

UTGAVE 20. jan. 2011

**LABORATORIUM I EMNE**

**TFY4165 TERMISK FYSIKK**

**for studenter ved studieprogrammet**

**MTFYMA**

**NTNU**

**Våren 2011**



## Forord

Dette heftet inneholder tekster til laboratoriekurset i emnet TFY4165 Termisk fysikk. Dette utgjøres av praktiske laboratorieoppgaver og forutgående seminarer til hver oppgave.

En generell beskrivelse av TFY4165 Termisk fysikk finnes på følgende nettside:

<http://home.phys.ntnu.no/instdef/undervisning/tfy4165/index.html>

og laboratoriekurset spesielt:

[http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4165\\_lab/index.html](http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4165_lab/index.html).

På disse nettsidene vil studentene finne all nødvendig informasjon om påmeldinger til laboratoriet, timeplaner, romfordelinger osv.

I 2009 ble det gjennomført en større endring av kurset da oppgaven om spektrallinjene i balmerserien fra hydrogenatomet ble erstattet med en oppgave mer relevant til termisk fysikk. Denne versjonen av kompendiet er en gjennomarbeidet revisjon av kompendiet fra 2005 (laget av Christian Andre Andresen, Anne Borg, Arne Mikkelsen og Pawel Sikorski). Jeg har også mottatt hjelp og mange gode kommentarer fra laboratorieveilederene våren 2009 (Sigrun Saur Almberg og Severin Sadjina).

K. Razi Naqvi

20. januar 2011.



# Innhold

<b>1</b>	<b>PÅ LABARATORIET</b>	<b>1</b>
1.1	På labaratoriet . . . . .	1
1.1.1	Håndtering av flytende nitrogen . . . . .	2
1.1.2	Muligheter for kreativitet . . . . .	2
1.2	Journal og rapport . . . . .	2
<b>2</b>	<b>VARMEPUMPE</b>	<b>5</b>
2.1	Teoretisk bakgrunn . . . . .	5
2.1.1	Termodynamikkens 1. lov . . . . .	6
2.1.2	Varmekraftmaskin . . . . .	6
2.1.3	Kjølemaskin . . . . .	6
2.1.4	Entalpi . . . . .	7
2.1.5	Varmepumpas oppbygging . . . . .	8
2.1.6	$pV$ -diagram for varmpumpas syklus . . . . .	9
2.1.7	Syklus fremstilt i $pH$ -diagram . . . . .	10
2.2	Forhåndsoppgaver . . . . .	13
2.2.1	Virkningsgrad . . . . .	13
2.2.2	Kretsløpsanalyse . . . . .	13
2.3	Eksperimentelt . . . . .	15
2.3.1	Apparatur . . . . .	15
2.3.2	Innledende observasjoner . . . . .	17
2.3.3	Målinger . . . . .	17
2.3.4	Diskusjon . . . . .	18
2.3.5	Avslutning . . . . .	18
2.4	Tillegg:	
	Krav til og klassifikasjon av kjølevæsker . . . . .	18
<b>3</b>	<b>SPESIFIKK VARMEKAPASITET TIL METALLER</b>	<b>23</b>
3.1	Teoretisk bakgrunn . . . . .	23
3.1.1	Introduksjon til kalorimetri . . . . .	23
3.1.2	Klassisk betraktning av spesifikk varmekapasitet (basert på kinetisk teori) . . . . .	24
3.1.3	Einsteins teori om varmekapasiteten til faste stoffer . . . . .	25
3.2	Forhåndsoppgaver . . . . .	25
3.2.1	Eksempel brukt av Einstein: diamant . . . . .	26

3.2.2	Data for aluminium . . . . .	27
3.2.3	Spesifikk varmekapasitet til en to-atomig gass . . . . .	28
3.3	Eksperimentelt . . . . .	29
3.3.1	Datainnsamling og analyse . . . . .	30
3.4	Data over spesifikk varmekapasitet for aluminium . . . . .	31
3.5	Spesifikk varmekapasitet for fluor . . . . .	33
3.6	Håndtering av vekta . . . . .	34
<b>A</b>	<b>KURVETILPASNING</b>	<b>37</b>
A.1	Formulering av kurvetilpasningsproblemet . . . . .	37
A.2	Minste kvadratsums prinsipp . . . . .	38
A.3	Minste kvadraters metode på den rette linje . . . . .	38
A.4	Regresjonsanalyse . . . . .	40
A.4.1	Andre-ordens polynom . . . . .	41
A.4.2	Ikke-lineær regresjon . . . . .	43
	<b>Bibliography</b>	<b>45</b>

# Kapittel 1

## PÅ LABORATORIET

### Hensikt

Hovedhensikten med dette kapitlet er å påminne deg om regler og instruksjoner for bruk av laboratoriene ved institutt for fysikk og gi deg det du trenger for å heve ferdigheter og kompetanse slik at du kan skrive akseptable labjournaler og rapporter.

### 1.1 På laboratoriet

Siden TFY4164 ikke er ditt første laboratoriekurs, forventes det at du er kjent med de vanlige regler om oppførsel på laben. Her følger en liste med de viktigste generelle reglene. Det forventes at du følger disse bestemmelsene:

- Ikke ta med mat eller drikke til laben.
- Møt opp på timen du er satt opp på.
- Forhåndsoppgaver skal være gjort før du møter opp på laben.
- Du vil ikke få lov til å gjennomføre eksperimentet hvis du ikke leverer forhåndsoppgavene eller hvis disse er blanke.
- Den som kommer mer enn 10 minutter etter at timen har startet får ikke gjennomføre eksperimentet.
- Hver student må ha egen notatbok. Sidene skal være nummerert ved bruk av penn. Dette sikrer at ingen sider fjernes i løpet av semesteret.
- Notatene føres ved bruk av penn (ikke blyant). Ikke visk ut feil, strek heller over. Fin føring er en fordel.

- Studentene jobber to og to sammen, men hver enkelt skal gjøre notater (inkludert måledata) undervegs i sin egen notatbok.
- Arbeidsstasjonen skal forlates i samme stand som du fant den, ren og pen.

### 1.1.1 Håndtering av flytende nitrogen

Når du utfører oppgave nummer 2, følg sikkerhetsforskriftene som gjelder for håndtering av flytende nitrogen. Disse skal bli forklart før eksperimentet starter. Under normale forhold vil flytende nitrogen ha et kokepunkt på 77 K. Eksperimentet er ikke farlig, men du skal være oppmerksom på at huden vil få alvorlige frostskafer ved vedvarende kontakt med flytende nitrogen. Du skal også være forsiktig med å ta på objekter som nylig har vært i kontakt med flytende nitrogen.

### 1.1.2 Muligheter for kreativitet

Til tross for at prosedyren for hver oppgave er beskrevet i tilstrekkelig detalj, er det mange veger som fører til Rom. Du oppfordres derfor til å diskutere andre muligheter (både for å utføre eksperimentet og analysere måleresultater).

## 1.2 Journal og rapport

Hver student skal utarbeide en journal for hver av de to oppgavene (Varmepumpe og Spesifikk varmekapasitet). Journal skal føres under lab, og leveres etter lab til veilederen for godkjenning/tilbakemelding. Når begge laboratorier er fullført, skal hver student skrive en labrapport for en av de to oppgavene som hun/han velger selv. Rapporten vurderes med godkjent/ikke godkjent. Tidsfrist for å levere labrapporten er to uker etter at laben er utført. Gi den en passende tittel, og del den inn i ulike avsnitt. Her følger en liste som kan fungere som en ledetråd når du skal skrive rapporten:

Problemstilling

Utstyr

Oppsett og gjennomføring

Resultat & Analyse

Diskusjon

Det er forventet at labrapporten skrives på datamaskin ved å bruke Microsoft Word (eller LaTeX), og at Microsoft Excel, MATLAB, eller lignende brukes for å analysere og plote data. Det er også tatt for gitt at studentene har erfaring med Microsoft Excel. Dersom man ikke har brukt regneark før, bør en tilegne seg kjennskap til dette på egenhånd,



før kurset starter. For eksempel kan innføringen gitt til studentene ved University of Kansas<sup>1</sup> og Clemson University anbefales.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>[http://www.techdocs.ku.edu/docs/excel\\_07\\_intro.pdf](http://www.techdocs.ku.edu/docs/excel_07_intro.pdf)

<sup>2</sup><http://phoenix.phys.clemson.edu/tutorials/excel/index.html>



# Kapittel 2

## VARMEPUMPE

### Mål

Du skal i denne laboratorieoppgaven

- få kunnskap om og erfaring med termodynamiske kretsprosesser,
- analysere kretsprosessen i ei varmepumpe,
- måle virkningsgraden til ei varmepumpe.

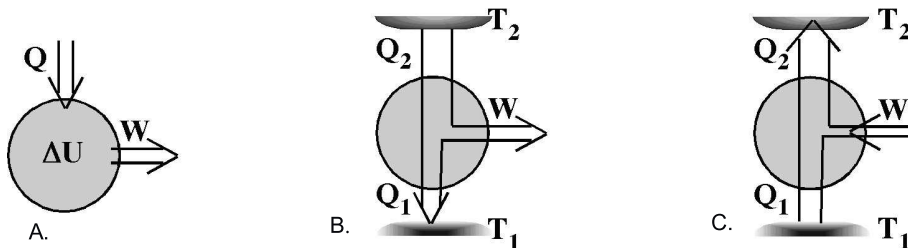
### 2.1 Teoretisk bakgrunn

Varmepumpa er et eksempel på hvordan vi utnytter termodynamiske prinsipper til å forbedre hverdagen. Varmepumpa kan beskrives som et modifisert kjøleskap hvor vi ikke er primært interessert i avkjølingseffekten men isteden benytter den varmen som kjøleskapet avgir.

Tanken om å bruke termodynamiske prinsipper til oppvarming er ikke ny, dette ble foreslått for over 150 år siden. Basisteknologien er heller ikke ny ettersom industrielle kjølesystemer har vært i bruk siden 1850 og kjøleskap for forbrukere ble vanlige rundt 1930. Overskudd av billig elektrisk og fossil energi i sammenheng med dyr kjøleteknologi gjorde imidlertid at varmepumpa inntil ganske nylig ikke var interessant for vanlige forbrukere. Dette har endret seg i løpet av de siste årene og varmepumpa er i dag svært aktuell som strømsparende element hvor man trekker varmeenergi fra et vannreservoar, fra jorda eller fra lufta og bruker denne energien til å varme opp boliger. Det geniale ligger i at man bruker termodynamiske prinsipper til å ta varme fra et kaldt (i forhold til innelufta) medium og deretter bruke denne varmen å vedlikeholde en høyere temperatur i et annet medium.

### 2.1.1 Termodynamikkens 1. lov

Selve grunnloven for termodynamikken – termodynamikkens 1.lov om energiens bevaring – er vist i figur 2.1A. Varmer  $Q$  inn i systemet går med til 1) å øke indre energi  $\Delta U$ , 2)



Figur 2.1: Energiflytdiagram som viser: (A) Termodynamikkens 1. lov, (B) varmekraftmaskin og (C) kjølemaskin/varmepumpe.

å utføre et arbeid  $W$ . Første hovedsetning i termodynamikken sier at for enhver prosess der varme tilføres og arbeid utføres på et system, vil netto tilført energi være lik økningen av systemets indre energi:

$$\Delta U = Q - W. \quad (2-1)$$

Fortegnsregel brukt i ligning (2-1) og av de fleste fysikere: Varmer  $Q$  positiv inn og arbeid  $W$  positiv ut av systemet.

### 2.1.2 Varmekraftmaskin

Figur 2.1B viser energiflyten i en varmekraftmaskin. Maskinen (som i det seinere også kalles systemet) trekker ut en viss varme  $Q_2$  fra et reservoar med høy temperatur  $T_2$ , produserer arbeidet  $W$  og gir i tillegg fra seg en mindre varmemenge  $Q_1$  til et reservoar med lav temperatur  $T_1$ . En varmekraftmaskin må som alle termodynamiske maskiner være en syklisk maskin. Ifølge termodynamikkens 2. lov er det ikke mulig for en syklisk arbeidende maskin å omdanne all varme til arbeid. Derfor kan ikke  $Q_1 = 0$  i figur 2.1B.

En viktig faktor når vi omtaler systemer som er basert på varmekraft er virkningsgraden til prosessen, det vil si hvor mye nytte får vi ut i forhold til kostnaden til det vi putter inn i prosessen.

