 'clear all' i kommandovinduet, eller finne på andre sprell.

Hvis du må laste inn de lagrede dataene, kan det gjøres med for eksempel:

```
>> S1data = dlmread('S1data.txt', '\t', 0, 0);
```

- Hvis dataene ser greie ut og fluktuerer rundt en likevektsposisjon kan du dreie de store kulene (forsiktig!) til posisjon nr. 2 (mot anslag ved kammeret på motsatt side). Nå vil torsjonspendelen begynne å svinge seg inn mot en ny likevektsposisjon.
- Lag en ny tabell S2data på samme måte som over og gjenta måleprosedyren på nytt for serie 2. Denne lagres nå som 'S2data'.

MERK: Selv om du bruker Matlab og lagrer resultatene på hjemmekatalogen din, skal journalen din inneholde diagrammene du genererer og henvisninger til elektronisk lager for primærresultatene.

Av dataene du har tatt opp skal du nå finne de to likevektspunktene S_1 og S_2 , og svingeperioden T .

På fagets hjemmeside, eller på skrivebordet på datamaskinen, skal det ligge en fil med navn P5MatLabCavendish.ZIP. Kopier den inn på hjemmekatalogen din, og i samme katalog som du endret til i 'Current Directory' i Matlab. Pakk ut filene som ligger der til den samme katalogen.

- Åpne fila `Gravitasjon.m` i Matlab og kjør den ved å trykke på RUN-knappen. Du vil da få generert et plott av resultatene.
- Åpne filene `RunCavendish.m` og `LesData.m`. Sjekk at du i den siste leser inn den fila du ønsker, for eksempel `S1data.txt`. Gå til `RunCavendish.m` og kjør denne fila ved å trykke RUN.
- Du vil nå få opp en figur som i figur 7.5. Hvis du kjørte fila med `S1data` vil den gi deg likevektspunktet S_1 og T for denne svingningen. Les inn og gjør det samme også for `S2data`.
- Mål avstanden L fra speil til meterstav med målebåndet, og anslå usikkerheten i L .
- Bestem M ved å veie begge kulene på vekten og ta et gjennomsnitt av de to. Bestem usikkerheten.
- Bestem tyngdepunktavstanden b fra liten til stor kule, og bestem usikkerheten i b .
MERK: Torsjonsvekten er justert slik at de små kulenes likevektsposisjon er midt i kammeret når begge de store kulene er fjernet. Siden de store kulene ligger til anslag mot kammeret i begge posisjoner kan avstanden b bestemmes ved å måle kulenes diametre og tykkelsen av kammeret.

7.5.4 Analyse av resultatene

- Beregn $S = |S_1 - S_2|$, og finn usikkerheten i denne.
- Bestem T og usikkerheten i denne ut fra de to svingningene.
- Senter-til-senter avstanden for de små kulene er oppgitt til å være $2r = 100,0$ mm. Hva tror dere usikkerheten er her utfra hva dere har lært om signifikante siffer?
- Beregn gravitasjonskonstanten G ved hjelp av ligning (7-14).
- Gjør usikkerhetsregning ved å bruke Gauss' feilforplantningslov på ligning (7-14), og bestem usikkerheten ΔG .
- Korriger G -verdien din mot den systematiske feilen. Bruk ligning (7-19). For å finne usikkerheten i korrigert G -verdi kan du anta at den relative feilen i G_{korr} er lik den relative feilen i ukorrigert G -verdi.
- Sjekk om tabellverdien for G ligger inne i ditt usikkerhetsintervall? Hvis ikke, hva kan være grunnen til dette?

7.5.5 Avslutning

- Kontroller at du har fullført alle journalføringer og lagret alle elektroniske resultater på hjemmekatalogen din.
- Slå av datamaskinen, rydd laboratorieplassen og forlat plassen i enda bedre orden enn da du fant den.

- Sett de store kulene midt i mellom posisjon 1 og 2.
- La laserlyset stå på – ellers vil det ta lang tid å stabilisere temperaturen i speilet og torsjonstråden for neste gruppe.
- Presenter resultatet ditt for læreren din.

7.6 Rapport fra Cavendisheksperimentet

Du skal skrive en rapport fra Cavendisheksperimentet sammen med din samarbeidspartner. Dere skal følge standardformatet som gjelder for skriving av rapport i laboratoriekurset og bruke tekstbehandlingsverktøyet LaTeX, slik som beskrevet i kapittel 8.

I journalen fra eksperimentet skal du ha gjort ferdig presentasjon av måleresultatene. Under rapportskrivingen bør du legge størst vekt på å øve deg i å skrive de kapitler av rapporten som du har forutsetninger til å skrive fullt ut, det vil si teori, metode og resultater. Dette innebærer at du også bør øve deg i å behandle resultater matematisk, vurdere regne- og målenøyaktighet, presentere måleresultatene i tabeller og diagrammer og dokumentere apparatur og metode ved hjelp av figurer.

Rapporten skal være enkel og disponeres på følgende måte:

- Sammendrag: Meget kort. Svar på: Hva gjorde dere? Hvordan ble det gjort? og Hva ble resultatet?
- Innledning: Kortfattet, kun noen linjer som sier hva rapporten beskriver.
- Teori og Metode: Gravitasjonsloven og kort introduksjon og definisjon av teoretiske begreper. Beskrivelse av apparaturopsettet og kort utledning av ligningen som vi bruker for å beregne G med. Skjematisk figur av apparaturopsettet.
- Resultater og diskusjon: Tabeller og kurvediagram av resultatene, analyse av kurvediagrammet og beregnet verdi for G med usikkerhet. Sammenlign dine resultater med tabellverdier. Diskuter feilkilder og vurder hvilke målinger som bidrar til feil. Foreslå eventuelle forbedringer i den eksperimentelle prosedyren på grunnlag av dette.
Eks: «Resultatene fra eksperimentet er vist i tabell 1. Figur 1 viser et plott av pendelamplituden sfa. tida ...»
- Konklusjon: Kortfattet oppsummering og konklusjon.

Se kapittel om rapportskriving med mer utfyllende informasjon om hva hver del skal inneholde.

Rapporten skrives så godt dere klarer, og leveres til gruppelæreren din. Han/hun vil så gi dere tilbakemelding på denne, med eventuelle utbedringer og rettinger. Dersom rapporten ikke blir godkjent, arbeider dere videre med rapporten, og leverer inn på nytt.

Kapittel 8

RAPPORTSKRIVING

Mål: Her vil dere lære mer om hvordan en skal skrive vitenskaplige rapporter og hvilke krav og føringer som hører til denne sjangeren. Dere skal også få trening i bruk av tekst-behandlingsverktøyet Latex som er et fremragende verktøy for skriving av dokumenter av matematisk-naturvitenskaplig art med mye bruk av matematiske symboler og kryssreferanser.

8.1 Skriving av rapport

8.1.1 Rapportering av resultater fra eksperimentelt arbeid

Alle som deltar i vitenskapelig og teknisk arbeid må i større eller mindre grad kunne utforme endelig skriftlig dokumentasjon av sine undersøkelser. Vitenskapelig arbeid dokumenteres i første omgang i form av en laboratoriejournal, men journalen er et primærdokument som vanligvis omhandler kun en del av en vitenskapelig eller teknisk undersøkelse og er utformet med sikte på en begrenset leserkrets. Den endelige dokumentasjonen av en undersøkelse er vanligvis i form av en rapport, en tidsskriftartikkel eller en bok som er utformet med sikte på en stor leserkrets. Denne er fullstendig og presenterer resultatene fra undersøkelsen i en større sammenheng enn journalen, mens journalen i større grad vil inneholde eksperimentelle detaljer.

Rapporter fra laboratorieundersøkelser bør inkludere all vesentlig informasjon fra journalen i redigert form. I tillegg bør bakgrunnen for at undersøkelsen ble satt i gang kommenteres. Det skal redegjøres for de teoretiske modeller som anvendes i tolkningen av resultatene, og resultater fra teoretiske beregninger bør sammenliknes med de målte verdiene. Resultater fra tidligere undersøkelser bør omtales og sammenliknes med de nye resultatene. Kvalitet, omfang og betydning av de nye resultatene må vurderes i forhold til tidligere resultater.

8.1.2 Skriveprosessen

Mange er usikre på hvor og hvordan de skal begynne å skrive en rapport. Følgende fremgangsmåte er inspirert av O'Connor og Woodford [4].

- Gjør ferdig behandlingen av måleresultatene.
 - Gjør ferdig alle beregninger.
 - Sett opp alle tabeller og skriv tabelltekstene.
 - Tegn alle diagrammer og figurer og skriv diagram- og figurtekstene.
- Kontroller omfanget av det grafiske materialet.
 - Ta de ferdige tabellene, diagrammene og figurene og spre dem ut foran deg som om de var bilder i en tegneserie.
 - Spør deg selv om «tegnserien» forteller historien din godt.

Dersom du synes at det mangler en tabell eller en figur og så videre, så bør du lage den. Hvis du finner unødvendige gjentakelser, ta dem vekk. Juster omfanget av det grafiske materialet inntil du synes at «tegnserien» forteller historien din godt.

- Trekk konklusjoner fra måleresultatene.

Ta deg god tid til å vurdere måleresultatene. Hvis du begynner å skrive før du er ferdig med behandlingen av måleresultatene og har trukket konklusjonene, skriver du egentlig ikke en rapport, men bruker skriveprosessen til å ordne tankene dine. En slik bruk av skriveprosessen er kan dog til tider være meget nyttig.
- Skriv et sammendrag i tre setninger. Første setning skal inneholde hva du gjorde, andre setning hvordan du gjorde det og tredje setning hva du fant.

Hvis du ikke kan skrive dette sammendraget vet du for lite om forholdene som du skal dokumentere.

- Sett opp en disposisjon for rapporten.

Det skal gode grunner til for å fravike den tradisjonelle disposisjon for naturvitenskapelige og tekniske rapporter som pleier å inneholde:

Sammendrag, innledning, teori, metode og apparatur, resultater, diskusjon og konklusjon.

- Skriv et utkast til hvert kapittel i stikkordsform og juster stikkordene og kapitteinndelingen til du synes at strukturen og logikken i presentasjonen er god. Hvis rapporten ikke blir veldig lang, kan man godt slå sammen kapitlene 'Teori og metode' (herunder også apparatur), og 'Resultater og diskusjon'.

Innledning. I innledningen skal du forklare hensikten med rapporten, definere omfanget, gi grunnene til at undersøkelsen ble satt i gang og hvor den ble utført. Du skal forklare hvordan undersøkelsen fortsatte fra beslektet tidligere arbeid og sette den inn i en historisk sammenheng, noe som gjerne krever et lite litteraturstudie.

Under skriving av rapporten til Cavendish-eksperimentet kan du godt bruke informasjon du finner i laboratorieheftet om eksperimentet. Finn ut hva som er spesielt med dette eksperimentet. Hvorfor er det egentlig vanskelig å finne G ? Hvilke utfordringer får vi da i det eksperimentelle oppsettet?

Teori og metode. Disse kapitlene kan strengt tatt skrives når som helst i skriveprosessen. Det er imidlertid mye som taler for å vente med endelig utforming av disse til etter at kapitlene om resultat, diskusjon og konklusjon er ferdigskrevet. Da kan du justere presentasjonen av teori og metode til innholdet av de påfølgende kapitler.

Hvis teorien som ligger til grunn for eksperimentet er omfattende og komplisert kan du skrive et eget teorikapittel. Imidlertid må forutsetningen da være at du enten har bidratt til teoriutviklingen eller at detaljert gjennomgang av teorien er essensiell for å forstå resultatene. I motsatt fall vil det være nok å referere til teorien og kun ta med de viktigste resultatene som da kan inkluderes i innledningen eller kapitlene om metode eller apparatur.

I rapporten dere skal skrive om måling av gravitasjonskraften kan du skrive metodekapitlet relativt fullstendig. Det er her greit å slå sammen teori og metode, fordi de henger så tett sammen. Teorien blir jo utviklet på bakgrunn av den målemetoden vi bruker. Husk å få med figurer av apparatuoppsettet og forklaring på hvordan det fungerer her.

Resultater. Dette kapitlet er sterkt knyttet til laboratoriejournalen fra eksperimentet. Hvis du har skrevet en god journal og fulgt anbefalinger om å gjøre alle tabeller og kurver ferdige under skriving av journalen, er resultatkapitlet lettskrevet. Prøv å gjøre det til et selvstendig kapittel. Presenter resultatene i logisk rekkefølge. Prøv også å legge resultatene frem slik at de resultater som leder til konklusjonen trer klart frem. Bruk tabeller og diagrammer og angi resultater fra eventuell feilanalyse av eksperimentet.

Resultatkapitlet er et av de kapitlene du kan øve deg i å skrive fullstendig og godt på grunnlag av resultater fra eksperimentene i dette og senere laboratoriekurs. Hvis diskusjonskapitlet vil bli litt magert kan det være en mulighet å kombinere resultatkapitlet og diskusjonskapitlet.

I rapporten fra gravitasjonskonstanten kan det være greit å slå sammen resultater og diskusjon til ett kapittel. Her må alle resultatene med, det vil si alle målinger (i tabell) og figurer av måledata i kurvediagram. (Ikke bruk tabell med rådata.) Inkluder også usikkerheter i de ulike måledataene i tabellen. Figurer av tilpassede funksjoner til måledata må være med her. (Lagre figuren du får frem i Matlab som .eps- eller .pdf-format, og inkluder i Latex-dokumentet.) Husk å begynne kapitlet med tekst, og bruk figurer som støtte til teksten du skriver. Alle figurer skal ha minst en referanse i teksten! Inkluder også usikkerhetsregning her, og presenter tydelig svaret du får for gravitasjonskonstanten med usikkerhet. Svar til slutt på følgende spørsmål: Er deres resultat rimelig i forhold til tabellverdi? Hva kan eventuelle avvik skyldes? Diskuter feilkildene og hvilke som bidrar mest. Finnes det andre feilkilder vi ikke har tatt hensyn til?

Diskusjon. Her er det konklusjonen av resultatene dine som skal diskuteres, og for å kunne diskutere dette må du sette de inn i en større sammenheng. Dette gjør du ved å relatere resultatene dine til tidligere utførte undersøkelser på samme område, og ved å forutsi de konsekvenser som resultatene av din undersøkelse medfører. Det kan derfor være lurt å skrive konklusjonen før diskusjonen.

Et av de gjennomgående delmålene i kurset er å skrive en rapport fra målinger av gravitasjonskraften. Din rapport vil ikke ha anledning til å ha en så omfattende diskusjon som kreves i en vitenskapelig rapport. Den diskusjonen du kan føre vil hovedsakelig innskrenke seg til å sammenlikne dine resultater med tabellverdier i lys av den målenøyaktighet du har oppnådd. Hvis det er uoverensstemmelser som kan føres tilbake til din måte å utføre eksperimentet på, bør du forklare grunnen til dette. Ikke spekulere vilt. Diskusjonen i rapporten din blir derfor meget kort og lettskreven. Kun noen få linjer. Den kan ofte med fordel flettes inn i resultatkapittelet.

Konklusjon. Konklusjonen er rapportens viktigste del. I konklusjonen legger du frem ditt egentlige faglige bidrag. Det er som regel formidlingen av dette bidraget som er hovedgrunnen til at du skriver rapporten. Konklusjonskapitlet bør ikke skrives før du har tenkt grundig over resultatene fra dine egne målinger og sammenlignbare målinger gjort av andre i lys av den teori du har valgt å tolke resultatene innenfor.

En god konklusjon er kort og presis, og presenterer kun hovedresultatet og konklusjonen fra diskusjonen. Eventuelt fremtidig arbeid kan også nevnes her.

8.2 Tekstbehandling med Latex

Latex er et typsettingssystem som vi skal bruke til å skrive rapporter. Dette er enerådende i matematikk- og fysikk-miljøet når det gjelder skriving av litt tunge (og svært tunge) matematiske tekster. Prinsippet er omtrent som skriving av html-kode: Det skrives et dokument i reint tekstformat med kommandoer som deretter kjøres gjennom en typesetter og dermed genererer et meget pent tekstbilde. (Teksten du leser her er skrevet i Latex.)

Latex finnes i form av ulike verktøy (for eksempel Texmaker, TeXnicCenter, LEd) på datamaskinene på laboratoriene og på studentenes datasaler. En mal for skriving av en rapport i Latex, ligger på nettsidene for emnet. Hjelp til skriving blir gitt av laboratorielæreren underveis. Ellers finnes fyldig introduksjon til skriving med Latex, på nettsider, den beste (med mange linker) på <http://www.pvv.ntnu.no/~berland/latex/>. I tillegg kan du søke opp og laste ned pdf-dokumentet *The not so short introduction to Latex* eller *Introduktion til Latex* (dansk) på nettet. Her finnes gode introduksjoner og mange tips.

Vi viser til avsnitt 8.3.5 for en kort introduksjon til skriving av matematiske uttrykk i Latex.

8.3 Metoder

Vi vil nå ta opp de mer detaljerte krav til bruk av tabeller, figurer, kurvediagrammer og matematiske uttrykk i en rapport. Her vil vi i alle disse tilfeller følge IOPP-standarden (The Institute of Physics Publishing). IOPP utgir over 30 europeiske fysikktidsskrifter. Standarden er en del av en omfattende standard for dokumentutlegg tilpasset tekstformatering med Latex og den er i sin helhet tilgjengelige på vevsadressen <http://iop.org/Journals/textstyle>.

8.3.1 Tabeller

Tabelltyper

Under skriving av rapporter er det hensiktsmessig å skille mellom to tabelltyper: (i) uformelle tabeller og (ii) formelle tabeller.

Uformelle tabeller har verken nummer eller forklaringstekst og er velegnet kun for små oppstillinger som du ikke skal referere til siden. I rapporter brukes ikke disse. Formelle tabeller må ha både tabellnummer og forklaringstekst og bør i dette kurset settes opp ifølge IOPP-standarden.

Tabell 8.1: Formell tabell ifølge standarden til IOPP. Legg merke til fraværet av vertikale linjer i tabellen. Kjente symboler, for eksempel « t » for tid, trenger ingen forklaring. « W », og «flow» – med dimensjon strømtetthet – bør derimot forklares.

| T (K) | t (s) | W (eV) | Flow (10^{-4} Wm^{-2}) |
|------------|------------|-------------|---------------------------------------|
| 123,4 | 0,00 | 23,23 | 11,4 |
| 432,1 | 9,54 | 24,87 | 21,3 |
| 521,9 | 21,10 | 25,94 | 35,2 |
| 644,5 | 28,59 | 31,01 | 45,8 |
| 745,6 | 33,45 | 33,28 | 66,9 |

IOPP-standarden for oppsetting av tabeller og tabelloverskrifter

- Tabellteksten skal plasseres over tabellen og avsluttes med et punktum.
- Tabellteksten skal settes med en annen type og/eller mindre type enn hovedteksten.
- Tekst i kolonner og kolonneoverskrifter bør være venstrejusterte.
- Tabeller skal kun ha horisontale skillelinjer.
- Tall i tallkolonner skal justeres slik at desimalkommaene flukter vertikalt.

Persepsjonsundersøkelser viser at øyet har lettest for å sammenlikne tall eller tekst som står på ei horisontal linje. Gode tabeller settes derfor opp slik at de tabellelementer (for eksempel tall) som skal sammenliknes står på samme horisontale linje. La desimalkommaene flukte vertikalt og avslutt tabellen med ei horisontal linje nederst. På norsk brukes komma for desimalskilte, i engelsk litteratur brukes punktum.

For unngå å forstyrre sammenligning av tabellelementer langs horisontalretningen skal vertikale skillelinjer mellom tabellkolonner unngås. Kolonnene adskilles som regel godt nok fra hverandre ved hjelp av et passende mellomrom.

Gjør det til en vane å legge deg opp til denne standarden når du lager tabeller i journalen manuelt. Da slipper du å legge om tabellformatet når tabellen skal inkluderes i en rapport.