Virkningsgraden  $\eta$  for en varmekraftmaskin er derfor definert som

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}}. \quad (2-2)$$

### 2.1.3 Kjølemaskin

Figur 2.1C viser energiflyten i et kjøleskap eller ei varmepumpe. I kjøleskapet bruker vi energi  $W$  til å fjerne en varme  $Q_1$  fra skapet som har temperatur  $T_1$ . Varmen  $Q_2$  avgis

til romlufta med temperatur  $T_2$ . For å få effektiv kjøling bør naturligvis  $Q_1$  være så stor som mulig i forhold til den anvendte energi  $W$ , og vi definerer en kjølefaktor  $\epsilon$  eller  $\eta_R$  (subskript R står her for refrigerator)

$$(\epsilon = ) \quad \eta_R = \left| \frac{Q_1}{W} \right| = \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}}. \quad (2-3)$$

For varmepumpa gjør vi egentlig det samme, idet vi her bruker den tilførte energien  $W$  til å trekke varmen  $Q_1$  fra et rimelig kjølig medium ved temperatur  $T_1$  (f.eks. havvann eller uteluft) og overføre den som varme  $Q_2$  til et varmere medium ved temperatur  $T_2$  (inneluft). Her er vi interessert i at  $Q_2$  blir så stor som mulig og effektfaktoren  $\epsilon$  eller  $\eta_{HP}$  (subskript HP står her for Heat Pump) for varmepumpa blir

$$(\epsilon = ) \quad \eta_{HP} = \left| \frac{Q_2}{W} \right| = \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}}. \quad (2-4)$$

Den praktiske virkningsgraden for en varmeprosess som drives mellom to reservoar med temperaturer  $T_1$  og  $T_2$ , er avhengig av mange faktorer. Det kan ut fra termodynamikkens 2. lov vises at ingen av maskinene kan ha virkningsgrad høyere enn virkningsgraden for en Carnotmaskin. Når maskinen er ei varmepumpe, får vi

$$\eta_{HP, \text{maks}} = \eta_{HP, C} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = \frac{T_2}{\Delta T}. \quad (2-5)$$

Denne relasjonen er utpreget teoretisk, men tendensen viser det beklagelige faktum at en luft-luft varmepumpe vil miste effektivitet når kuldegradene virkelig setter inn og  $\Delta T$  blir stor, mens en vann-luft(vann) varmepumpe fremdeles vil være effektiv ettersom temperaturen i et stort vannreservoar som regel endrer seg forholdsvis lite i løpet av vinteren.

Merk at virkningsgraden for en varmekraftmaskin alltid er mindre enn 1,0 mens for en kjølemaskin/varmepumpe er den alltid større enn 1,0.

### 2.1.4 Entalpi

Når vi analyserer bestemte typer termodynamiske prosesser, spesielt i kraftproduksjon og kjøling, støter vi ofte på kombinasjonen  $U + pV$  der  $U$  = indre energi,  $p$  = trykk og  $V$  = volum. Denne kombinasjonen blir definert som entalpien  $H$ :

$$H \stackrel{\text{def}}{=} U + pV. \quad (2-6)$$

Entalpien er spesielt nyttig for isobare prosesser, idet varme  $Q$  tilført går i sin helhet til økt entalpi:

$$\Delta H \stackrel{\text{konst } p}{=} \Delta U + p\Delta V = \Delta U + W = Q, \quad (2-7)$$

der siste overgang er fra 1. hovedsetning i ligning (2-1). Nødvendig varme for ulike termodynamiske prosesser (smeltevarme, kondensasjonsvarme etc.) oppgis gjerne ved  $\Delta H$  fordi slike prosesser er antatt å skje ved konstant trykk  $p$  (oftest 1 atmosfære). Tilført varme går altså med til å øke den indre energien  $U$  pluss å gjøre ytre arbeid  $p\Delta V$ , summert i  $\Delta H$ .

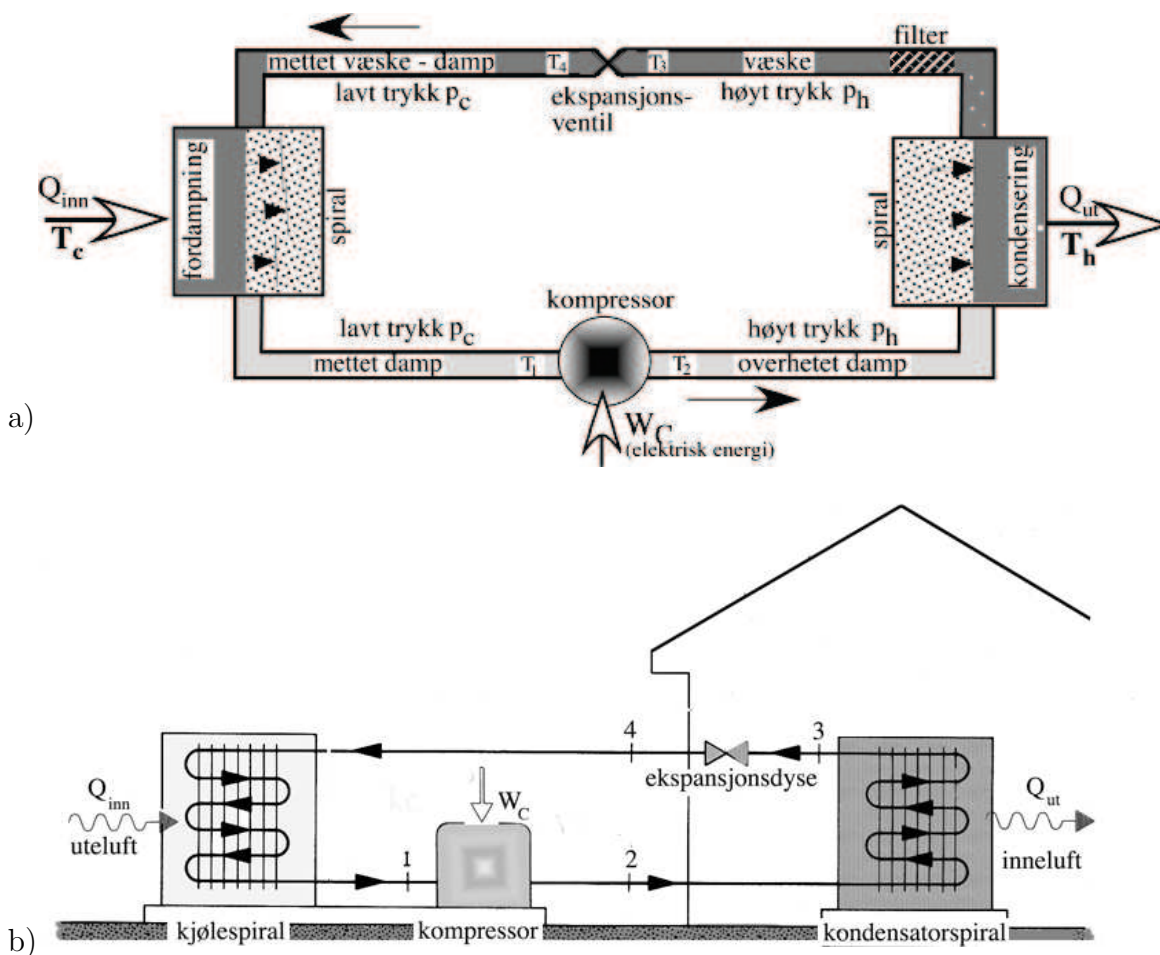
Med fortegnskonvensjonen i figur 2.1A vil vi ha:

Fordampingsvarme:  $Q = \Delta H > 0$  (varme inn i systemet)

Kondensasjonsvarme:  $Q = \Delta H < 0$  (varme ut av systemet)

### 2.1.5 Varmepumpas oppbygging

Den prinsipielle oppbyggingen av varmepumpe er vist i figur 2.2a. Virkemåten er basert på at et kjølemedium vekselvis fordamer og kondenserer.



Figur 2.2: (a) Prinsippskisse av varmepumpe. (b) Konstruksjonen av en luft-til-luft varmepumpe. Fordamperenheten er markert med "kjølespiral", et navn som henger igjen fra kjøleterminologien.

For å forstå varmepumpas virkemåte må vi ha i minne definisjonen av varme: Varmer er en strøm av energi mellom to systemer som skyldes temperaturforskjell mellom systemene.

La oss først se på fordampingen (kokingen). I fordamperenheten tilføres kjølemediet varme  $Q_{inn}$  slik at det først varmes opp til kokepunktet og så fordamer (koker). Det meste av varmen går med til fordampingen. Trykket må være så lavt at kokepunktet ligger lavere enn temperaturen til omgivelsene (lufta eller vannet). Det lave trykket sørges for av en ekspansjonsventil (dyse) foran fordamperenheten.

Så til kondensasjonen: I kondensatorenheten strømmes varme  $Q_{\text{ut}}$  fra kjølemediet til omgivelsene. Gassen avkjøles til kokepunktet (doggpunktet) og vil så kondensere. Det meste av energien fragjøres p.g.a. kondensasjonen. Trykket må være så høyt at kokepunktet ligger høyere enn temperaturen til omgivelsene. Det høye trykket sørges for av en kompressor mellom fordamperenhet og kondensasjonsenhet.

Oppbyggingen av en luft-luft varmepumpe til boligoppvarming er vist i figur 2.2b. Her brukes en kraftig vifte (ikke vist på figuren) til å føre store luftmengder med uteluft over fordamperenheten (merket “kjølespiral”). Varmeinnholdet i denne lufta blir brukt til å koke (fordampe) kjølemediet. Kompressoren øker trykket og den overopphetede dampen føres inn i huset hvor den kondenserer i kondensatorspiralen med følgende varmeavgivelse. Denne spiralen er plassert foran en vifte som sender den oppvarmede lufta inn i rommet.

### Oppsummert:

Varmerpumpes fra kalde til varme omgivelser når følgende er oppfylt:

1. I fordamperenheten (“kjølespiralen”) må temperaturen i kjølemediet være **lavere** enn temperaturen i omgivelsene. P.g.a. temperaturforskjellen transporteres varme fra omgivelsene til kjølemediet, varmen gir fordamping.
2. I kondensatorenheten (“kondensatorspiralen”) må temperaturen i kjølemediet være **høyere** enn temperaturen i omgivelsene. P.g.a. temperaturforskjellen transporteres varme fra kjølemediet til omgivelsene slik at kjølemediet kondenserer.
3. Vi ser av pkt. 1 at på fordampersida må mediets kokepunkt ligge godt **under** omgivelsenes temperatur. Dette oppnås ved å ha tilstrekkelig **lavt** trykk.
4. Vi ser av pkt. 2 at på kondensatorsida må mediets kokepunkt ligge godt **over** omgivelsenes temperatur. Dette oppnås ved å ha tilstrekkelig **høyt** trykk.

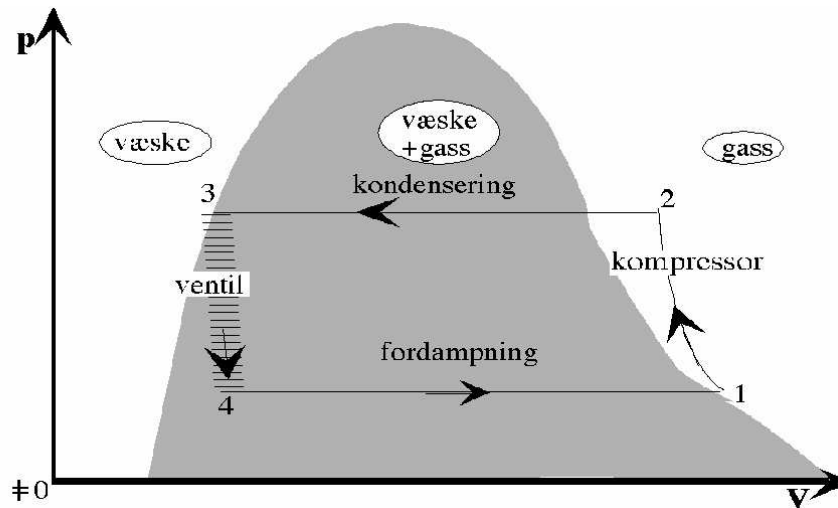
Hvilke krav vi må stille til kjølemediet vil bli detaljert i avsnitt 2.4.

### 2.1.6 $pV$ -diagram for varmepumpas syklus

Vi skal først vise hvordan varmepumpas termodynamikk fremstilles som funksjon av trykk og volum, figur 2.3.<sup>1</sup>

Den grå “haugen” som kommer opp på midten representerer området hvor væske og damp kan sameksistere. Til venstre for området er kjølemediet i væskeform, mens den til høyre er i gassform. I tilstand 2 er kjølevæsken i dampform. Dampen avkjøles til den når doggpunktet og kondenseres langs 2–3. Kondensasjonsvarme avgis og i tilstand 3 er alt kjølemediet i væskeform. Langs 3–4 synker trykket og noe av væsken fordampes. Denne delen av prosessen er ikke reversibel (som antydnet med en stipling), men ettersom vi kjenner start- og sluttverdier til trykk og volum betyr dette ikke noe for analysen. Systemet ekspanderer deretter langs 4–1 under konstant trykk og mesteparten av mediet er da

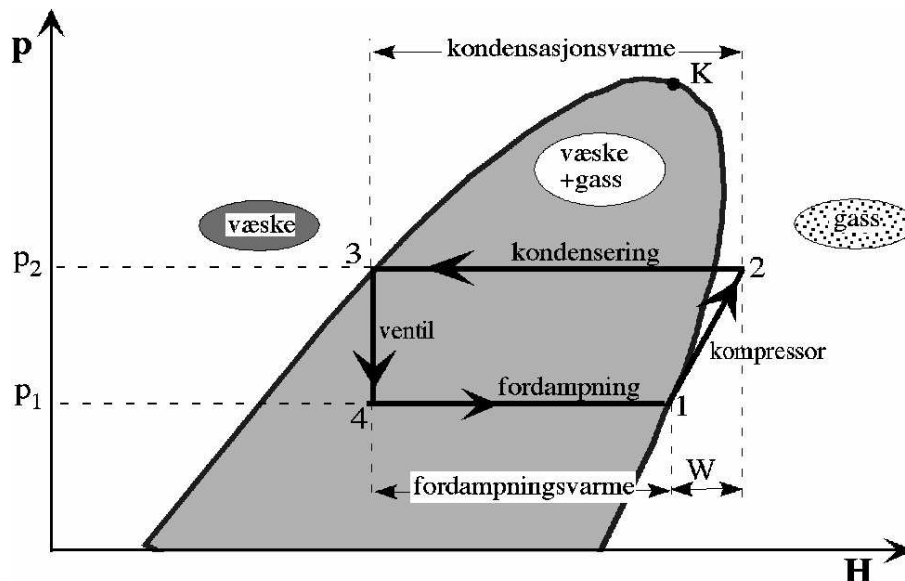
<sup>1</sup>Legg merke til at vi her bare ser på den delen av diagrammet for kjølemediet som er interessant for prosessen, slik at her representerer ikke origo nullpunktet hverken for trykket eller volumet. Hvis vi ønsker å få med mest mulig av ekstremal-områdene må vi tegne i  $\log p$ -skala, dette gjøres nesten alltid i tekniske datablad.

Figur 2.3:  $pV$ -diagram for varmepumpe.

fordampet ved tilførsel av varme. Dampen komprimeres til slutt langs 1–2. Temperaturen øker og eventuelt resterende væske fordampes.

### 2.1.7 Syklus fremstilt i $pH$ -diagram

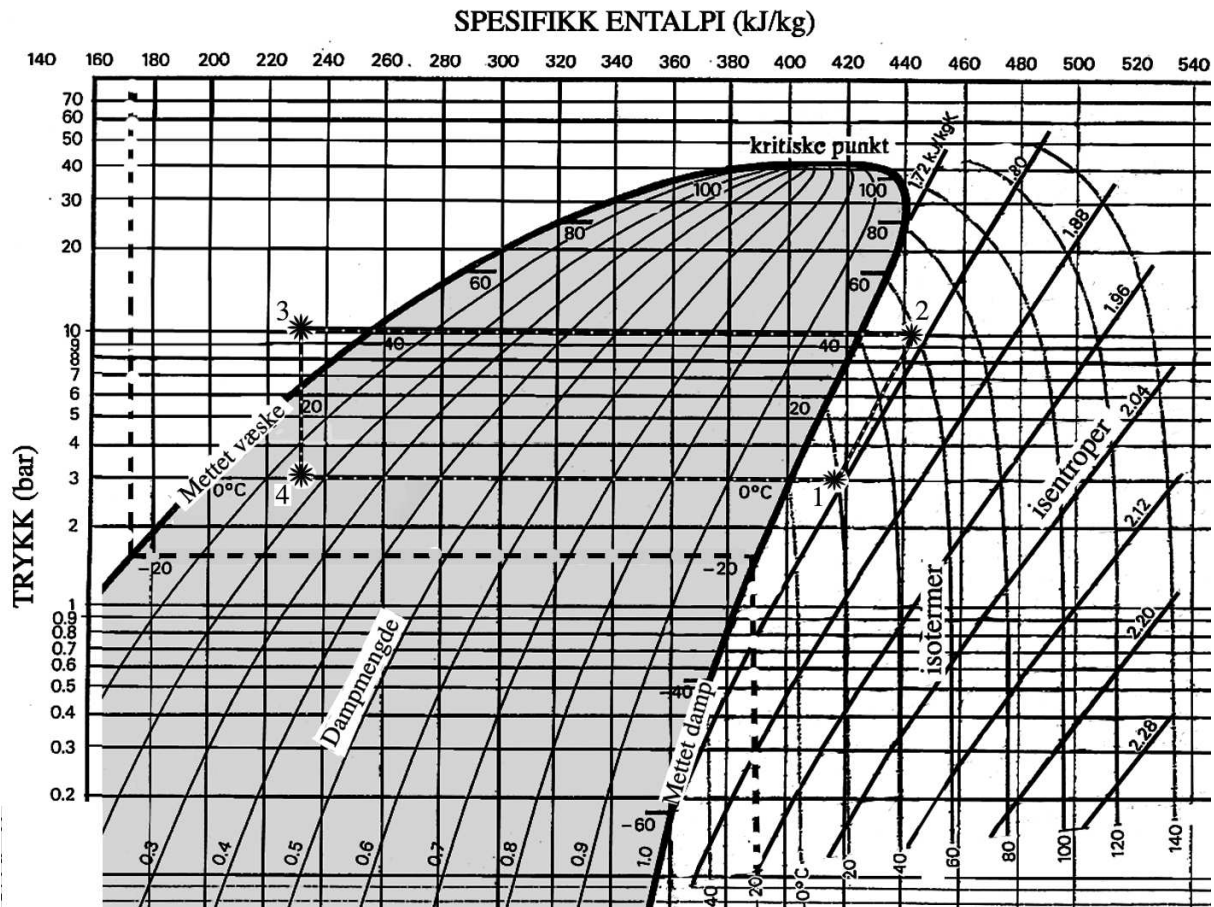
Vi vil først vise syklusen i et forenklet  $pH$ -diagram i figur 2.4. Før vi går løs på selve

Figur 2.4: Trykk-entalpidiagram ( $pH$ -diagram) for varmepumpe.

syklusen kan vi knytte noen kommentarer til selve diagrammet. Som for  $pV$ -diagrammet viser det grå området hvor kjølemediet forekommer som en blanding av væske og gass (damp). Innenfor dette området kan det trekkes kurver for konstant relativ andel av



damp – dette er ikke gjort her men vil finnes på det noe mer omfattende diagrammet i figur 2.5. Grenselinja som avgrenser området til venstre er kurva for mettet væske, eller kokepunktlinja. Til venstre for denne linja forekommer mediet bare som væske. Grenselinja til høyre representerer doggpunktlinja. Til høyre for denne linja eksisterer mediet bare i gassfase. Kokepunkt og doggpunktlinjene møtes i det kritiske punktet K – over dette punktet blir gass og væske uatskillbare tilstander.



Figur 2.5:  $\log p$ - $H$ -diagram for varmepumpe med typiske målepunkter (\*) inntegnet. Forstørret utgave av diagrammet finner du i figur 2.9 side 21.

Følg med i det forenklede diagrammet i figur 2.4. Syklusen 1-2-3-4-1 er tegnet inn i diagrammet med piler som angir retningen av prosessen. Vi ser at syklusen blir ganske enkel i dette diagrammet. Den ligger mellom to isobarer  $p_1$  og  $p_2$  (de to horisontale linjene) og overgangen skjer ved en såkalt isentrop 1-2 og en isentalp 3-4.<sup>2</sup>

Punkt 1 tilsvarende tilstanden til dampen like før den blir komprimert, dvs. ved inngangen til kompressoren. Punkt 2 er tilstanden i væska umiddelbart etter komprimeringen. Punktene 3 og 4 er tilstandene like før – og etter strupingen. Ettersom  $H$  representerer energi kan vi finne energibidragene i prosessen å lese av langs  $H$ -aksen: Fordampingsvarmen leses av mellom 4-1 og kondensasjonsvarmen leses av mellom 2-3, men korrigert for

<sup>2</sup>Avstrupningsprosessen 3-4 er lik Joule-Thomson-prosessen som er en isentalpisk prosess.

den korte biten mellom 2 og dogglinja, energien her gir oppvarming av gassen. Tilført energi  $W_C$  i kompressoren finnes ved å gå fra 1–2 langs  $H$ -aksen.

Vi skal nå gjøre oss kjent med den type entalpiediagram som brukes i praksis og hvordan målinger plottes inn i slike diagram. Diagrammet som er vist i figur 2.5 er en litt forenklet versjon av det kommersielle entalpiediagrammet for kjølemediet R-134a som anvendes i vår varmepumpe. Det kommersielle diagrammet finner dere i figur 2.9 side 21.

Først litt kommentarer til selve diagrammet:

Som det fremgår av navnet er trykket  $p$  fremstilt i en logaritmisk skala – på utsnittet ser vi at skalaverdiene går fra ca. 80 bar – et svært høyt trykk, rundt 30 ganger trykket i en bilslange – til 0,08 bar som omtrent er lufttrykket ved 15000 m.o.h. En isobar vil være representert med ei horisontal linje.

Entalpien representerer energi, og energiinnholdet i kjølemediet øker når vi beveger oss mot høyre i diagrammet og avtar når vi beveger oss mot venstre. Energien er gitt per masseenhed av kjølemediet, derfor enheten kJ/kg. Avgitt eller opptatt energimengde mellom to tilstander er gitt som differansen mellom entalpiverdiene; f.eks. har kjølemediet opptatt ca.  $(418 - 230) \text{ kJ/kg} = 188 \text{ kJ/kg}$  ved å gå fra tilstand 4 til 1 på diagrammet i figur 2.5. Innenfor det mørkere arealet eksisterer kjølemediet som en blanding av væske og damp, relativ dampmengde går fra 0 som er mettet væske til 1,0 som er mettet damp. De skrå linjene representerer kurver for konstant relativ dampmengde, andelen angitt med tall nederst.

Isotermene representerer kurvene for konstant temperatur. En isoterm (eksempelvis den stiplede  $-20^\circ$ -isotermen i figuren) følger den angitte kurva i gassen til høyre og inne i området med likevekt væske-damp går isotermen langs en isobar fordi enhver tilføring av varme ikke gir temperaturøkning men fordamping av væske. Når det er 100% væske vil isotermen følge en isoentalp når vi regner væska inkompressibel. Dette skyldes at enhver varmetilførsel ( $\Delta H$ ) i ei inkompressibel væske må gi temperaturøkning, ingenting kan tas opp som volumendring.

Den siste kurveskaren i  $\log p$ - $H$ -diagrammet er isoentropene som representerer konstant entropi. En reversibel adiabatisk prosess er isentropisk, isentropene representerer derfor reversible prosesser uten varmeoverføring. Prosessen 1–2 er eksempel på dette; kompressorens komprimering er tilnærmet isentropisk med energitilførsel lik arbeidet  $W_C$ .

På kurva er plottet inn målepunkter merket \* fra et virkelig forsøk med ei varmepumpe av vår type. Numeriske verdier for disse er vist i tabell 2.1.<sup>3</sup>

Referert til figurene 2.2 og 2.5 er nå

**Punkt 1** gitt ved tilstanden til kjølemediet ved inngangen til kompressoren, dvs. der hvor  $20^\circ$ -isotermen krysser 3,0 bar-isobaren.

**Punkt 2** er utgangen av kompressoren og er gitt ved kryssing mellom  $58^\circ$ -isotermen og 10,5 bar-isobaren. Dette punktet kan også finnes ved å følge isentropen gjennom punkt

---

<sup>3</sup>For å skille mellom tid og temperatursymboler bruker vi her og i det følgende  $T$  for å indikere temperatur målt i  $^\circ\text{C}$  – normalt skal  $T$  brukes om absolutt temperatur målt i K(elvin).

Tabell 2.1: Typiske verdier for temperaturer og trykk i kjølemediet. Verdiene basert på målte verdier når varmepumpa er i arbeid. Merk at avleste verdier på trykkmålerne er relativt ytre lufttrykk, som vi antar er 1,0 atmosfære. For symbolene refereres til figur 2.5.