Til slutt gis et anbefalt eksempel på hvordan man setter opp en tabell i Latex. Det følgende er kildeteksten til tabell 8.1.

```
\begin{table}[h]
\caption{\sf Formell tabell ifølge standarden til The Institute of Physics.
Legg merke til fraværet av vertikale linjer i tabellen. Kjente symboler,
for eksempel ‘‘$t$’’ for tid, trenger ingen forklaring. ‘‘$W$’’, og
’’flow’’ -- med dimensjon strømtetthet -- bør derimot forklares.}
\begin{center}
\begin{tabular}{lr@{,}lll}
\hline
$T$ & \multicolumn{2}{l} {$t$} & $W$ & Flow & \\
(K) & \multicolumn{2}{l} {(s)} & (eV) & ($10^{-4}$ \rm; Wm^{-2}$) & \\
\hline
123,4 & 0&00 & 23,23 & 11,4 & \\
432,1 & 9&54 & 24,87 & 21,3 & \\
521,9 & 21&10 & 25,94 & 35,2 & \\
644,5 & 28&59 & 31,01 & 45,8 & \\
745,6 & 33&45 & 33,28 & 66,9 & \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\label{rapport.tabelleksempel}
\end{table}
```

(Kommentarer: Tabellnummeret legger Latex automatisk inn i starten av tabellteksten. Tabellen sentreres og får merkelapp `rapport.tabelleksempel` som kan refereres til ved å skrive `\ref{rapport.tabelleksempel}`. Kommandoen `@{,}` bytter ut kolonneseparatoren med komma, dette gjør at man får tallkolonnene justert etter desimalskillet. Merk at det da benyttes to kolonner til å skrive ett tall (gjelder kolonne to).)

8.3.2 Figurer

Figurtyper

Under skriving av rapport er det hensiktsmessig å skille mellom tre figurtyper:

(i) kurvedigrammer, (ii) prinsippskisser og (iii) fotografier.

Kurvedigrammer brukes for å vise sammenhenger mellom fysiske størrelser. Prinsippskisser brukes for å forklare sammensetning og virkemåte for apparatuoppstillinger. Vi skal i dette avsnittet hovedsakelig kommentere tegning av prinsippskisser. De samme retningslinjer gjelder også for kurvedigrammer, som blir beskrevet i neste avsnitt.

Den gode figuren

Gode figurer skal være enkle ved at de begrenses til de forhold du hovedsakelig ønsker å illustrere. De skal være klare ved at du bruker skarpe konturer, markere symmetriakser vha. strek–punkt linjer (senterlinjer), markere snitt ved skraving, tydelige målgrenselinjer og tydelige mållinjer med pilspisser og måltall.

Figurer av mekaniske instrumentoppstillinger skal vise alle relevante romlige dimensjoner. Vis tallverdier for romlige dimensjoner med mållinjer og måltall eller angi figurens målestokk. Figurer av elektriske instrumentoppstillinger skal vise komponentverdier og betegnelser på komponenter og instrumenter.

Figurteksten skal plasseres under figuren og avsluttes med et punktum. Den skrives med litt avvikende font (gjørne litt mindre font) enn hovedteksten og rykkes litt inn.

Ved bruk av LaTeX, tas dette vare på ved å ta modell av for eksempel følgende format:

```
\begin{figure}[h]
\begin{center}
\includegraphics[width=0.45\textwidth]{figur1.eps}
\end{center}
\caption{\sf Her skrives figurteksten, som blir i font sans serif.}
\label{rapport.fig.1}
\end{figure}
```

(Kommentarer: Figurnummeret legger LaTeX automatisk inn i starten av figurteksten. Figuren sentreres og hentes inn fra fila `figur1.eps`.)

Tegning av figurer

Figurer kan tegnes manuelt, men for innsending til tidsskrift må det brukes et datamaskinbasert tegneprogram.

8.3.3 Kurvedigrammer

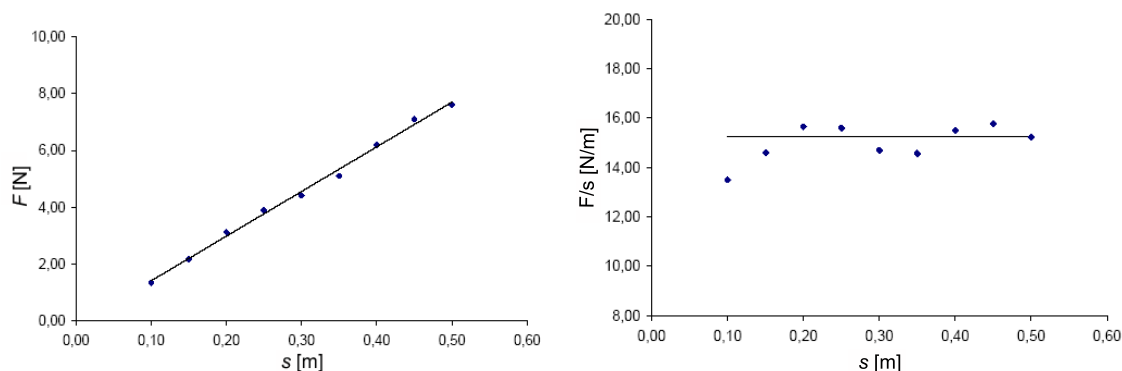
Et kurvedigram er en figur som viser en grafisk fremstilling av avhengigheten til en størrelse (den avhengige variabelen) av en annen størrelse (den uavhengige variabelen). Det er en konvensjon å sette kurvedigrammer opp slik at den uavhengige variabelen legges langs den horisontale akse og den avhengige variabel legges langs den vertikale akse. Kurvedigrammer brukes (i) som visuelle hjelpemidler, (ii) for grafisk bestemmelse av tallverdier og (iii) for å fremstille empiriske relasjoner.

Valg av variabler Før du setter opp et kurvedigram bør du tenke grundig over hvilke størrelser det er mest hensiktsmessig å velge som variable langs aksene. Du bør velge størrelsene slik at (i) diagrammet viser klart de variasjoner eller avvik som du vil demonstrere,

(ii) følsomheten i de variasjoner eller avvik som du vil demonstrere blir størst mulig og (iii) kurven fortrinnsvis blir ei rett linje.

For å sammenlikne eksperimentelle og teoretiske verdier kan du enten plote to kurver i samme diagram hvor den ene viser de eksperimentelle verdiene og den andre de teoretiske, eller plote en kurve over differansen mellom de eksperimentelle og de teoretiske verdiene. Den sistnevnte måten er å foretrekke når differansen er liten i forhold til skalainndelingen på diagrammet.

For å undersøke om en variabel y varierer lineært med en variabel x vil det være mer følsomt å plote forholdet y/x sfa. x enn å plote y alene som funksjon av x , som vist i figur 8.1.



Figur 8.1: Når en størrelse, her kraft F , er forventet proporsjonal med en annen størrelse, her lengde s , vil et plott av forholdet F/s være mer følsomt for å vise avvik fra proporsjonalitet enn et plott av F direkte. Merk også angivelse av størrelser og enheter langs aksene.

Diagrammer som fremstiller lineære sammenhenger har mange fordeler. Det er lett å tegne den teoretiske kurven inn i skaren av målepunkter, det finnes gode matematiske metoder for å legge den «beste» linjen inn i en slik punktskare og det er lett å bestemme tallverdier grafisk fra kurven. Det finnes to måter å sette opp kurvediagrammer slik at kurven blir ei rett linje. Du kan enten (i) velge størrelsene langs aksene slik at kurven blir lineær eller (ii) velge skalainndelingen langs aksene slik at kurven blir lineær.

Et eksempel på linearisering ved å velge hensiktsmessige størrelser langs aksene er vist i figur 2.1 på side 7.

Det er vanlig å bruke logaritmisk skalainndeling for å linearisere potensfunksjoner langs en eller to akser. Skalainndelingen på aksene er da ordnet slik at avstanden fra origo til en bestemt skalastrek er lik logaritmen av den verdi som skalastreken representerer. Ved å bruke logaritmisk skalainndeling på den ene aksene og lineær på den andre kan eksponentielle sammenhenger av formen $y = a \exp(bx)$ lineariseres og konstantene a og b bestemmes som henholdsvis skjæringspunktet med aksene og stigningstallet på kurven. Ved å bruke logaritmisk skalainndeling på begge akser kan uttrykk av formen $y = ax^p$ lineariseres og konstantene a og p bestemmes som henholdsvis skjæringspunktet med aksene og stigningstallet på kurven.

I tillegg til linearisering av kurver brukes logaritmisk skalainndeling (i) for å redusere størrelsen av kurvediagrammer, uten at avlesningsnøyaktigheten reduseres når tallverdiene på måltallene langs aksene varierer over mange tierpotenser, eller (ii) når man ønsker diagrammer

hvor tilnærmet konstant avlesningsfeil ønskes over hele diagrammet.

Valg av målestokk og enheter Velg målestokk slik at:

- Diagram, akser og påskrift får god plass innenfor kurvearkets ramme.
- Tegneusikkerheten til punktene i diagrammet blir minst mulig i forhold til måleusikkerheten i de verdier som punktene representerer.
- Origo er inkludert i diagrammet hvis du vet (for eksempel fra teori) at kurven skal gå i gjennom origo.
- relativ avlesnings- og plottenøyaktighet langs aksene i gjennomsnitt blir omtrent like.

Mest mulig lik avlesnings- og plottenøyaktighet langs begge aksene oppnår du ved å velge målestokken slik at kurvens gjennomsnittsstigningstall blir nær 1.

Påskriften langs aksene skal inneholde navn eller symbol for den størrelse som varierer langs aksene samt enhet for denne. Anbefalt standard er *størrelse* [enhet], for eksempel F [mN]. I enheten bør du velge enhetsprefiks slik at måltallenes tallverdi blir mellom 0,1 og 1000. Marker ikke mer enn ca. fem måltall langs aksene.

Valg av antall kurver og målepunkter i et diagram

Tegn kun få kurver i hvert diagram. Forskjellige symboler kan brukes til å skille eksperimentelle punkter tatt opp under forskjellige betingelser. Vær imidlertid forsiktig med dette. Diagrammer hvor det blir tegnet mange kurver adskilt ved bruk av alt for mange forskjellige symboler blir fort uklare.

Ved diagram som fremstiller målepunkter, skal en fortrinnsvis unngå å bruke trendlinjer eller sammenføye målepunktene med kurver. Dette kan unntaksvis brukes for å tydeliggjøre de fysiske resultatene, men det skal da spesifiseres i figurteksten at kurvene ikke representerer faktiske målinger. For kurver som viser beregnede verdier skal du legge kurven gjennom de beregnede punktene og undertrykke markeringen av punktene.

Når du samler inn måleresultater bør du ta tettere med avlesninger når kurven forandrer stigning og når den krysser ei anna linje og krysningspunktet skal bestemmes fra diagrammet. For å oppnå en fornuftig avlesningstetthet er det nyttig å plote måleresultatene i et diagram etter hvert som målingene foretas.

Diagramtekst og -nummerering

Nummereringen av diagrammer skal innordnes i nummerrekken for figurer. Diagramteksten skal derfor også følge samme regler som for figurer, som gitt ovenfor.