Parameter	Symbol	Verdi
Trykk fordamperside (“cold”)	$p_c$	2,0 bar + atmosfæretrykket = 3,0 bar
Trykk kondensatorside (“hot”)	$p_h$	9,5 bar + atmosfæretrykket = 10,5 bar
Temp. ved inngang kompressor	$T_1$	+20°
Temp. ved utgang kompressor	$T_2$	+58°
Temp. ved inngang ekspansjonsdyse	$T_3$	+24°
Temp. ved utgang ekspansjonsdyse	$T_4$	+1,5°
Temp. vannbeholder fordamperside	$T_c$	+2,6°
Temp. vannbeholder kondensatorside	$T_h$	+30,5°

1 til kryssing 10,5 bar-isobaren.

**Punkt 3** er inngangen til ekspansjonsdysen og er gitt ved kryssing mellom 24°-isotermen og 10,5 bar-isobaren.

**Punkt 4** finnes ved å følge isoentalpilinja gjennom 3 nedover inntil den krysser 3,0 bar-isobaren. I dette punktet skal også isotermen for den målte temperaturen +1,5° finnes, og vi ser at det stemmer rimelig bra. Deretter kan vi følge isobaren for 3 bar tilbake til punkt 1 og vi kan nå tegne opp syklusen ved å trekke rette linjer 2–3, 3–4 og 4–1 samt ei linje som går tilnærmet parallelt med isentropen fra 1 til 2.

## 2.2 Forhåndsoppgaver

### 2.2.1 Virkningsgrad

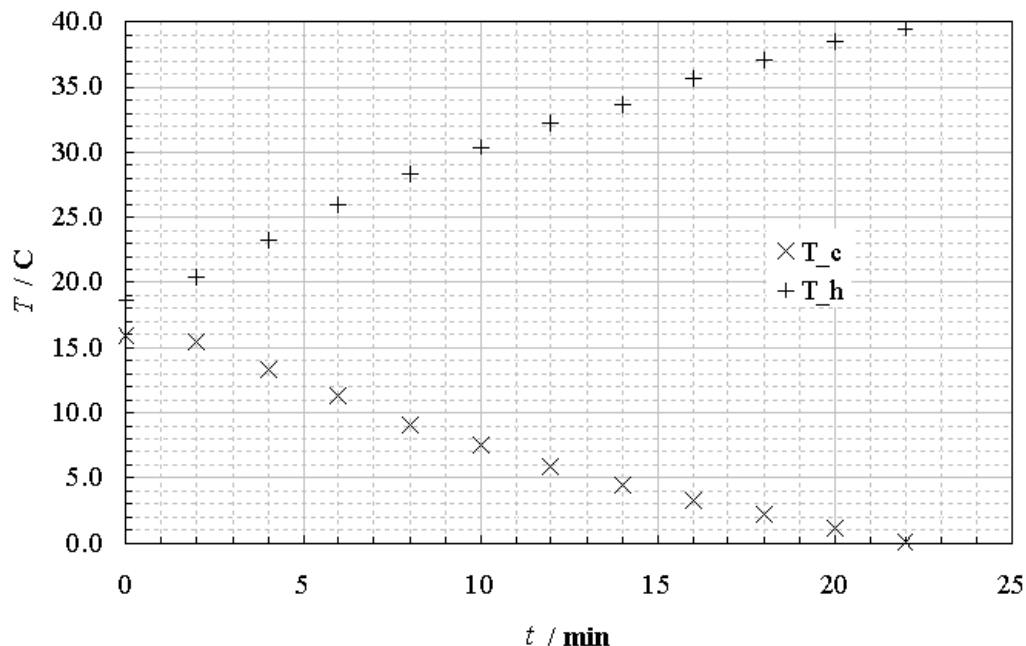
Ei lita varmepumpe av samme type som du skal bruke i eksperimentene i avsnitt 2.3 brukes til å pumpe varme mellom to beholdere, hver med 4,00 l vann. Temperaturutviklingen i beholderne over en periode på 15 minutter er vist i figur 2.6. I løpet av denne perioden trakk kompressoren en gjennomsnittseffekt på 200 W.

1. *Bestem virkningsgraden for pumpa s.f.a. temperaturforskjellen  $\Delta T_h \equiv T_h(t) - T_h(0)$ . Finn verdi for 3-4 punkter. Neglisjer varmetap til omgivelsene. Oppgitt: Vannets varmekapasitet er 4,2 kJ/(kg K) og vannets massetetthet 1,00 kg/l rundt disse temperaturer.*

2. *Bestem tilsvarende virkningsgrad for ei ideell Carnotvarmepumpe.*

### 2.2.2 Kretsløpsanalyse

3. *Tegn opp ei damptrykkurve for kjølemediet R134a basert på  $\log p$ - $H$ -diagrammet i figur 2.9 side 21. Ei damptrykkurve viser hva damptrykket er (i kPa) som funksjon av temperaturen,*



Figur 2.6: Temperaturutvikling i henholdsvis varm ( $T_h$ ) og kald ( $T_c$ ) vannbøtte for ei varmepumpe, som funksjon av tida.

*når det er likevekt mellom damp og væske (mettet damp). Bruk fortrinnsvis enkeltlogaritmisk papir.*

På varmepumpa er det blitt gjort målinger på kjølemediet som vist i tabell 2.1 (side 13). Temperaturene ble målt på overflata til kopperrørene som utgjør kretsløpet.<sup>4</sup>

4. *Hvor i syklusen er det størst utveksling av energi?*
5. *Hvor mye energi blir tilført kjølemediet under kompresjonen?*
6. *Beregn virkningsgraden for varmepumpa når du antar at all energi som tilføres kompressoren går til å komprimere gassen. Sammenlikn resultatet med virkningsgraden beregnet i avsnitt 2.2.1 (målt verdi og teoretisk beregnet). Gi en forklaring på eventuelle forskjeller i de funne verdier.*
7. *Estimer massetransporten i kretsløpet i gram/minutt.*

<sup>4</sup>Vi må anta at temperaturen i kjølemediet innenfor målepunktet er den samme som målt temperatur. Der hvor kjølemediet er flytende er denne antakelsen sannsynligvis brukbar, men der hvor kjølemediet er i gassform forventes et ikke-neglisjerbart temperaturfall fra kjølemediet til overflata av kopperrøret. Måleresultatene som er angitt i tabellen forventes derfor å være systematisk noe lave der hvor kjølemediet er i gassform.

## 2.3 Eksperimentelt

### 2.3.1 Apparat

Følgende instrumenter inngår i oppstillingen:

- Danfoss TL3G kompressor på 100 W, kjølevæske R-134a
- ETECH PM30 Effektmåler med presisjon på  $\pm 1$  W
- Rørepinner og bølter med sirkuleringsslange

I den følgende forklaring vises til bildet i figur 2.7 (side 16).

Vi leser av følgende temperaturer på digitaltermometrene som er montert i panelet øverst: Før ( $T_1$ ) og etter ( $T_2$ ) kompressoren, før ( $T_3$ ) og etter ( $T_4$ ) ekspansjonsdysen og i vannbeholderne ( $T_c$ ,  $T_h$ ).

To manometre ( $p_c$  og  $p_h$ ) for trykkmåling er montert inn i systemet. Trykket i bar leses av på ytterste skala. Trykket er gitt i forhold til atmosfæretrykket som settes til 1,0 bar og atmosfæretrykket må legges til når vi skal plote trykket i entalpidiagrammet. Innenfor trykkskalaen på manometrene har vi temperaturskalaer som viser doggpunktet/kokepunktet for angjeldende trykk for forskjellige kjølemedier – vi må bruke skala som er merket R-134a, som er vårt kjølemedium.

Vannreservoarene (bøttene) står på svingbare hyller - de to spiralene inne i bøttene er vist ved hjelp av digital bildemanipulering. De to uttakene på sidene av enkelte bølter kan brukes i tilfelle vi ønsker å kjøre vann kontinuerlig. Bruk blå bøtte ved fordamperspole (FS), da vannet her blir kaldt; og rød bøtte ved kondensatorspole (KS), da vannet her blir varmt.

Filteret tar bort og kondenserer eventuelle gassrester i kjølemediet som nå er i væskeform. Under passasjen fra fordamper (FS) til kompressor varmes kjølemediet opp til omtrent romtemperatur før den ved fullført kretsløp går inn i kompressoren. Varmepumpa er koplet til nettet via et wattmeter som viser den elektriske effekten som sendes inn. I tillegg kan vi lese av tid, energiforbruk, strøm, spenning og kostnad.

Prosessen i varmpumpa reguleres av to kontrollsystemer:

1. Åpningen av ekspansjonsventilen blir styrt av temperaturforskjellen mellom temperaturen i kjølemediet ved inngang og utgang fra fordamperen. Kontrolleren er den tynne kveilen som dere ser på toppen av ekspansjonsventilen. Denne svært viktige kontrollfunksjonen sikrer at trykkfallet fra  $p_h$  til  $p_c$  blir riktig.
2. Trykket på kondensatorsiden blir overvåket av regulatoren slik at kompressoren slås av hvis trykket overstiger 16 bar. Hvis dette skjer vil dere ikke kunne starte kompressoren på nytt før trykket har falt til 9 bar. *Fra damptrykkkurva i figur 2.5 ser vi at damptrykket vil være ca. 16 bar ved ca.  $+60^\circ\text{C}$  på kondensatorsiden. Vi kan lett oppnå denne temperaturen hvis vi kjører varmpumpa for lenge eller uten vann i beholderen på kondensatorsiden. Dette bør vi unngå under eksperimentet.*





Figur 2.7: Varmepumpa. FS = fordamperspøle, KS = kondensatorsøle. De øvrige symboler er forklart i teksten.

### 2.3.2 Innledende observasjoner

Svar på følgende spørsmål før du slår på varmepumpa første gangen:

1. *Hvilket trykk forventer du at det skal være i kretsløpet før kompressoren starter? - På kondensatorsida, enn på fordampersida?* Baser svaret på  $\log p$ - $H$ -diagrammet i figur 2.9 eller kurva du tegnet i oppgave 3 i avsnitt 2.2.2.
2. *Les av trykket på manometrene og sjekk ditt svar.*
3. *Er kjølemiddelet i væske eller dampform?*
4. *Sjekk om manometrenes temperaturskala for R-134a stemmer med damptrykkkurva du har funnet i oppgave 3 i avsnitt 2.2.2.*

### 2.3.3 Målinger

1. Fyll vann med temperatur rundt  $15^{\circ}\text{C}$  i begge bølter og start pumpa når dere er klar til å begynne målingene. Mål volumet av vann du fyller opp.  
*Rør meget godt i bøttene under kjøringen – spesielt i den kalde bøtta hvor det lett kan danne seg is nær spiralen. NB! Hvis dere rører godt vil dere kunne få temperaturer under  $0^{\circ}\text{C}$  i den kalde bøtta, vannet er da underkjølt og straks røringen stopper vil vannet fryse.*
2. Mål temperaturen i bøttene med 2 minutters mellomrom i minst 25 minutter. Samtidig som bøttetemperaturen  $T_c$  og  $T_h$  måles, mål også temperaturene på rørene før og etter kompressor ( $T_1$  og  $T_2$ ), før og etter ventil ( $T_3$  og  $T_4$ ), manometerverdiene  $p_c$  og  $p_h$  og den elektriske effekten  $P$  i watt. Plott temperaturutviklingen i de to bøttene i samme graf omlag som grafen i figur 2.6.
3. Beregn teoretisk virkningsgrad  $\eta_C(\Delta T)$  (for en Carnotprosess) og eksperimentell virkningsgrad  $\eta(\Delta T)$  etter 2, 10, og 22 minutter fra start.  
Fra ligning (2-5) (her må temperatur selvsagt angis i kelvin!)

$$\eta_C = \frac{T_h}{T_h - T_c} = \frac{T_h}{\Delta T}. \quad (2-8)$$

Eksperimentell virkningsgrad fra ligning (2-4):

$$\eta = \frac{Q_2}{W_C} = \frac{c m_h \Delta T_h}{P \cdot t}, \quad (2-9)$$

hvor  $c$  er spesifikk varmekapasitet for vann ( $4,2 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ ),  $m_h$  er massen av vannet i den varme bøtta,  $\Delta T_h$  er temperaturøkningen i den varme bøtta,  $P$  er den elektriske effekten inn til kompressoren og  $t$  er tida som er forløpt.

4. Tegn syklusen inn i det vedlagte  $\log p$ - $H$ -diagrammet med verdiene etter 10 minutter.  
Bestem  $\eta$  fra forholdet mellom kondensasjonsvarme og tilført energi slik det fremkommer på ditt  $\log p$ - $H$ -diagram (Tips: Se figur 2.4 og ligning (2-4)).

Dere vil ventelig få en virkningsgrad som er vesentlig høyere enn den som er målt ovenfor, kan du gi en forklaring på dette?

5. Hvordan ser kretsprosessen ut ved start når de to temperaturene er tilnærmet like?

### 2.3.4 Diskusjon

- Hva er fordampingsvarmen for kjølemediet ved  $0^{\circ}\text{C}$  og ved  $40^{\circ}\text{C}$ ?
- Hva er kondensasjonsvarmen for kjølemediet ved de samme temperaturer?
- Vurder muligheten av å vinne energi fra lufta med denne varmepumpa.

### 2.3.5 Avslutning

- Slå av varmepumpa, tøm vann fra bøttene, sett dem på plass og tørk opp eventuelt vannsøl.
- Lever journalen til laboratorielæreren for godkjenning.

## 2.4 Tillegg:

### Krav til og klassifikasjon av kjølevæsker

#### Krav til kjølemedier:

- Ved romtemperatur skal damptrykket være 2–6 atm. dvs. kokepunktet skal ligge rundt romtemperatur for noen få atmosfærers trykk. Vann,  $\text{H}_2\text{O}$ , er derfor ubrukelig da damptrykket er 24 mmHg (3,2 kPa eller 0,032 atmosfærer) ved romtemperatur.
- Høy fordampingsvarme.
- Ikke miljøskadelig.

Det finnes mange medier som oppfyller de to første av disse kravene.

R-717 (Ammoniakk –  $\text{NH}_3$ ) er egentlig svært optimalt ut i forhold til de første kravene og ble brukt i de første kjølesystemer. Dessverre er ammoniakk giftig og etsende slik at etter noen ulykker ble den forbudt i private anlegg. I industriell kjølesammenheng er fremdeles ammoniakk i bruk.

Freongassene R-12 og R-22 tok deretter over som kjølemedium i mange år og alle var fornøyd inntil man oppdaget at disse gassene ødelegger atmosfærens ozon. I de senere år er det blitt utviklet flere nye kjølemedia som er vesentlig mindre aggressive. Blant disse er R-134a ( $\text{C}_2\text{H}_2\text{F}_4$ ) som vi skal bruke i denne oppgaven.



Tabell 2.2 viser egenskapene til noen kjølemedia. R-407c og R-410a er mest brukt i luft-luft varmepumper i Norge i dag. R-134a er litt dårligere som kjølemedium på grunn av høyere kokepunkt og lavere damptrykk og brukes til formål med midlere kjølekrav som kjøleskap, luftkondisjoneringer i biler etc. R-22 og R-12 er som nevnt ikke lenger tillatt brukt.

Tabell 2.2: De viktigste egenskapene til noen kjølemedia. Blanding betyr at flere kjølemedia er benyttet, f.eks. er R-410a sammensatt av like deler R-32 ( $\text{CH}_2\text{F}_2$ ) og R-125 ( $\text{C}_2\text{F}_5\text{H}$ ).

Navn	Kjemisk formel	Kokepkt ( $^{\circ}\text{C}$ ) v/ 1 atm	Væske: Varmekap. (kJ/(kg K))	Damp: Varmekap. (kJ/(kg K))	Damptrykk (kPa) v/ $25^{\circ}\text{C}$	Ford.varme (kJ/kg) (v/ k.p.)
R-134a	$\text{C}_2\text{H}_2\text{F}_4$	-26,5	1,42	0,854	662	215
R-407c	(blanding)	-43,6	1,54	0,83	1174	
R-410a	(blanding)	-51,5	1,84	0,83	1653	
R-22	$\text{CHClF}_2$	-40,8	1,24	0,657	1043	
R-12	$\text{CCl}_2\text{F}_2$	-21,6	0,97	0,617	652	
Propan	$\text{C}_3\text{H}_8$	-42		1,68	950	431
Ammoniakk	$\text{NH}_3$	-33	2,1	2,06	1001	1368
Karbon- dioksyd	$\text{CO}_2$	-78 (sublim.)	0,83	0,84	6400	573
Vann	$\text{H}_2\text{O}$	+100	4,2	1,89	3,17	2257
Propan	$\text{C}_3\text{H}_8$	-42		1,68	950	431

### Klassifikasjon av kjølemedier:

Kjølevæsker består av karbonforbindelser ved et ulike antall C-atomer og med hydrogen (H), freon (F), klor (Cl) eller bor (B) på sidegreinene (noen unntak, bl.a.  $\text{NH}_3$  og  $\text{CO}_2$ ). For ikke-sykliske C-kjeder er totalt antall sidegreiner lik (antall C  $\times$  2 + 2). Dette må da være lik summen av antall H, F, Cl og B-atomer.

Væskene klassifiseres etter en kodebetegnelser gitt av en internasjonal standard ISO/TC86-WG-1. Koden har formen:

$$\text{RC-}xyz \text{ Bu,}$$

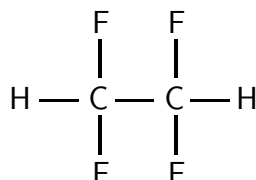
der

- R betegner at forbindelsen er kjølevæske,
- C betegner at forbindelsen er syklisk (C droppes for ikke-sykliske forbindelser),
- $x$  betegner (antall C-atomer - 1) i formelen (når  $x = 0$  droppes  $x$  fra koden),
- $y$  betegner (antall H-atomer + 1) i formelen,
- $z$  betegner antall F-atomer i formelen,
- B betegner at forbindelsen inneholder B-atomer der  $u$  betegner antall B-atomer (når  $u = 0$  droppes Bu fra koden),

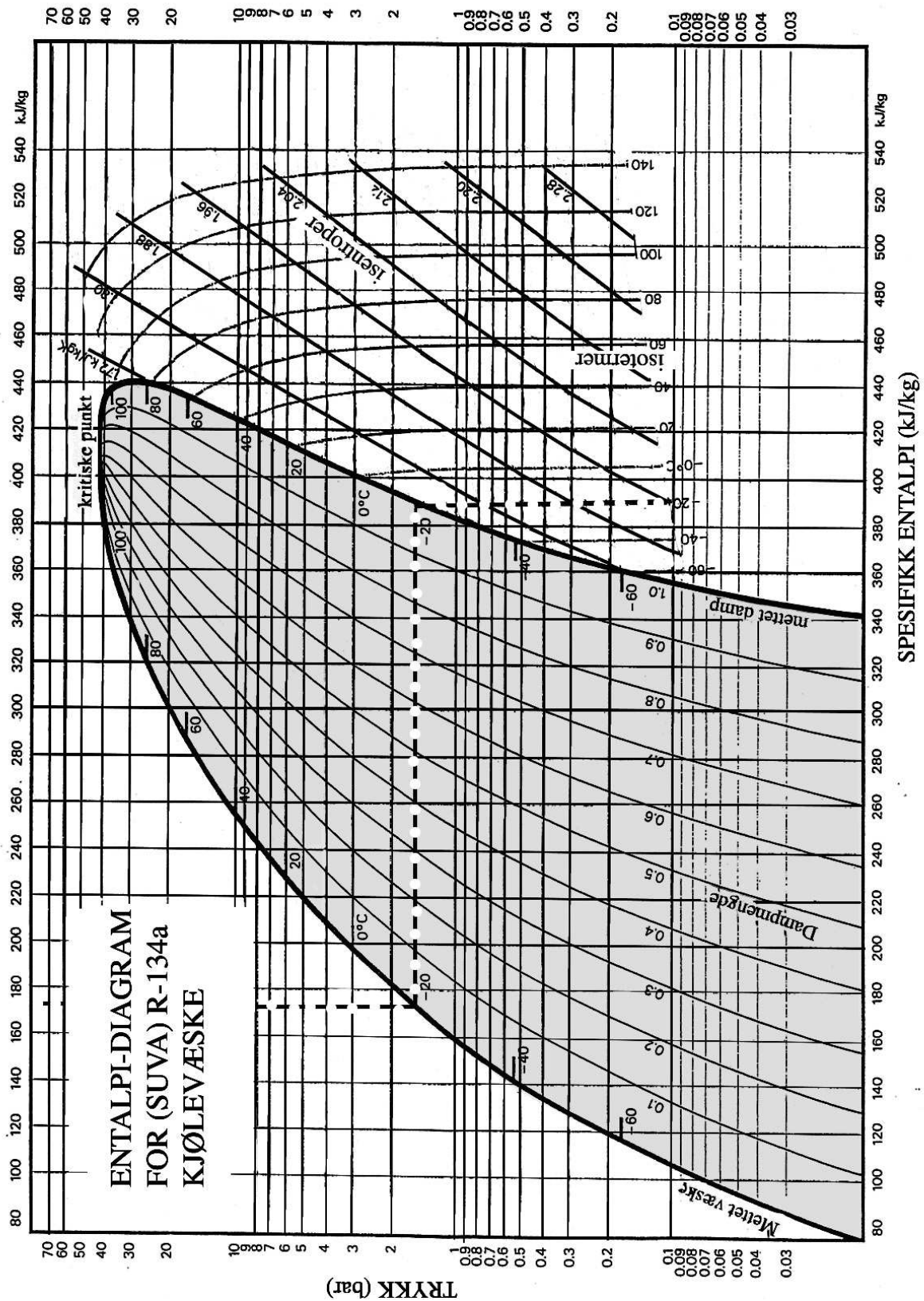
- antall Cl-atomer i den kjemiske formelen kan finnes ved at summen av antall (H, F, Cl og B)-atomer er lik totalt mulige sidegreiner i C-kjeden.

**Eksempel:** R134a:

Ikke-syklisk,  $(1+1) = 2$  C-atomer,  $(3-1) = 2$  H-atomer og 4 F-atomer. Mulige sidekjeder er  $2 \times 2 + 2 = 6$  som er brukt opp av H og F slik at det er ingen Cl eller B-atomer. Kjemisk formelen er  $C_2H_2F_4$  og strukturen er vist i figure 2.8:



Figur 2.8: Molekularstruktur av R134a (1,1,1,2-Tetrafluoroethan).



Figur 2.9: Det kommersielle  $\log p$ - $H$ -diagram for R-134a kjølevæske. Diagrammet er litt forenkla ved at vi har fjerna et kurvesett (isokorene) som er uaktuelt i denne oppgaven. I tillegg er halvparten av isentropene fjerna.



# Kapittel 3

## SPESIFIKK VARMEKAPASITET TIL METALLER

### Hensikt

Hovedhensikten er å bestemme den spesifikke varmekapasiteten til en metallprøve. Noen andre mål med laboppgaven er:

- Å forstå fysiske begrep og matematiske sammenhenger som inngår i varmeopptak av og varmeavgivelse fra objekter
- Å innse betydningen måling av varmekapasitet har hatt for utviklingen av kvanteteori
- Å lære å tilpasse teoretiske uttrykk til eksperimentelle data, konvertere fra en enhet til en annen og å bli oppmerksom på både verdien og begrensningen av en vitenskapelig modell.

### 3.1 Teoretisk bakgrunn

#### 3.1.1 Introduksjon til kalorimetri

Den spesifikke varmekapasiteten (også kalt den spesifikke varmen) til et stoff, vanligvis betegnet ved  $c$ , er definert som den mengden varme som trengs for å øke temperaturen til en masseenhet av stoffet med  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  (eller  $1\text{ K}$ ); verdien er avhengig av den initiale temperaturen. Det vil si at hvis at en gitt varmemengde øker temperaturen til et legeme (med masse  $m$ ) fra  $T_1$  til  $T_2$ , så er den gjennomsnittlige spesifikke varmekapasiteten  $\bar{c}$  gitt ved  $Q/m(T_2 - T_1)$ ; hvis temperaturen øker bare litt, fra  $T$  til  $T + \Delta T$ , så er den spesifikke varmekapasiteten ved temperaturen  $T$  gitt ved  $(1/m)(\Delta Q/\Delta T)$ . Varmekapasiteten til et legeme er produktet av dets masse og spesifikke varme.

I det følgende skal vi ta for oss en metode for blandinger. Den varmemengden som ønskes målt overføres da til en kjent mengde vann i en isolert beholder (kalt kalorimeter) med kjent varmekapasitet og så måle den resulterende temperaturendringen. Anta at et legeme med masse  $m_1$ , spesifikk varmekapasitet  $c_1$  og initiell temperatur  $T_i$  puttes i vann (med masse  $m_2$ , spesifikk varme  $c_2$  og temperatur  $T'$ ), og la  $W$  og  $T_f$  være henholdsvis varmekapasiteten til kalorimeteret og sluttemperaturen til blandingen. Siden varmen avgitt fra legemet må være lik varmen tatt opp av kalorimeteret og vannet, får vi:

$$m_1 c_1 (T_i - T_f) = (m_2 c_2 + W)(T_f - T'), \quad (3-1)$$

slik at

$$c_1 = \frac{(m_2 c_2 + W)(T_f - T')}{m_1 (T_i - T_f)}, \quad (3-2)$$

Denne sammenhengen danner grunnlaget for bestemmelsen av spesifikk varmekapasitet, men for presise målinger trenger man ulike korreksjoner for å kompensere for varmetap fra systemet til omgivelsene.