8.3.4 Matematiske uttrykk

Plassering

Matematiske uttrykk kan plasseres fortløpende i tekstlinja eller frittstående på ei egen linje. Større matematiske uttrykk og uttrykk som inneholder viktig informasjon bør plasseres frittstående. Matematiske uttrykk som det refereres til i teksten må plasseres frittstående og gis fortløpende nummerering.

Plasser et frittstående matematiske uttrykk slik:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \alpha \Delta T. \quad (8-1)$$

Referer til uttrykket på følgende måte: Fra ligning (8-1) kan vi beregne

Det gode uttrykket

Gode matematiske uttrykk er klare og strukturerte. Det skal skilles godt mellom bokstaver og symboler som likner på hverandre. Indekser oppe og nede er korrekt plassert. Indeksering av indekser unngås. Parenteser brukes for å avgrense uttrykk som skal stå i nevner til brøk eller skal heves opp i en potens. Indekser oppe bør omslutes av en parentes for ikke å forveksle med potensering, for eksempel $v_{\max}^{(1)}, v_{\max}^{(2)}$.

Generelt kan man si at hvis man følger IOPP-standarden for matematiske uttrykk vil krav til klarhet og god struktur være ivarettatt:

- For enkle brøker i teksten foretrekkes skrå brøkestrek fremfor horisontal brøkestrek.
- For frittstående uttrykk foretrekkes horisontal brøkestrek.
- Konstruksjonen $(\dots)^{-1}$ foretrekkes fremfor bruk av skrå brøkestrek som $1/(\dots)$.
- For å unngå forveksling brukes parenteser i følgende rekkefølge $\{[(...)]\}$.
- Kursive typer («italic») brukes alltid for fysiske variabler i matematiske uttrykk.
- I matematiske uttrykk brukes dog antikva typer («roman») for differensialtegnet «d» eksponentialfunksjonen «e», den imaginære enheten $i = \sqrt{-1}$ og for å betegne funksjoner som sin, cos, tan, arctan, ln, exp og så videre.
- Alle enheter skrives i antikva type (ikke kursiv).
- Indekser oppe og nede skrives med antikva når de er merkelapper og med kursiv når de er variabler.
- Eksponentialfunksjonen skrives som $\exp(\dots)$ eller $\exp\{\dots\}$ unntatt når $\{\dots\}$ er et enkelt symbol da formen e^x kan brukes.

- Uttrykkene \ln og \lg brukes for henholdsvis \log_e og \log_{10} .
- Frittstående uttrykk gis enten en egen ligningsmarg eller sentreres.
- Frittstående uttrykk nummereres på høyre side i parentes.

8.3.5 Oppsetting av matematiske uttrykk med Latex,

Ved bruk av Latex, tas det automatisk vare på mange av kravene ovenfor:

- Alle matematiske uttrykk og enkeltsymboler brukt i tekstlinjer omsluttet med $\$ \dots \$$.
- Frittstående ligninger omsluttet av:
 $\backslash\text{begin}\{\text{equation*}\} \dots \backslash\text{end}\{\text{equation*}\}$ (uten nummerering)
 $\backslash\text{begin}\{\text{equation}\} \dots \backslash\text{end}\{\text{equation}\}$ (med nummerering)
 og alle symboler vil da bli gitt kursiv type.
 Når enheter inngår innenfor disse ligningene settes de til antikva ved for eksempel:
 $\{\backslash\text{rm Nm}^{-2}\}$.
- Funksjonsnavnene \sin , \cos , \tan , og så videre, blir satt i rett opprett type når de i Latex, kodes som:
 $\backslash\text{sin}$, $\backslash\text{cos}$, $\backslash\text{tan}$, for eksempel: $\$y(x) = \backslash\text{sin } x/2 \$$ gir $y(x) = \sin x/2$.

Kapittel 9

ROTASJONSBEVEGELSE, DREIEMOMENT OG SPINN

Mål: Hensikten med oppgaven er å bli kjent med begrepene vinkelhastighet og vinkelakselerasjon og lovene for rotasjonsbevegelse om en fast akse.

9.1 Teori

I dette eksperimentet skal lovene om rotasjonsbevegelse undersøkes gjennom tre delforsøk. I det første forsøket skal vi undersøke vinkelakselerasjonen ved konstant ytre moment, i det andre forsøket skal vi undersøke spinnbevarelse mellom to roterende skiver mens det siste forsøket går ut på å undersøke spinnbevarelse under sammenstøt av en kule og en roterende skive.

9.1.1 Treghetsmoment

Treghetsmomentet til et stivt legeme er definert som (se også ligning (5-7))

$$I = \int_{\text{legeme}} r^2 dm, \quad (9-1)$$

altså en sum over alle infinitesimale masseelement dm som legemet består av, der r avstanden fra masseelementet til rotasjonsaksen.

Av ligning (9-1) ser vi at treghetsmomentet til en punktmasse m i avstand r fra rotasjonsaksen er

$$I = mr^2. \quad (9-2)$$

For en uniform skive med masse M og radius R og rotasjonsakse i sentrum av skiva blir treghetsmomentet

$$I = \frac{1}{2}MR^2. \quad (9-3)$$

For en homogen stav med lengde L og masse M som roterer rundt massemidtpunktet (sentrum av staven), blir treghetsmomentet

$$I = \frac{1}{12}ML^2. \quad (9-4)$$

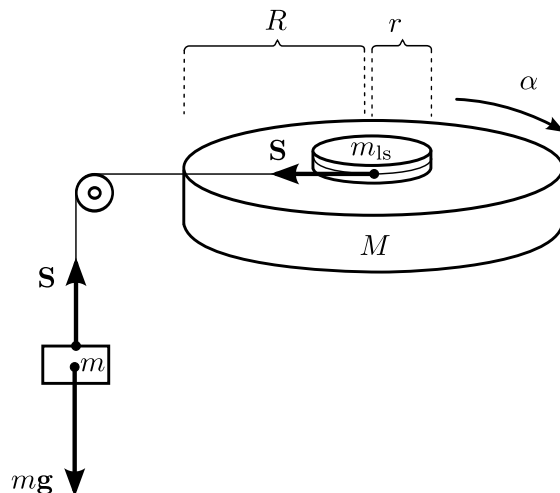
Treghetsmomentet om sentrum til en kule med uniformt fordelt masse m og radius r er

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \quad (9-5)$$

Dersom vi skulle ha en roterende legeme som består av flere enkle geometrier, kan vi dele opp integralet i ligning (9-1) til en sum over treghetsmomentene til de enkle geometriene hver for seg. Dette vil vi ha nytte av i dette eksperimentet.

9.1.2 Eksperiment 1: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre moment

Oppsettet som brukes er vist i figur 9.1. En skive settes i rotasjon ved at den utsettes for et konstant ytre moment. Skiva beveger seg tilnærmet friksjonsfritt på en luftstrøm som tilføres under skiva. På toppen av skiva er det fastmontert en annen liten skive som holder en tråd forbundet med en fallende masse m . Tråden beveger seg tilnærmet friksjonsløst over en trinse.



Figur 9.1: Dreieskive med konstant ytre moment. En fallende masse er forbundet med den roterende skiva ved hjelp av en tråd som ruller på en trinse og overfører et moment på den roterende skiva.

Bevegelsen til den fallende massen, som skaper det ytre momentet til skiva, er bestemt av Newtons 2. lov. Den sier at summen av de ytre kreftene (tyngdekraften og snorkraften) på dette systemet er lik massen til legemet multiplisert med akselerasjonen a ,

$$mg - S = ma, \quad (9-6)$$

hvor S er strekkraften i tråden og g tyngdens akselerasjon.

Rotasjonen til skiva er bestemt av spinnligningen, som sier at dreiemomentet τ på skiva er lik produktet av treghetsmomentet I og vinkelakselerasjonen α ,¹

$$\tau = Sr = I\alpha, \quad (9-7)$$

hvor r er radius til angrepspunktet for strekkraften. Her har vi antatt at \mathbf{S} og \mathbf{r} står vinkelrett på hverandre. Hvis dette ikke er tilfellet, er $\tau = Sr \sin \varphi$, hvor φ er vinkelen mellom \mathbf{S} og \mathbf{r} .

Den fallende massen og den lille skiva er forbundet med en tråd, slik at dersom det fallende legemet beveger seg en distanse x vil den ytre diameteren på skiva bevege seg en tilsvarende distanse. Det vil si at

$$x = r\theta, \quad (9-8)$$

der θ er vinkelen som skiva har rotert, målt i radianer. Denne relasjonen kalles rullebetingelsen. Dobbeltderivasjon med hensyn på tiden t (husk at r er konstant) gir følgende relasjon mellom akselerasjonen til den fallende massen og vinkelakselerasjonen til den roterende skiva,

$$a = r\alpha. \quad (9-9)$$

Ligningene (9-9) og (9-7) innsatt i (9-6) gir

$$mr\alpha = mg - \frac{I\alpha}{r}, \quad (9-10)$$

som kan løses for vinkelakselerasjonen,

$$\alpha = \frac{mgr}{mr^2 + I}. \quad (9-11)$$

Merk at treghetsmomentet I her er summen av treghetsmomentet til både den lille og den store skiva,

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}m_{\text{ls}}r^2, \quad (9-12)$$

der M og R er henholdsvis massen og radius til den store skiva, og m_{ls} og r er henholdsvis massen og radius til den lille skiva, der radien samsvarer med angrepspunktet til snorkraften. Innsatt i ligning (9-11) blir vinkelakselerasjonen

$$\alpha = \frac{mgr}{(m + \frac{1}{2}m_{\text{ls}})r^2 + \frac{1}{2}MR^2}, \quad (9-13)$$

der alle størrelsene som inngår er lett målbare. Når det første leddet i nevneren er lite i forhold til det andre, kan dette neglisjeres, og det endelige uttrykket for vinkelakselerasjonen blir

$$\alpha = \frac{2mgr}{MR^2}. \quad (9-14)$$

Her kan en se at vinkelakselerasjonen øker proporsjonalt med m og r og omvendt proporsjonalt med treghetsmomentet til den store skiva.

¹Se kapittel 5.1.1 for utledning.