Noen ganger kan det være mer hensiktsmessig å uttrykke den spesifikke varmekapasiteten ved bruk av molar varmekapasitet. Det er rett og slett energien som trengs for å øke temperaturen til ett mol av materialet med en grad Celcius eller Kelvin. Molar varmekapasitet er vanligvis betegnet ved symbolet  $C$ , og man legger til et subscript ( $p$  eller  $v$ ) for å spesifisere hvilken parameter (trykk eller volum) som holdes konstant ved temperaturendring.

### 3.1.2 Klassisk betraktning av spesifikk varmekapasitet (basert på kinetisk teori)

Hvis man anser atomene i en monoatomisk gass som strukturløse punktmasser, hver med tre frihetsgrader, da vil ett mol av gassen til sammen ha  $3N$  frihetsgrader, der  $N$  er antallet molekyler i i ett mol av gassen. I tilfellet med en ideell gass vil ikke molekylene ha noe potensiell energi, og total energi til ett mol av en monoatomisk gass vil derfor være:

$$E = 3N \times \frac{1}{2} k_B T = \frac{3}{2} RT \quad (3-3)$$

som fører til følgende uttrykk for molar spesifikk varmekapasitet:

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3}{2} R. \quad (3-4)$$

For alle ideelle gasser er  $C_p - C_v = R$ , noe som medfører at

$$C_p = \frac{5}{2} R. \quad (3-5)$$

Disse uttrykkene er i ypperlig overensstemmelse med oppførselen til edle gasser.

I en klassisk beskrivelse er molekylene i en to-atomig gass fast bundet til hverandre. Når man anser atomene som punkter, vil hvert molekyl ha tre frihetsgrader for translasjon og to for rotasjon om de to aksene som er vinkelrett til den interatomære aksene. Argumentasjonen for å ignorere en frihetsgrad for rotasjon var noe usikker, men vi skal ikke gå

inn på det i detalj her. Vi ender dermed opp med at den totale energien til ett mol av en slik gass vil være  $E = \frac{5}{2}RT$ , og

$$C_v = \frac{5}{2}R, \quad C_p = \frac{7}{2}R. \quad (3-6)$$

Dette er tilnærmelsesvis gyldig for noen gasser rundt 300 K. Hovedproblemet her er at spesifikk varmekapasitet er forutsatt å være uavhengig av temperatur, og denne forutsetningen bekreftes ikke av eksperimentelle observasjoner (se under).

Samme tankegang kan brukes for å finne et uttrykk for molar varmekapasitet til faste stoffer. En krystall som består av  $N$  atomer vil ha  $3N$  vibrasjonsmoder og totalt  $6N$  frihetsgrader. Hver frihetsgrad har et energiinnhold på  $\frac{1}{2}k_B T$ , og den molare varmekapasiteten blir dermed  $C_v = 3R$ ; en sammenheng som er kjent som Dulong og Petits lov. Imidlertid viser målinger at den spesifikke varmekapasiteten til faste stoffer er avhengig av temperaturen, og at endringen er spesielt stor ved lave temperaturer. Til og med ved romtemperatur er den molare varmekapasiteten til noen stoffer, inkludert diamant (eksempel brukt av Einstein), signifikant mindre enn  $3R$ .

Lenge før slutten av det nittende århundre ble det åpenbart at variasjonen i spesifikk varmekapasitet for gasser og faste stoffer ikke kunne forklares ved bruk av teorier som ellers hadde vist seg å være vellykket. Det første viktige steget mot en tilfredsstillende forklaring av fenomenet, i det minste når det gjelder faste stoffer, ble utført av Einstein.

### 3.1.3 Einsteins teori om varmekapasiteten til faste stoffer

Einstein antok at en krystall som består av  $N$  atomer kan anses som et samling av  $3N$  atskilte en-dimensjonale oscillatorer, og tilføyde et krav om at energien til hver oscillator er kvantisert i henhold til følgende ligning

$$E = kh\nu = kE_1 = E_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-7)$$

Den gjennomsnittlige energien til en enkelt oscillator blir

$$\langle E \rangle = \frac{E_1 e^{-E_1/k_B T} + E_2 e^{-E_2/k_B T} + \dots}{1 + e^{-E_1/k_B T} + e^{-E_2/k_B T} + \dots} = \frac{E_1 e^{-E_1/k_B T}}{1 - e^{-E_1/k_B T}} = \frac{E_1}{e^{E_1/k_B T} - 1}. \quad (3-8)$$

Derav følger resultatet utledet av Einstein:

$$C_v = 3R \left( \frac{E_1}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{-E_1/k_B T}}{[1 - e^{-E_1/k_B T}]^2} = 3R \left( \frac{E_1}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{E_1/k_B T}}{[e^{E_1/k_B T} - 1]^2}. \quad (3-9)$$

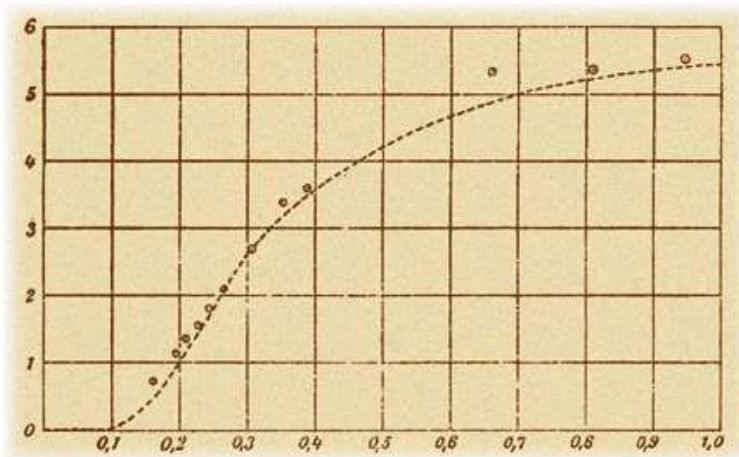
Du bør overbevise deg selv om at  $C_v$  går mot null når temperaturen går mot null, og at man oppnår Dulong og Petits lov ved høye temperaturer. Det er vanlig å bruke  $\Theta_E = E_1/k_B$ , og referere til  $\Theta_E$  som Einsteintemperaturen til det aktuelle stoffet.

## 3.2 Forhåndsoppgaver

*Disse oppgavene skal du gjøre som en forberedelse til laboratorieøvingen. Du skal vise frem og få godkjent forhåndsoppgavene av labassistenten før øvingen begynner.*

### 3.2.1 Eksempel brukt av Einstein: diamant

Einstein brukte eksperimentelle data for diamant for å teste sin teori. Figuren og tabellen hans (fra side 186 og 190 i hans publikasjon) er gjengitt nedenfor. Merk at han brukte symbolet  $c$  i stedet for vår  $C_v$ .



Figur 3.1: Einstein plotta varmekapasiteten til diamant (sirkler) som en funksjon av temperaturen for å vise at atomære vibrasjoner er kvantisert. Benevnning for x-aksen er  $T/\Theta_E$ . Varmekapasiteten (y-aksen) er gitt i cal/(mol K). Den glatte kurva er basert på hans teori.

Tabell 3.1: Einsteins tabell

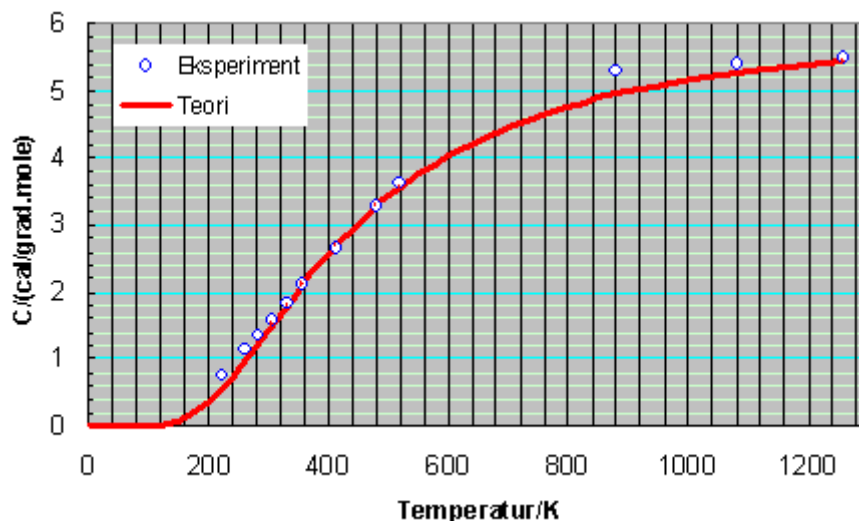
$T$	$c$	$x$
222.4	0.762	0.1679
262.4	1.146	0.1980
283.7	1.354	0.2141
306.4	1.582	0.2312
331.3	1.838	0.2500
358.5	2.118	0.2705
413.0	2.661	0.3117
479.2	3.280	0.3615
520.0	3.631	0.3924
879.7	5.290	0.6638
1079.7	5.387	0.8147
1258.0	5.507	0.9493

Du legger nok merke til at aksene i figuren til Einstein mangler benevnning, noe som ikke aksepteres i dag. På Einsteins tid, og også i lang tid senere, målte man varme i enheten kalorier. *Du skal finne sammenhengen mellom kalorier og Joule, som er den moderne enheten for varme, siden du vil trenge denne sammenhengen senere.* Den horisontale aksene i figuren tilsvarer  $x$  i hans tabell, som altså er den dimensjonsløse enheten  $T/\Theta_E$ . *En verdi i hans tabell er åpenbart feil, og den skal du finne og korrigere.*

1. Plott de eksperimentelle verdiene for  $C_v$  mot  $T$ . Ut i fra Einsteins tabell er det enkelt å finne hans verdi for  $\Theta_E$ . La oss likevel anta at den tredje kolonnen i hans tabell ikke er



tilgjengelig. Anslå en omtrentlig verdi for  $\Theta_E$  og bruk ligning (3-9) for å se på samsvaret mellom kalkulte verdier og eksperimentelle data. Ved bruk av prøve-og-feile-metoden vil du raskt komme frem til en verdi for  $\Theta_E$  som gir godt samsvar visuelt sett. Hvis du allerede vet hvordan du kan bruke Excel for kurvetilpasning kan du bruke det, men for akkurat denne oppgaven er ikke det nødvendig. Et resultat fra KRN er gjengitt i figur 3.2 og er et eksempel på hvordan denne oppgaven er løst. Vær oppmerksom på at man kan finne teoretiske verdier for alle mulige verdier av  $T$ , og at en glatt kurve bare kan oppnås ved å velge relativt mange temperaturer med liten avstand mellom hver verdi (noe som er enkelt hvis man bruker en datamaskin og f.eks. Excel).



Figur 3.2: Data for spesifikk varmekapasitet i Tabell 3.1 (diamant; Einstein) er plotta mot temperaturen  $T$ . Du kan reproducere den glatte teoretiske kurven ved å velge en egnet verdi for  $\Theta_E$ .

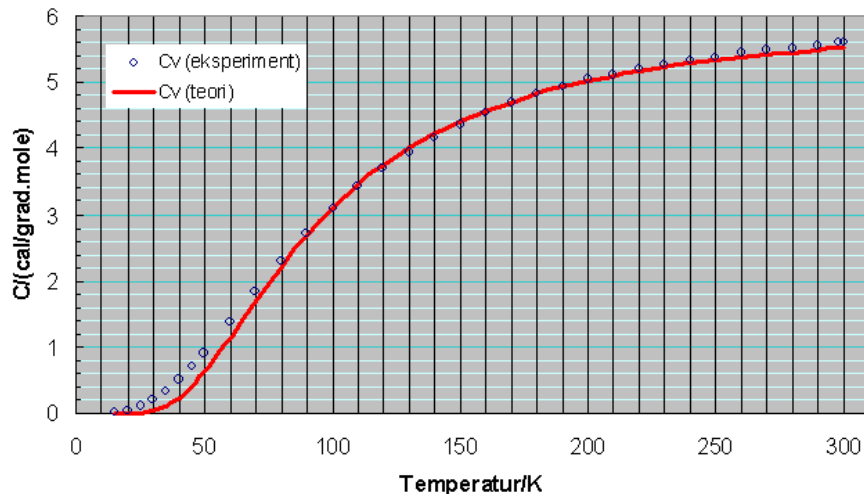
### 3.2.2 Data for aluminium

Nå skal vi ta for oss aluminium (symbol: Al). Vi starter med data fra Giauque og Meads, som målte den molare varmekapasiteten for Al fra 15 til 300 K. De brukte enhetene  $\text{Cal.deg}^{-1}\text{mole}^{-1}$ , og deres eksperimentelle data finnes i tabell 3.2.

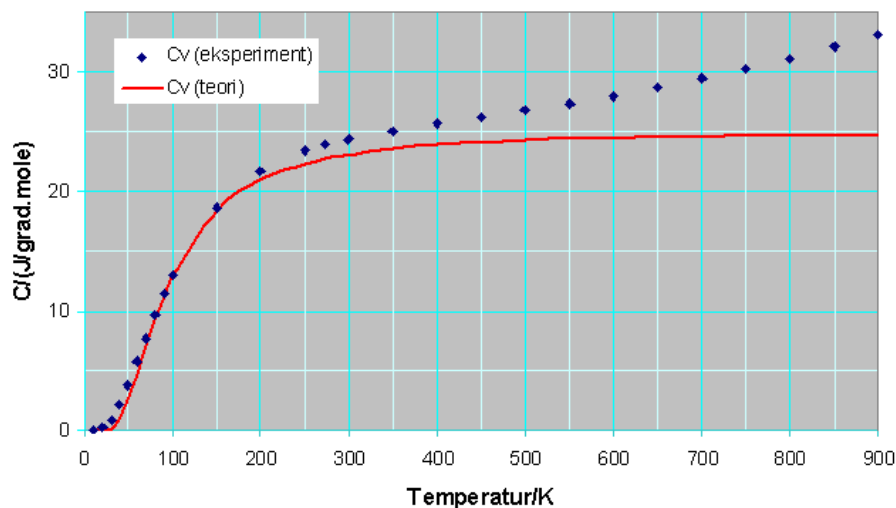
2. Konverter disse verdiene til moderne enheter, enten  $\text{J } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  eller  $\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ , og gjør tilsvarende kurvetilpasning for disse dataene som du gjorde for diamant. Du bør ende opp med en figur som ligner på den i figur 3.3. På dette stadiet skal du gjøre ditt valg for verdien på  $\Theta_E$  for aluminium.

Buyco og Davis presenterte et mer omfattende datasett over molar varmekapasitet for aluminium. Et utvalg av deres data, som dekker temperaturområdet fra 10–900 K, er gjengitt i tabell 3.3 og plottet i figur 3.4. Dataene for varmekapasitet ble gitt i  $\text{cal}/(\text{g.K})$ .

3. Du skal nå konvertere dataene til SI-enheter og gjøre tilsvarende kurvetilpasning som for diamant (og som for aluminium-dataene fra Giauque og Meads). Du vil se at uoverensstemmelsen ved høye temperaturer mellom eksperimentelle verdier og Einsteins teori ikke kan løses ved å velge andre verdier for  $\Theta_E$ . Hva kan være forklaringen på det?.



Figur 3.3: Et plott av data fra tabell 3.2 (Al; Giaque og Meads). Du kan reprodusere den glatte teoretiske kurven ved å velge en egnet verdi for  $\Theta_E$ .



Figur 3.4: Et plott av data fra tabell 3.3 (Al; Buyco og Davis). Du kan reprodusere den glatte teoretiske kurven ved å velge en egnet verdi for  $\Theta_E$ .

### 3.2.3 Spesifikk varmekapasitet til en to-atomig gass

Einsteins beskrivelse av et fast stoff er veldig lik (men ikke identisk) med dagens syn på en ideell gass av to-atomige molekyler. Vi vil forvente at et plott av  $C_v$  mot  $T$  for en slik gass ligner tilsvarende kurve for et fast stoff. Tabell 3.4 gir eksperimentelle verdier for  $C_p$  for  $F_2$ . Koverter disse dataene til  $C_v$  og lag et plott over  $C_v$  mot  $T$ . Sammenlign med figur 3.4 og kommenter likheter og ulikheter.

*Valgfri oppgave.* En analyse av vibrasjonsspektret til  $F_2$  gir at energien, i spektroskopiske enheter, til et vibrasjonskvant av et  $F_2$ -molekyl er  $711 \text{ cm}^{-1}$  (ved bruk av tilnærming med 0. ordens enkel harmonisk oscillator). Bruk denne informasjonen til å anslå verdier for  $C_v$ , og sammenlign dine verdier med de eksperimentelle resultatene.

### 3.3 Eksperimentelt

Eksperimentet vi skal gjøre på laboratoriet er ganske enkelt. Det viktigste utstyret er en elektronisk vekt, skissert i figur 3.5. En metallprøve, som ved start av forsøket har en temperatur nær romtemperaturen, senkes ned i flytende nitrogen, og mengden nitrogen som fordampes måles ved bruk av vekta. Denne mengden brukes så i en ligning for varmebalanse til å bestemme endringen i indre energi for metallprøven og einsteintemperaturen.



Figur 3.5: Skisse av den elektroniske vekta som brukes i eksperimentet.

To isoporkopper stablet oppi hverandre brukes som en isolert beholder. Litt flytende nitrogen (ca 25 g) tømmes i beholderen, som så plasseres på vekta sammen med metallprøven (som vi altså skal bestemme varmekapasiteten til, ved å finne einsteintemperaturen). En liten bit med tråd skal være festet til metallprøven. Vekta som vises vil gradvis avta som følge av fordamping av nitrogen. Noen få målinger (4-5 stk) med jevne mellomrom gjøres for å bestemme vektreduksjonsraten. Metallbiten senkes varsomt ned i beholderen ved at man holder i tråden. Derettes skal en ny serie med måledata gjøres, tilsvarende som i sted. Vent med målingene til kokingen har avtatt. Fra de to måleseriene skal man bestemme  $\Delta m$ , som altså tilsvarende mengden nitrogen som har fordampet som følge av at metallbiten ble nedkjølt (og dermed ga fra seg varme til nitrogen) fra initiell temperatur  $T_0$  til slutt-temperaturen  $T_f = 77$  K.

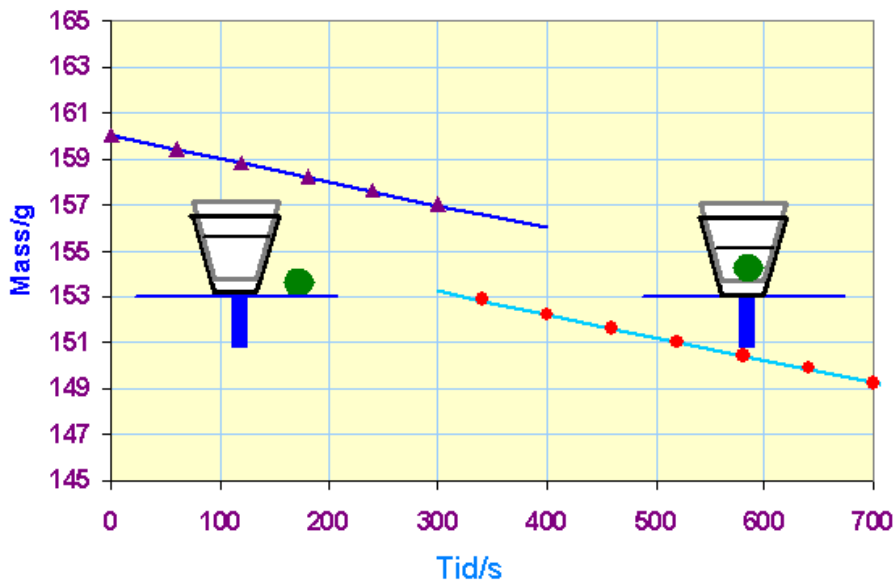
La  $L$  være den latente fordampingsvarmen til nitrogen; varmen tatt opp av flytende nitrogen,  $\Delta Q$ , vil da være lik  $L\Delta m$ . Det er allerede forklart hvordan varmetapet til metallbiten kan beregnes (se over). Bruk energibalanse til å utlede verdien av  $\Theta_E$  for aluminium. Siden  $\Delta Q$  også kan settes lik endring i indre energi til metallbiten, kan vi også bruke Einsteins modell:

$$\Delta Q = 3nR[T_0 \mathcal{E}(\Theta_E/T_0) - T_f \mathcal{E}(\Theta_E/T_f)], \quad (3-10)$$

der  $n$  er antall mol av prøven og

$$\mathcal{E}(y) = \frac{y}{e^y - 1}. \quad (3-11)$$

For å gjøre ting mer konkret, følger et eksempel. Noen reelle måledata er plottet i figur 3.6. Materialet var Al, med  $n = 0.21$  mol, og plottet antyder at  $\Delta m = 3.76$  g. Du kan anslå at  $T_0 = 290$  K (eller er den mindre siden metallbiten er blitt avkjølt ved siden av beholderen med flytende nitrogen?).



Figur 3.6: Figuren viser fordampingsraten til flytende nitrogen før (til venstre) og etter (til høyre) at metallprøven ble senket i beholderen.

Du skal forberede et ark i Excel for å tabulere og analysere måledataene i eksempelet over i henhold til ligning (3-8).<sup>1</sup> For å få gjort beregningene trenger du en verdi for  $L$ , og den må du finne. Du kan starte med  $L = 2 \times 10^5$  J/kg. Nå kan du finne  $\Theta_E$ . Er det i overensstemmelse med tilpasningen du gjorde for dataene til G&M (da du brukte ligning (3-9))? Hva er effekten av å endre  $L$  til f.eks.  $1.98 \times 10^5$  J/kg? Hva er effekten av å endre verdien av  $T_0$  til f.eks. 292 K? På lignende måte (ved å bruke ulike fornuftige verdier på usikre parametre) skal du anslå feilkildene i eksperimentet ditt og effekten disse har på din verdi for einsteintemperaturen til aluminium.

### 3.3.1 Datainnsamling og analyse

Gjør målinger som beskrevet over. Plot dataene dine for å se om de er som forventet; hvis ikke må du repetere eksperimentet.

<sup>1</sup>Det samme arket skal du bruke for å analysere egne måledata fra eksperimentet.

### 3.4 Data over spesifikk varmekapasitet for aluminium

Tabell 3.2: Molar varmekapasiteten for Al	
W. F. Giaque and P. F. Meads, <i>J. Am. Chem. Soc.</i> 63 (1941) 1897–1901	
Temperature	$C_v$ (expt)
K	Cal/(mol.K)
15	0.022
20	0.054
25	0.112
30	0.203
35	0.332
40	0.5
45	0.698
50	0.912
60	1.375
70	1.846
80	2.298
90	2.714
100	3.094
110	3.422
120	3.704
130	3.943
140	4.165
150	4.361
160	4.536
170	4.69
180	4.823
190	4.938
200	5.039
210	5.122
220	5.198
230	5.268
240	5.329
250	5.383
260	5.436
270	5.483
280	5.523
290	5.562
298	5.592
300	5.599

Tabell 3.3: Molar varmekapasiteten for Al					
E. H. Buyco and F. E. Davis, <i>J. Chem. Eng. Data</i> 15 (1970) 518–523					
Temperature	$C_v$ (expt)				
K	Cal/(g.K)				
10	3.269E-04				
20	1.992E-03				
30	7.608E-03				
40	1.848E-02				
50	3.371E-02				
60	5.097E-02				
70	6.851E-02				
80	8.536E-02				
90	1.010E-01				
100	1.152E-01				
150	1.655E-01				
200	1.922E-01				
250	2.070E-01				
273.15	2.116E-01				
298.15	2.156E-01				
300	2.159E-01				
350	2.222E-01				
400	2.273E-01				
450	2.321E-01				
500	2.370E-01				
550	2.421E-01				
600	2.478E-01				
650	2.539E-01				
700	2.606E-01				
750	2.679E-01				
800	2.758E-01				
850	2.844E-01				
900	2.935E-01				

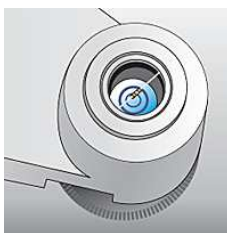
### 3.5 Spesifikk varmekapasitet for fluor

Tabell 3.4: Molar varmekapasiteten for F <sub>2</sub>	
M.W. Chase et al. J. Phys. Chem. Ref. Data 14/Supplement 1 (1985)	
Temperature	$C_p$ (expt)
K	J/(mol.K)
100	29.114
200	29.685
250	30.447
298	31.302
300	31.336
350	32.207
400	32.992
450	33.674
500	34.255
600	35.166
700	35.832
800	36.336
900	36.732
1000	37.057
1100	37.334
1200	37.579
1300	37.802
1400	38.008

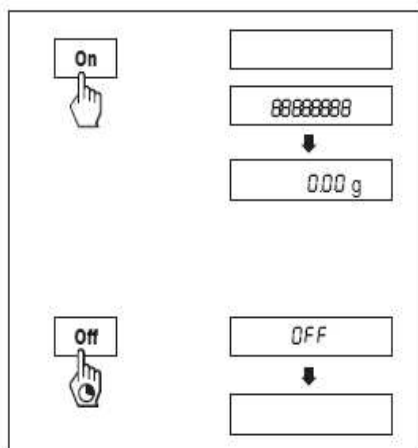
## 3.6 Håndtering av vekta

Å veie noe er en av de mest vanlige oppgavene i et laboratorie, en oppgave som er blitt vesentlig forenklet på grunn av teknologiske fremskritt. Likevel er det viktig å være oppmerksom på influerende faktorer og minimalisere disse. Slike faktorer kan være fysiske endringer i prøven (f.eks. fordamping eller opptak av fuktighet) eller krefter som kan påvirke enten veieskala eller prøven (magnetisme eller elektrostatiske krefter).