9.1.3 Eksperiment 2: Bevaring av spinn

Spinnet til et legeme som roterer om en fast akse med vinkelhastighet ω er

$$L = I\omega. \quad (9-15)$$

Dersom det ikke virker noe ytre moment på systemet er spinnet bevart. I eksperimentet skal vi la to skiver med treghetsmoment I_1 og I_2 rotere uavhengig med forskjellig vinkelhastighet ω_1 og ω_2 . Vi skal deretter la disse skivene falle sammen, slik at de etter sammenstøtet roterer med samme vinkelhastighet, ω . Dersom en antar spinnbevarelse må spinnet før og etter sammenstøtet være det samme,

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega. \quad (9-16)$$

Løser vi ligningen for ω får vi

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}. \quad (9-17)$$

Her er alle treghetsmomentene gitt ved ligning (9-3) for den aktuelle skiva. Vi gjør nå en antagelse om at treghetsmomentene til de to skivene er like, $I_1 = I_2$. Vi får da at vinkelhastigheten til systemet etter sammenstøtet simpelthen er gjennomsnittet av vinkelhastighetene til de to skivene før sammenstøtet,

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (9-18)$$

I dette forsøket skal vi også undersøke energien til systemet før og etter sammenstøtet. Vi må da undersøke den kinetiske energien til et roterende legeme som kalles rotasjonsenergi, og er gitt ved

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (9-19)$$

9.1.4 Eksperiment 3: Bevaring av spinn

En enkel skisse av systemet som skal undersøkes er vist i figur 9.2. En kule med masse m hastighet v føres til et sammenstøt mot en roterbar skive som i utgangspunktet står stille. Etter sammenstøtet vil kulen og skiva utgjøre en enhet med treghetsmoment I og rotere med vinkelhastighet ω .

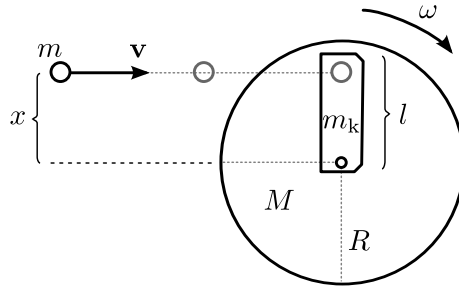
Før sammenstøtet står skiva stille og spinnets er gitt av kulens bevegelsesmengde og dens posisjon i forhold til rotasjonsaksen,

$$\mathbf{L}_{\text{fr}} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (9-20)$$

Her er \mathbf{v} kulens hastighetsvektor og \mathbf{r} er kulens posisjon i forhold til rotasjonsaksen. Spinnet størrelse før kollisjonen kan fra dette skrives

$$L_{\text{fr}} = xmv, \quad (9-21)$$

der x er avstanden som kulen har fra rotasjonsaksen når kulen er på det punktet i banen der \mathbf{v} og \mathbf{r} står vinkelrett på hverandre.



Figur 9.2: Analyse av støtprosessen. En kule i fart fanges av en stillestående roterende skive slik at kula og skiva roterer med samme hastighet etter sammenstøtet.

Vi antar nå at kula fanges av kulefangeren i dette punktet. Spinnet til systemet etter dette er kun gitt av rotasjonsbevegelsen til skiva med kula,

$$L_{\text{etter}} = I\omega. \quad (9-22)$$

Dermed blir vinkelhastigheten til samlet system etter støtet,

$$\omega = \frac{xmv}{I}. \quad (9-23)$$

Trehetsmomentet til samlet system kan finnes ved å betrakte legemet som et system bestående av 3 deler, skive, kulefanger og kule,

$$I = I_{\text{skive}} + I_{\text{kulefanger}} + I_{\text{kule}}. \quad (9-24)$$

Trehetsmomentet til skiva er gitt av ligning (9-3) mens trehetsmomentet til kula kan finnes ved å betrakte denne som en punktmasse med radius x til rotasjonsaksen (se ligning (9-2)), $I_{\text{kule}} = mx^2$. Kulefangeren kan tilnærmes til en stav som roterer om endepunktet sitt. Da er trehetsmomentet gitt ved ligning (5-13), der I_{CM} er gitt ved ligning (9-4),

$$I_{\text{kulefanger}} = \frac{1}{12}m_k l^2 + m_k \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_k l^2. \quad (9-25)$$

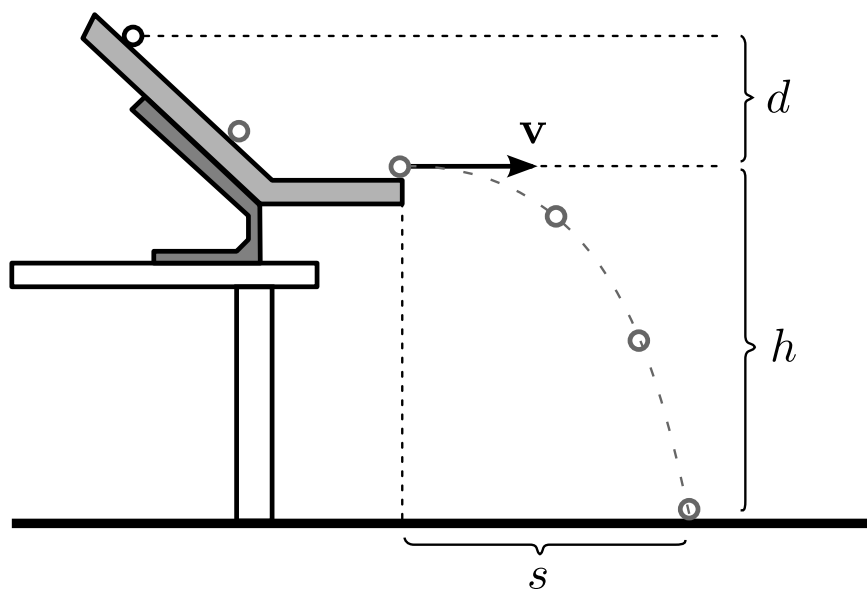
Her er m_k og l henholdsvis massen og lengden til kulefangeren. Innsatt i (9-23) får vi nå

$$\omega = \frac{xmv}{\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}m_k l^2 + mx^2}. \quad (9-26)$$

Dersom man betrakter de to siste leddene i nevneren som små i forhold til det første, ser en at vinkelhastigheten øker proporsjonalt med spinnet.

Kulens hastighet v kommer av at kula slippes nedover et skråplan, som etterfølges av en horisontal bane inn mot kulefangeren. Kulens hastighet kan måles på følgende måte: Slipp kula fra et fast punkt på skråplanet som vist i figur 9.3. Mål avstandene s og h . Den horisontale hastigheten er da

$$v = \frac{s}{t}, \quad \text{der} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{gir} \quad v = s\sqrt{\frac{g}{2h}}. \quad (9-27)$$



Figur 9.3: Måling av kulens horisontale hastighet. Kulen slippes fra rampen og hastigheten kan finnes ved å måle vertikal og horisontal avstand for fallbevegelsen.

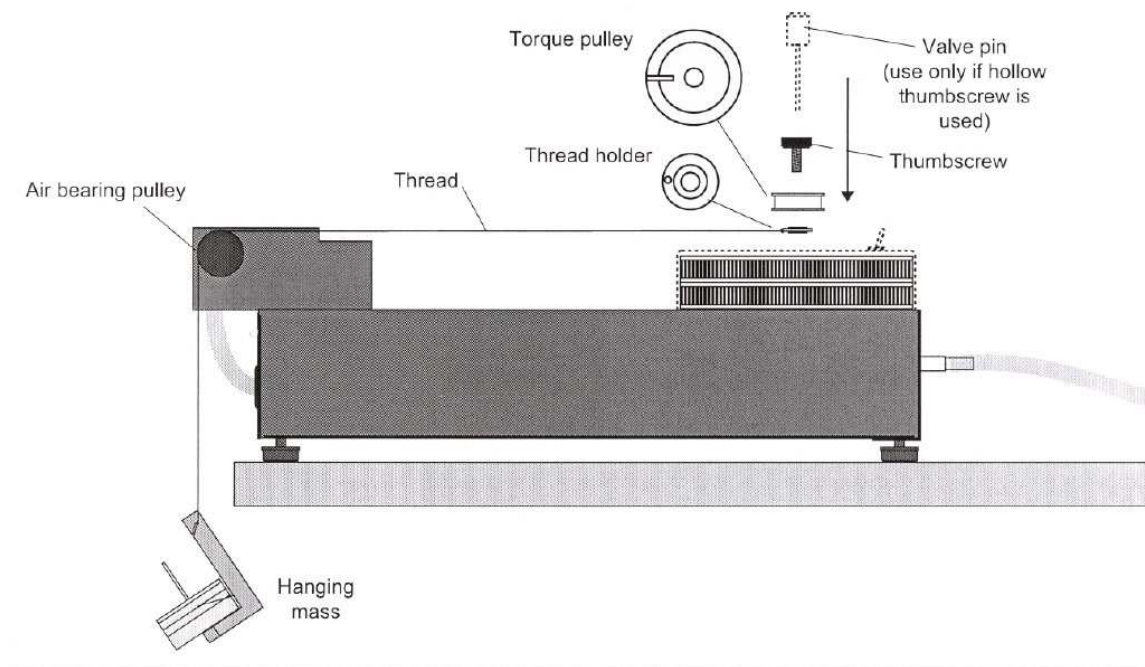
9.2 Eksperimentell gjennomføring

9.2.1 Roterende skiver og luftputebanen

I figur 9.4 vises det eksperimentelle oppsettet som er sentrum for undersøkelsene i denne oppgaven. De mest sentrale elementene er de to dreieskivene som kan flyte tilnærmet friksjonsløst mot hverandre og mot underlaget på grunn av at en luftstrøm under trykk kan presses ut mellom de to skivene og mellom den nederste skiva og underlaget.

- Ikke roter skivene uten at lufttrykket er på.
- Sjekk at instrumentet er i vater ved å bruke dåselibellen² på apparaturen. Juster føttene ved behov.
- Dere skal nå åpne for luftstrømmen ved bruk av veggmontert håndtak. Det er også en ventil montert på apparaturen med lufttrykksmåler. Bruk denne til å kontrollere at lufttrykket til skivene er $4,8 - 7,0 \cdot 10^4$ pascal ($7 - 10$ psi; pounds per square inch).
- Skivene skal nå kunne rotere tilnærmet friksjonsløst. Kontroller bruken av de to lukkepinnene slik at:
 - Begge skiver roterer fritt i forhold til hverandre og underlaget.
 - Øverste skive roterer fritt, nederste skive ligger fast på underlaget.
 - Øverste skive ligger fast på nederste skive, som sammen roterer i forhold til underlaget.

²En dåselibelle er et rundt væskefylt kammer med luftboble som kan brukes til å se om en flate er vannrett i begge retninger samtidig (i motsetning til et vanlig vater som kun kan sjekke en retning om gangen). Dåselibellens toppflate er svakt kuleformet, slik at luftboblen vil plasseres sentrert innenfor sirkelmerket dersom flaten er vannrett.



Figur 9.4: Figur av det eksperimentelle utstyret som brukes under det første eksperimentet: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre moment.

9.2.2 Oppsett av Pasco DataStudio og kalibrering av sensor

Dere skal nå sette opp Pasco DataStudio slik at dere er klare for å måle. En grunnleggende innføring til systemet finnes i kapittel 3.3. DataStudio kontrollerer målingene av rotasjonsbevegelse til de to skivene ved hjelp av en fotodiode. På periferien av skivene er det 200 parallelle lyse og mørke striper, hver med tykkelse l (1 mm). En lysstråle sendes inn på periferien og blir reflektert til fotodioden, som gir høyt signal når den reflekteres fra den lyse stripen og lavt signal fra den mørke stripen. Signalet fra fotodioden er koblet til en teller, slik at samlet antall lyse og mørke streker N som dioden har passert blir registrert. Vinkelen θ blir regnet ut som

$$\theta = \frac{\text{buen}}{\text{radien}} = \frac{Nl}{R}. \quad (9-28)$$

- Husk å lagre alt du gjør i DataStudio på hjemmeområdet ditt med jevne mellomrom.
- Koble til to sensorer for rotasjonsmålinger «Rotational Dynamics Apparatus» (en for hver skive).
- Sett målefrekvensen til 2 Hz.
- Start målingen og sjekk at når du manuelt roterer en skive 360° får du denne avlesningen. Merk at sensoren registrerer kun endring av vinkelposisjonen, ikke retning. Det vil si at uansett hvilken retning du roterer skivene vil du få at vinkelen øker i DataStudio.

9.2.3 Eksperiment 1: Rotasjonsbevegelse ved konstant ytre moment

Nå skal dere måle vinkelakselerasjonen til en sirkulær skive under påvirkning av et konstant ytre moment, og se om det stemmer med teorien som ble utledet i kapittel 9.1.2.

- Monter opp loddet med bruk av tråden og lille skiva, og plasser tråden over trinsen. Plasser lukkepinne slik at den nederste skiva ligger på underlaget, mens den øverste roterer fritt.
- Sett systemet igang til å svinge, og start målingen i DataStudio. Se på målingene av vinkelakselerasjonen fortløpende mens DataStudio registrerer målingene. Pass på at utslaget til systemets svingninger er såpass store at dere får minimum 5 målepunkter med noenlunde konstant akselerasjon ved hvert utslag. Når dere er fornøyd med utslaget bør dere ta i hvert fall 3 til 4 perioder med målinger før dere stopper målingene.
- For å finne en målverdi for akselerasjonen kan dere bruke statistikkfunksjonen i DataStudio. Ta for dere området der akselerasjonen er rimelig konstant i et utslag og finn middelerdien til et visst antall målepunkter for dette utslaget. Gjenta prosessen for 4-6 utslag, like mange positive som negative. Pass på at dere tar med like mange målepunkter i hvert utslag.³
- Som målverdi for akselerasjonen α kan dere nå finne middelerdien til disse 4-6 middelerdiene for utslagene, og som målefeil kan dere bruke standardfeilen.
- Finn nå vinkelakselerasjonen α som dere skulle fått ved bruk av det teoretiske uttrykket (9-14). Det vil si at dere må måle alle størrelser som inngår på høyre side i ligning (9-14) og anslå feil i alle disse. Regn ut α og finn $\Delta\alpha$ ved bruk av Gauss' feilforplantningslov.
- Sammenlign de to verdiene på α og diskuter, særlig med tanke på feilkilder.

9.2.4 Eksperiment 2: Bevaring av spinn

To skiver kan rotere friksjonsløst og uavhengig av hverandre ved hjelp av luftputer. Luften som strømmer mellom skivene kan stenges av slik at de faller sammen og beveger seg som et legeme. Dere skal nå kontrollere om spinnets bevarer ved dette sammenstøtet, se teorien i kapittel 9.1.3.

- Plasser lukkepinnene slik at begge skivene roterer tilnærmet uavhengig av hverandre og av underlaget.
- Start måling av vinkelhastighet for begge skivene i DataStudio, og sett begge skivene i rotasjon med tydelig ulik rotasjonshastighet.
- Dra ut lukkepinne slik at luftstrømmen mellom skivene faller bort. Skivene vil da falle sammen og rotere med samme vinkelhastighet.

³Dersom dere har ulikt antall målepunkter i noen av utslagene, vil målverdiene i utslagene med få målepunkt vektet høyere enn målverdiene i utslagene med flere målepunkt. I dette forsøket har dere ikke grunnlag for å vekte noen målepunkt mer enn andre.

- Avslutt målingene når skivene har rotert sammen i noen sekunder.
- Finn vinkelhastigheten til begge skivene før og etter kollisjonen (ω_1 , ω_2 og ω) og finn fornuftige verdier for feilen i disse størrelsene. Diskuter gjerne med veileder.
- Finn ω ved bruk av det teoretiske uttrykket i ligning (9-18). Finn $\Delta\omega$ ved bruk av Gauss' feilforplantningslov.
- Sammenlign ω funnet eksperimentelt og ved bruk av ligning (9-18), og diskuter.
- Bruk ligning (9-19) og finn mekanisk energi før og etter sammenstøtet. Er den mekaniske energien bevart?

9.2.5 Eksperiment 3: Bevaring av spinn

I det *siste eksperimentet* vil en studere bevaring av spinn og bevegelsesmengde ved en kollisjon. Den øverste skiva, som beveger seg friksjonsfritt og har en fastmontert kulefanger, treffes av en kule med fart. Etter støtet mot fangeren blir kulen en del det roterende systemet. En vil undersøke om kulens spinn før støtet er like stort som systemets spinn etterpå.

- Monter opp kulefangeren på den øverste skiva og plasser lukkepinne slik at den øverste skiva roterer tilnærmet uavhengig av den nederste mens den nederste ligger fast på underlaget.
- Finn frem kulen og skråplanet, og plasser skråplanet slik at kulen vil fanges av kulefangeren når kulen slippes, fortrinnsvis med en stor avstand til rotasjonsaksen.
- Start måling av vinkelhastigheten til den øverste skiva i DataStudio.
- Pass på at den øverste skiva står i ro, og slipp kulen. Husk posisjonen som kulen ble sluppet ifra. Kulen skal nå fanges av kulefangeren og skiva vil settes i rotasjon. La skiva rotere i noen sekunder før du avslutter målingene i DataStudio.
- Dersom forsøket ikke var vellykket, gjenta de to forrige punktene. Ellers kan dere skru av lufttilførselen for å begrense støymengden for resten av laboratorieøkten.
- Bruk DataStudio til å finne det eksperimentelle resultatet av vinkelhastigheten $\omega \pm \Delta\omega$.
- Bruk måleskalaen på kulefangeren til å måle avstanden x og anslå verdi for Δx .
- Sett opp skråplanet som beskrevet i kapittel 9.1.4 og vist i figur 9.3. Gjør 4-6 slipp av kulen fra samme posisjon som over og bruk dette til å finne verdier for hastigheten til kulen med usikkerhetsintervall. Du vil her kunne ha nytte av å legge et A4-ark der kulen lander, da kulen vil sette merker i arket. Dette vil forenkle oppmålingen av s . Gjør også måling av slipphøyden d på skråplanet.
- Bruk tilgjengelig måleutstyr og mål resten av størrelsene med usikkerhet i ligning (9-26).

- Finn ω og $\Delta\omega$ ved hjelp av ligning (9-26) og Gauss' feilforplantningslov. For $\Delta\omega$ kan du anta at treghetsmomentet til kulefangeren og kulen kan neglisjeres i forhold til skivas treghetsmoment.
- Sammenlign eksperimentelt målt og teoretisk funnet ω . Diskuter resultatene.
- Demonter kulefanger, og rydd opp i alle løse deler i og ved det eksperimentelle oppsettet. Sørg for at det er minst like ryddig som det var da dere kom.

9.2.6 Ekstraoppgaver

Under utledningen av de teoretiske uttrykkene i kapittel 9.1 er det gjort noen antagelser for å forenkle de analytiske uttrykkene. En god fysiker vil, såfremt det er mulig, sjekke at antagelsene er rimelige, og det er det dere skal gjøre her.

- I den første oppgaven (se kapittel 9.1.2) gjøres en antagelse om at det første leddet i nevneren i ligning (9-13) er neglisjerbart. Sjekk denne antagelsen ved å regne ut vinkelakselerasjonen α ved bruk av ligning (9-13) og kontroller at verdien du får stemmer overens innenfor usikkerhetsintervallet med vinkelakselerasjonen som ble funnet ved ligning (9-14).
- I den andre oppgaven (se kapittel 9.1.3) ble det gjort en antagelse om at treghetsmomentene til de to skivene var like. Sjekk denne antagelsen ved å regne ut vinkelhastigheten ved bruk av ligning (9-17) og kontroller at verdien du får stemmer overens innenfor usikkerhetsintervallet med vinkelhastigheten som ble funnet ved ligning (9-18).
- I den tredje oppgaven over har dere neglisjert bidrag fra små treghetsmoment under beregning av uttrykk for usikkerhet. Sjekk denne antagelsen ved å bruke det eksakte uttrykket når feilforplantningen skal beregnes. Diskuter validiteten av antagelsen i lys av dette.

Bibliografi

- [1] G.L. Squires, *Practical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge. 2001)
- [2] P.J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 633 (2008).
- [3] H. Cavendish, *Philosophical Transactions* **17**, 469 (1798).
- [4] M. O'Connor and F.P. Woodford, *Writing Scientific Papers in English* (Elsevier, Amsterdam. 1975).

Tillegg A

NOEN RÅD OM SKRIVING AV FYSIKKRAPPORTER

Ole Olsen, Institutt for fysikk, NTNU, N-7491 Trondheim

Sammendrag

Et sammendrag av en rapport er en kompakt og knusktørr beskrivelse av rapportinnholdet, og er ment for lesere som raskt vil sette seg inn i problemstilling, metode og resultater. Ved skriving av sammendraget skal en forestille seg at det ikke er en del av rapporten. Sammendrag skal alltid utføres slik at det egner seg for bruk i databaser (ISI, INSPEC) og referattidsskrifter (Physics Abstracts). Sentrale måleresultater skal derfor alltid inkluderes, gjerne med usikkerheter, og alltid med dimensjoner. Gi avkall på avsnitt og innrykk. Setningene skal være fullstendige, det vis si inneholde subjekt og verbal. Typisk lengde kan være 50 – 100 ord. Dersom referanser unntaksvis er nødvendig skal de skrives fullt ut, uten henvisning til litteraturlista i selve rapporten. Det er ikke uvanlig å la linjeavstand og/eller skrifttype avvike fra det som er brukt i rapporten.

1. Innledning

Å skrive en brukbar rapport burde være en av de enklere oppgavene til studenter ved NTNU. Når dette ikke er tilfellet, har det helt bestemte årsaker. Den viktigste er trolig at mange studenter ikke er klar over at det er utkrystallisert normer og konvensjoner innen de enkelte fagdisiplinene. Med «rapport» menes i det følgende et skriftlig dokument hvor en forsker søker å orientere oppdragsgivere, tidsskriftlesere, kollegaer og andre om et teknisk-vitenskapelig arbeid. I en rapport legges det altså betydelig vekt på kommunikasjon. En rapport utformes derfor på en helt annen måte enn for eksempel øvingsbesvarelser, avisartikler, laboratoriejournaler, kompendier, forelesningsnotater, løssalgssaviser, populærvitenskapelige artikler. Bruk av lærebøker som mønster kan være villedende fordi pedagogiske hensyn der dominerer fremstillingen.

Merk spesielt at istedet for typografiske kunstgrep er det innledningskapitlet og rapporttittelen som skal brukes til å vekke interesse hos leseren. Apropos tittel: La den inneholde

nøkkelord som øker sjansen for at nettopp din målgruppe fatter interesse for resultatene dine. Vanligvis slår tittelen an tonen for hovedtemaet.

I innledningskapitlet bør *bakgrunn*, *omfang* og *hensikt* komme frem. Det er et generelt krav at du (ikke bruk «du» i rapporter)(unngå «vi» og «jeg» også, hvis mulig) (bruk parenteser med forsiktighet) (det blir lett rotete) gir en kort omtale av tidligere arbeider på området. Det er derfor naturlig at noen av de aktuelle referansene kommer allerede i innledningskapitlet.

Ved *lange* rapporter er det vanlig at innledningen avsluttes med en summarisk og kort omtale av temaene som skal behandles i hvert av de etterfølgende kapitler. Pass i den forbindelse på at innledningskapitlet ikke får karakter av å være et sammendrag.

2. Teori

Etter innledningskapitlet er det naturlig å gi en teoretisk behandling av hovedtemaet, det vil si det emnet som allerede er antydnet gjennom valg av rapporttittelen. I et rent eksperimentelt arbeid kan dette kapitlet utelates. Som kompensasjon er det da vanlig å levere et fyldig innledningskapittel. (Sjekk for eksempel artikler ved Filipe og Rodgers og Oettinger *et al.*[1,2])

Ikke begynn – eller avslutt – et kapittel med en ligning, figur eller tabell. Benytt alltid noen innledende, forklarende tekstlinjer først. Marker nye avsnitt enten ved hjelp av innrykk eller ved å hoppe over en linje. Det er viktig å fjerne alle linjeskift som etterlater utilsiktede halve linjer. Unngå også «tomme» avsnitt. Tilstreb en enhetlig typografi.

Dobbel linjeavstand og brede marger kan brukes hvis det er ønskelig med kommentarer og tilbakemeldinger fra leseren. Men husk at rapporten i så fall svulmer opp og at lesbarheten reduseres.

Når det gjelder skriving av ligninger skal det gode grunner til for å avvike fra følgende skjema: Etter innledende tekst kommer ligningen på en ny linje. For eksempel: « ... og kraften blir

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1-1)$$

der m er massen og \vec{a} er akselerasjonen.» Vanlige komma- (og punktum-)regler gjelder også når ligningen skrives på egen linje.

En vanlig feil er å konsekvent avslutte siste setning før ligningen med kolon. Dette virker monotont og bør ikke overdrives. Ukjente symboler må forklares senest i de tekstlinjene som kommer rett etter ligningen. Unngå i den forbindelse konstruksjoner av følgende type: «Krafta \vec{F} er proporsjonal med massen m . \vec{a} er akselerasjonen.» Vær med andre ord forsiktig med å begynne setninger med symboler. Unngå plasskrevende lister med symbolforklaringer etter ligningen.

Benytt helst bare ett likhetstegn per ligningslinje og husk: Alltid forklarende tekst før og etter hver ligning. Hvis mulig bør en egen ligningsmarg defineres, hvis ikke brukes sentrerte ligninger.

Lange ligninger representerer et spesielt problem. For det første kan de vanskeliggjøre bruk

av en fast ligningsmarg. I ekstreme tilfeller kan ligningen bli lenger enn linjebredden. Det kan da bli aktuelt å bruke flere ligningslinjer, for eksempel slik; «... I en kubisk krystall er elastisk energitetthet[3] gitt ved

$$U = \frac{C_{11}}{2} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \frac{C_{44}}{4} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + C_{12} (e_{yy}e_{zz} + e_{xx}e_{zz} + e_{xx}e_{yy}), \quad (1-2)$$

der ...»

En annen løsning er å innføre hjelpesymboler eller å splitte opp ligningen i delligninger.

Små ligninger som ikke er så viktige at de fortjener et eget ligningsnummer, kan i spesielle tilfeller flettes inn i tekstlinja. Benytt i så fall skrå brøkstreker, små summasjonstegn, «exp(-x)» istedenfor «e^{-x}», og så videre. Nøl ikke med å spandere en egen ligningslinje hvis det blir typografiske problemer.

Alle symboler skal kursiveres, mens enheter skal derimot ikke kursiveres. Det samme gjelder standardfunksjoner som sin, cos, tan, ln og så videre. Skriv derfor for eksempel sinusfunksjonen slik: sin(*f(x)*). Bruk helst *kursiv*, ikke **utheving** eller understreking, når enkeltord og enkeltsetninger skal fremheves.

3. Metode

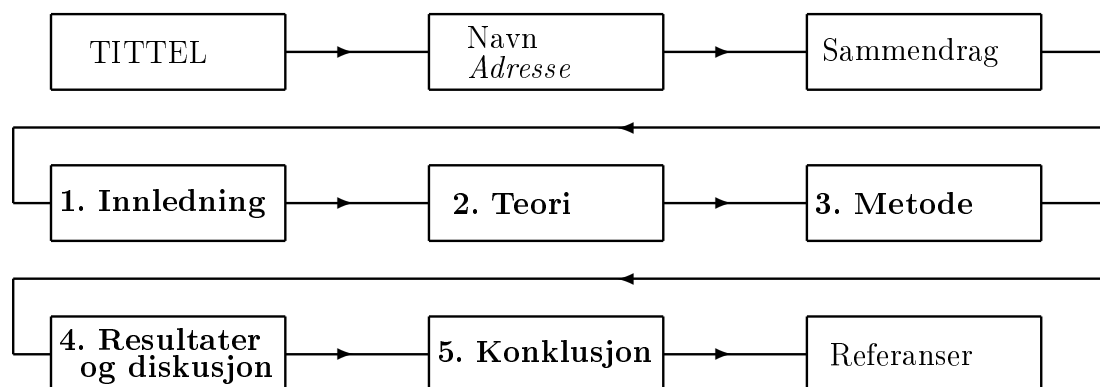
I tråd med kapitteloverskriften er det i dette – og bare i dette – kapitlet at det skal gis en omtale av instrumentering, måleprosedyrer og lignende. I likhet med forrige kapittel kan overskriften gjøres mer spesifikk. «Prøvepreparering», «Optisk lay-out», «Ionekanon» og lignende kan for eksempel være alternative overskrifter. Merk også at kapitlet kan splittes opp ved større arbeider, for eksempel i «3.1 Apparat» og «3.2 Metode». En slik oppdeling er imidlertid ofte unødvendig, ihvertfall ved skriving av korte (student)rapporter.

Vurder nøye hvilke instrumenttyper som skal beskrives. Det sier seg selv at det er unødvendig å forklare virkemåten for et multimeter. Lange kjedelige instrumentlister skal ikke forekomme i en rapport. Gi i stedet en omtale av nøkkelinstrumentene. Det er i den forbindelse ikke uvanlig å nøye seg med å oppgi fabrikatet. Spesielt interesserte lesere kan da på egen hånd skaffe seg de tekniske spesifikasjonene. Det er likevel en god vane å hjelpe leseren ved å opplyse om usikkerheter og feilkilder. Her kan det av og til oppstå et dilemma: Det er ofte naturlig å beskrive de forskjellige feilkildene i måleoppsettet først etter å ha presentert måleresultatene. I slike tilfeller er det tillatt å presentere feilkildene i diskusjonskapitlet.

I eksperimentkapitlet skrives bare unntaksvis ligninger. Hvis det likevel skjer må det utelukke være for å forklare det måletekniske opplegget. Ligninger av denne type skal selvfølgelig ikke forekomme i teorikapitlet.

Dersom du velger å presentere figurer, skal disse *alltid* være omhyggelig utformet. Det er viktig at de er så enkle som mulig. Ikke gi deg i kast med en komplisert tegning uten skikkelig utstyr, som idag betyr et datamaskinbasert tegneprogram.

Figur A.1 viser skjematisk rekkefølgen på de ni «standardelementene» som alltid er til stede



Figur A.1: Skjematisk oversikt over de ni standardelementene i en fysikkrapport. Rapportforsiden – med passende topp- eller bunntekst – kan bestå av enten de to eller de tre første elementene. Kapittelhierarkiet bør begrenses til tre lag, for eksempel 2, 2.1, og 2.1.1. Lange rapporter kan inneholde opptil tretten elementer. Hvor ville du plassere *Innholdsliste*, *Forord*, *Takk til*, og *Vedlegg* i denne figuren?

i en profesjonell rapport. (La oss nytte høvet til å påpeke at rapporter kan inneholde opptil fire elementer i tillegg: *Innholdsliste*, *Forord*, *Takk til* («*Acknowledgement*»), *Vedlegg*. Men merk at disse fire tilleggselementene som regel bare benyttes ved lange rapporter.).

Husk at en figur alltid må omtales i kapittelteksten. I tillegg må figurdetaljene også forklares i selve figurteksten – som alltid plasseres under figuren. Dette siste er en innarbeidet konvensjon, selv om tekstsider – i vår skrifttradisjon – skannes ovenfra og nedover.

4. Resultater og diskusjon

I større arbeider kan også dette kapitlet deles i to, for eksempel i «4.1 Resultater» og «4.2 Diskusjon». Unngå i så fall å blande diskusjoner inn i resultatkapitlet, eller omvendt.

Du skal beskrive konkret hvilke resultater som er oppnådd, hva enten det er beregninger eller målinger som ligger til grunn. Alle tabeller skal nummereres, og forklarende tabelltekst over tabellen er obligatorisk. Uklare forhold ved tabellen skal ikke skrives under eller ved siden av tabellen. Gjør heller tabellteksten mer fyldig. Pass på at det blir stående igjen et par tomme linjer både før og etter tabellen. Årsaken til det er at leseren kjapt skal kunne skille mellom tekst og tabelltekst. Av samme grunn er det leservennlig å la skrifttypen, eller skriftstørrelsen, – også i figurtekstene – avvike litt fra det som er benyttet i hovedteksten.

Merk at kurver og diagrammer per definisjon er figurer og nummereres deretter. Når en kurveskare skal presenteres i samme figur er det viktig å omtale de forskjellige delkurvene.

Tabell A.1: Eksempel på tabell. Kjente symboler, for eksempel « t » for tid, trenger ingen forklaring. « W », og «flow» – med dimensjon strømtetthet – bør derimot forklares.

| T (K) | t (s) | W (eV) | Flow (10^{-4} Wm^{-2}) |
|------------|------------|-------------|---------------------------------------|
| 123,4 | 0.00 | 23,23 | 11,4 |
| 432,1 | 9.54 | 24,87 | 21,3 |
| 521,9 | 21.10 | 25,94 | 35,2 |
| 644,5 | 28.59 | 31,01 | 45,8 |
| 745,6 | 33.45 | 33,28 | 66,9 |

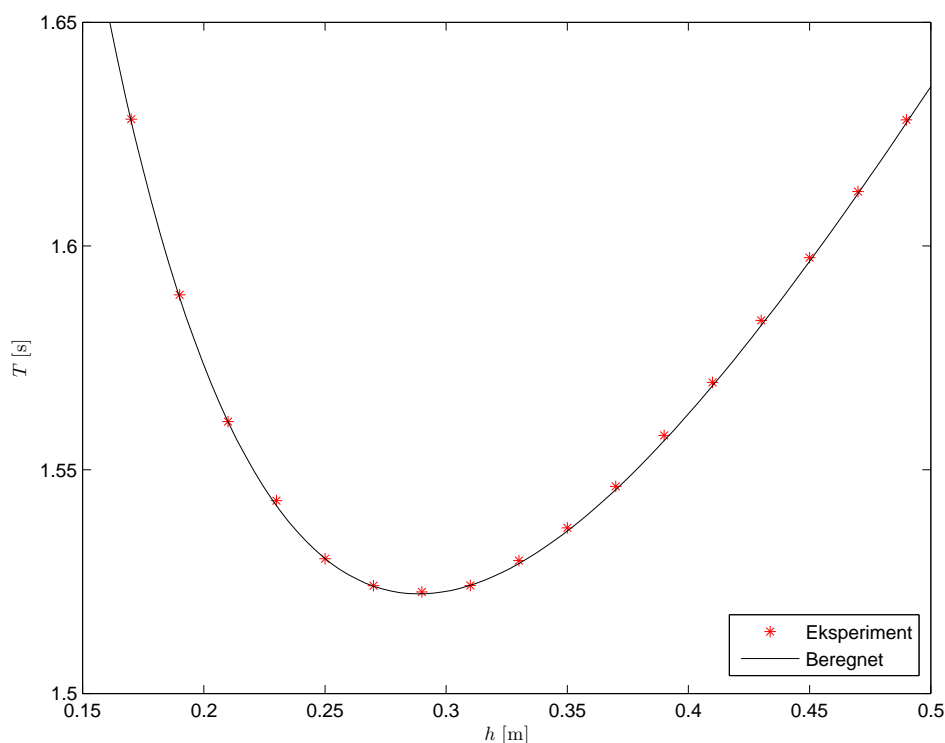
Her er det vanlig å plassere en tegnforklaring på figuren i tillegg til den forklarende figurteksten. Husk spesielt å gjøre det klart hva som er målte data og hva som eventuelt er teoretiske kurver. De sistnevnte er som regel glatte mens målte data bør markeres tydelig med enkeltpunkter, eventuelt med usikkerhetsstolper. Et alternativ er å ta med så mange målepunkter at den statistiske variasjonen kommer tydelig frem. Et eksempel på dette er vist i figur A.2. Her er usikkerhetsstolpene utelatt fra figuren, men en kan enkelt slutte seg til at usikkerheten er svært liten, da målepunktene ser ut til å følge den teoretiske kurven ganske tett med liten variasjon i avstanden til den teoretiske linjen fra punkt til punkt.

En vanlig feil i studentrapporter er å ikke markere målepunkter tydelig nok. Det er derfor viktig å velge en optimal skalering av koordinataksene. Strektykkelse og fontstørrelse bør velges med tanke på kopiering og forminsking – samt eventuell trykking. Gjør livet lett for leseren ved å bruke passe antall delestreker og akseverdier, og minimaliser antall nuller før og etter desimaltegnet.

Du må unngå å overlesse selve figuren. Når flere kurver presenteres i samme figur er det nødvendig å bruke forskjellige symboler for målepunktene, for eksempel kryss, kors, fylte eller ufylte kvadrater, sirkler og trekanter, og så videre. Dersom du har en figur som inneholder mye informasjon er det lurt å aktivt bruke forkortelser eller symboler som identifiserer ulike detaljer i figuren, og bruke en fyldig figurtekst som forklarer de ulike forkortelsene og symbolene som brukes i figuren. Et enkelt eksempel på slik bruk av figurtekst er vist i figur 4.4.

Det er uprofesjonelt å presentere en skisse av eksperimentoppsettet inne i rapporten mens for eksempel kurver for måledataene kommer til slutt, etter referansene. Du må derfor bestemme deg for om samtlige figurer skal plasseres inne i rapporten, eller etter rapporten. Det første representerer det mest leservennlige alternativet, og er lett å realisere med tekstbehandling. Pass imidlertid på at figurene plasseres slik at (i) det ikke blir stående igjen ubrukte, hvite felter i rapporten, og (ii) at figuren plasseres nær figurhenvisningen, ihvertfall i det samme kapitlet. I praksis kommer ofte (i) og (ii) i konflikt med hverandre, men Latex optimaliserer dette for deg uten at du trenger tenke på det.

Et alternativ som ofte kreves av flere tidsskrift ved innsending av rapporter for publisering er å benytte egne figursider. I så fall presenteres figurene etter referansene, og det er nødvendig å spandere en egen figurtekstside som plasseres mellom referansene og figurene. Hver enkelt av figurtekstene skal begynne med det aktuelle figurnummeret. De etterfølgende figurene må



Figur A.2: Eksempel på presentasjon av måledata samt teoretisk linje i et kurvediagram. Dette eksemplet er hentet fra pendeleksperimentet i kapittel 5, der pendelens svingeperiode T plottet som en funksjon av avstanden fra massemidtpunktet til opphengningspunktet h , sammenlignet med den teoretiske svingeperioden, funnet ved hjelp av ligning (5-18). Merk at det er tillatt å bruke symboler (for eksempel T og h) på de to aksene i stedet for full tekst.

merkes med det tilhørende figurnummeret. Denne figurtekstsiden, med etterfølgende figurer, er ikke et vedlegg (appendiks).

Vedlegg brukes i de sjeldne tilfellene hvor det aktuelle stoffet er plasskrevende, men litt på siden av hovedtemaet i artikkelen. Det er for eksempel ikke nok å legge ved et kurvepapir for å vise leseren en slags dokumentasjon eller et bevis. Leseren stoler nemlig på at du faktisk har gjort de aktuelle målingene. Dette siste knytter an til en vanlig feil ved mange studentrapporter: Han/hun er ikke lenger i den videregående skolen, og den typiske leseren er ikke en lærer som med argusblick kontrollerer mellomregningene. Forestill deg heller leseren som en kollega eller en studiekamerat, som du ikke vil slå i svime med unødvendige detaljer. La ikke prinsipielle ting drukne i et virvar av tall, implikasjonspiler, numeriske ligninger, svar med to strek under. Presenter heller stoffet eksempelvis slik:

«...og dataene i tabell 3 ble beregnet ved hjelp av regresjonsanalyse og ligning (7). Den kinetiske energien ble funnet å være 103,7 eV, som innenfor måleusikkerheten på 0,1 eV er noe høyt i forhold til det som er rapport i referanse [2]. Dette skyldes trolig at»

På denne måten får leseren greie på hvilke rådata og hvilken ligning som er benyttet. Han blir også fortalt hvilket analyseverktøy forfatteren har benyttet. Et forslag til forklaring på avvik i forhold til tidligere målinger er også gitt.

5. Konklusjon

I avslutningskapitlet er det vanlig å dra konklusjoner og å presentere prinsipielle og konkrete anbefalinger for fremtidig arbeid. Viktige ting kan gjentas. Det er heller ikke uvanlig å foreta en grovoppsummering av arbeidet. Men merk at selve rapportsammendraget ikke kan utelates av den grunn.

En del av de standardene som fysikere følger ved skriving av rapporter er gyldige i andre subkulturer, for eksempel kjemi og elektronikk. På den annen side er det innen fysikk mulig å velge mellom alternative standarder og typografiske systemer. Referanser kan for eksempel utformes på en helt annen måte enn det som er benyttet i denne summariske orienteringen. Det er derfor tillatt å avvike fra det mønsteret som er presentert i de foregående kapitlene. Dette betyr at rapporten kan utformes med tanke på den aktuelle målgruppen av lesere. Men: Før du bevisst bryter en konvensjon må du kjenne konvensjonen. Selv om vi forlengst er gått inn i en periode med elektroniske media så er det ingen ting som tyder på at vi skal kaste vrak på fundamentale regler for kommunikasjon ved hjelp av det skrevne ord.

Referanser

- [1] J.A.N. Filipe og G.J. Rodgers, *Phys. Rev. E* **52**, 6044 (1995).
- [2] K. Oettinger, T. Wimbauer, M. Drechsler, B. K. Meyer, H. Hardtegen og H. Lüth, *J. Appl. Phys.* **79**, 1481 (1996).
- [3] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley, New York. 1996).