Still inn vekta ved å sørge for at luftbobla er i senter av nivåindikatoren, bruk de justerbare føttene.



Figur 3.7: Nivåindikator

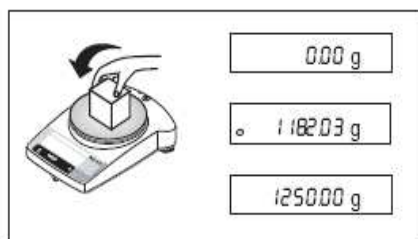


### Switching on

- Remove any load from weighing pan and press «On» key briefly.  
The balance performs a display test (all segments in the display light up briefly).  
When zero is displayed, the balance is ready for operation.

### Switching off

- Press and hold the «Off» key down until "OFF" appears in the display. Release the key.

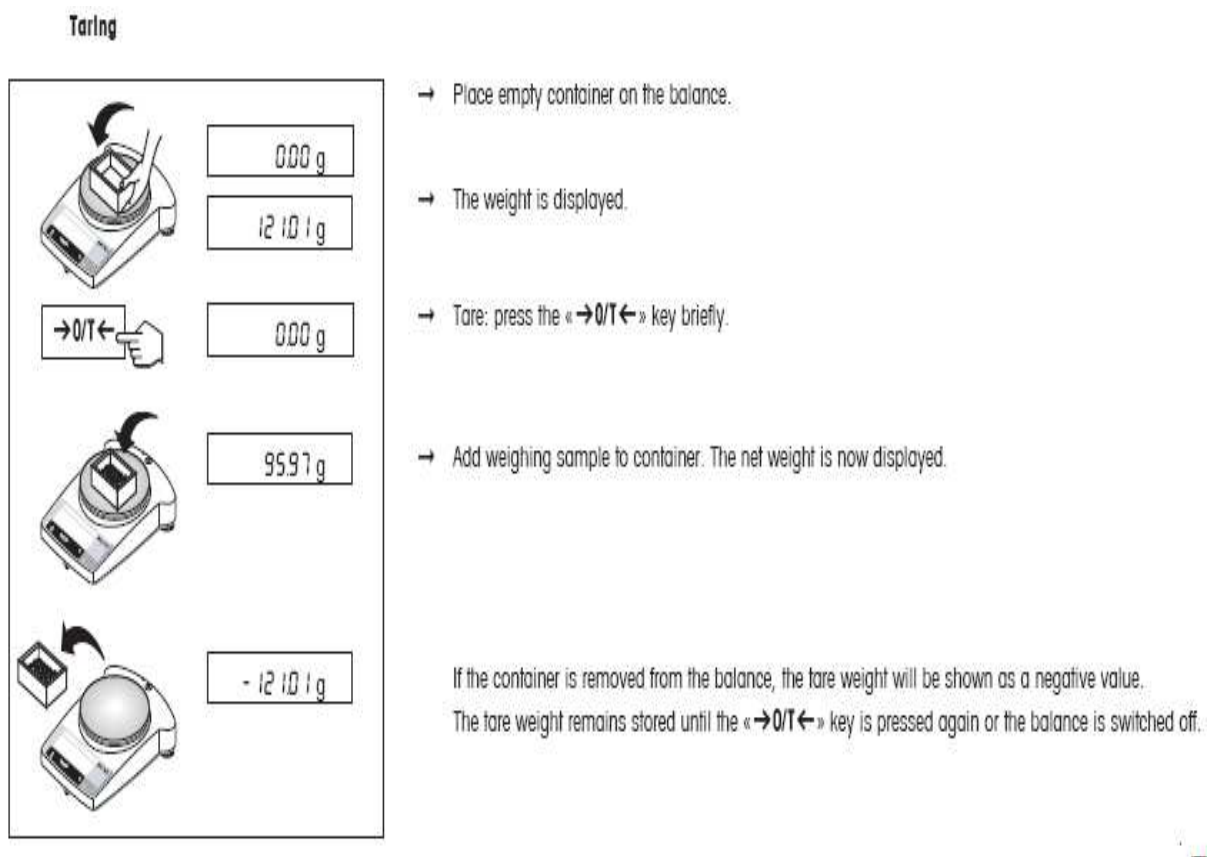


- Place weighing sample on the weighing pan.
- Wait until the stability detector "o" disappears.
- Read the result.

Figur 3.8: Instruksjon for å slå på/av vekta og hvordan foreta enkel måling



Hva menes med å tarere vekta? I følge en ordbok er det å 'oppveie vekten av en beholder el.lign. som noe skal veies i'. På et kjemilaboratorie veier man ofte beholderen først og nullstiller så vekta med beholderen på.



Figur 3.9: Hvordan tarere vekta.



# Tillegg A

## KURVETILPASNING

### Mål

Målet med dette tillegget er å lære studentene minste kvadraters metode og bruk av regresjonsanalyse på lineære og ikke-lineære funksjoner.

### A.1 Formulering av kurvetilpasningsproblemet

Vi står overfor følgende problem: Vi kjenner en matematisk modell for en sammenheng mellom en fysisk størrelse  $x$  og en annen størrelse  $y$ . For eksempel en enkel lineær sammenheng  $y(x) = a_0 + a_1x$  eller en eksponensiell sammenheng  $y(x) = a_0 + a_1 \exp(-k_1x)$ . Generelt kan sammenhengen skrives

$$y = y(x) = f(x, a_0, a_1, a_2, \dots), \quad (1-1)$$

hvor  $a_j$  er konstante parametre. I en måleserie har vi så funnet verdier av  $y$  s.f.a.  $x$ , og som resultat har vi fått et sett av  $N$  sammenhørende par av  $x$ - og  $y$ -verdier

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_i, y_i), \dots (x_N, y_N). \quad (1-2)$$

Kurvetilpasningsoppgaven består i å bestemme parametrene  $a_j$  slik at funksjonen  $y(x)$  best mulig beskriver målepunktene  $(x_i, y_i)$ . Kurvetilpasningen kan ofte med hell gjøres ved subjektive metoder basert på prøving og feiling f.eks. med øyemål og linjal. Imidlertid har subjektive metoder ofte dårlig reproduserbarhet og er uegnet til bruk i datamaskiner. Det er derfor også et behov for objektive matematisk formulerbare metoder. Slike skal beskrives her.

Én objektiv formulering av problemet er at for hvert punkt  $(x_i, y_i)$  som måles bør differansen

$$\Delta y_i = y(x_i) - y_i \quad (1-3)$$

være minst mulig. Men et krav til hvert enkelt målepunkt (totalt  $N$ ) er vanskelig å samordne.

## A.2 Minste kvadratsums prinsipp

Den etterhvert allment anerkjente standardløsningen på kurvetilpasningsproblemet formuleres matematisk ved å kreve at

$$S = \sum (\Delta y_i)^2 = \text{minimum}, \quad (1-4)$$

og bygger således på “de minste kvadraters” prinsipp. Legg merke til at  $\Delta y$ -ene går inn som kvadrater i uttrykket for summen  $S$ , derav navnet.

Det finnes andre mulige matematiske prinsipp som kan brukes for å bestemme “beste” kurve gjennom en punktskare. F.eks.  $\sum |\Delta y_i| = \min$ , eller  $\max |\Delta y_i| = \min$ , men disse fører som regel til mer kompliserte løsninger enn minste-kvadrater-prinsippet. Minste-kvadrater-prinsippet foretrekkes også av måletekniske grunner.

Når de tilfeldige feilene er normalfordelt viser det seg at minste-kvadrater-prinsippet gir den mest sannsynlige linja når funksjonen  $f(x, \dots)$  forventes å være lineær i parametrene.

Gjennomføring av minimaliseringsberegningen som følger av minste-kvadrater-prinsippet vil alltid involvere derivasjon m.h.p. parametrene  $a_i$  (se nedenfor). Så lenge funksjonen  $f(x, a_j)$  er av formen

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p \quad (1-5)$$

d.v.s. lineær i parametrene  $a_j$  ( $dy/da_j$  blir da uavhengig av  $a_j$ ), så er minimaliseringsproblemet analytisk løsbart. For funksjoner som er ikke-lineære i parametrene som f.eks.

$$f(x, a_0, a_1, k_1) = a_0 + a_1 \exp(-k_1x), \quad (1-6)$$

må minimaliseringsproblemet som regel løses ved numerisk iterasjon.

Bestemmelse av de  $(p + 1)$  koeffisientene  $a_0, a_1, \dots, a_p$  ut fra målepunkter kalles for regresjon av  $p$ -te grad. Det finnes datamaskinprogram både for lineær og ikke-lineær regresjon. Vi skal bruke Excel og MATLAB for å foreta regresjonsanalysen.

## A.3 Minste kvadraters metode på den rette linje

Det mest vanlige regresjonsproblemet som oppstår i laboratoriet er å finne den “beste” rette linje  $y = a_0 + a_1x$  gjennom et sett av målte punkter

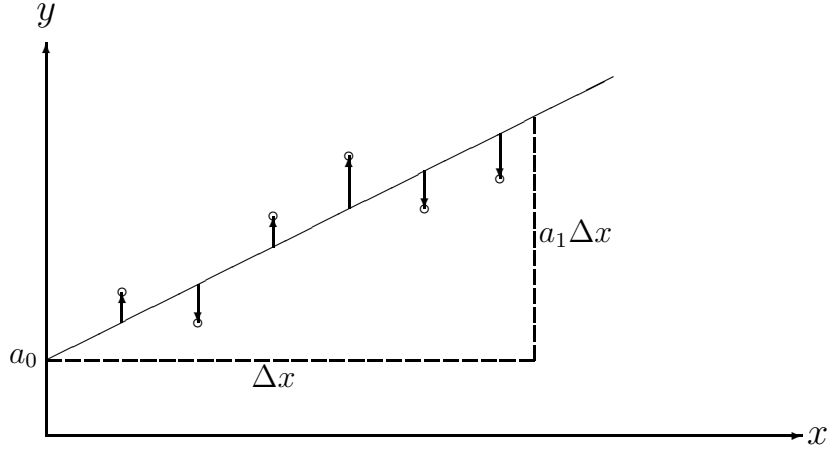
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_i, y_i), \dots (x_N, y_N). \quad (1-7)$$

Vi skal i det følgende gi tre eksempler på hvordan dette problemet kan angripes.

En regnemaskinbasert metode for å bestemme koeffisientene  $a_0$  og  $a_1$  i uttrykket for ei rett linje  $y(x) = a_0 + a_1x$  fra  $N$  par av målte verdier  $(x_i, y_i)$ , vist i figur A.1, er å bruke førstegrads regresjon basert på minste-kvadrater-prinsippet.

For et gitt par av verdier for  $a_0$  og  $a_1$  er avviket for  $i$ -te par av målte verdier

$$\Delta y_i = y_i - y(x_i) = y_i - (a_0 + a_1x_i). \quad (1-8)$$



Figur A.1: Minste kvadraters metode.

Ideen bak metoden er som vi har sett at den beste rette linje gjennom punktene er den linje hvor konstantene  $a_0$  og  $a_1$  har verdier som gjør uttrykket

$$S = \sum \Delta y_i^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = \text{minimum.} \quad (1-9)$$

La oss introdusere følgende hjelpestørrelser:

$$S_x = \sum_1^N x_i, \quad S_y = \sum_1^N y_i, \quad (1-10)$$

$$S_{xx} = \sum_1^N x_i^2, \quad S_{xy} = \sum_1^N x_i y_i, \quad S_{yy} = \sum_1^N y_i^2, \quad (1-11)$$

$$\Delta = N S_{xx} - S_x^2. \quad (1-12)$$

Minimumskravet blir matematisk formulert med kravene

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad (k = 0, 1), \quad (1-13)$$

som innebærer

$$a_0 N + a_1 S_x = S_y, \quad (k = 0), \quad (1-14)$$

$$a_0 S_x + a_1 S_{xx} = S_{xy}, \quad (k = 1). \quad (1-15)$$

likningene gir de søkte verdiene for konstantene  $a_0$  og  $a_1$  :

$$a_0 = \frac{S_y S_{xx} - S_x S_{xy}}{\Delta}, \quad (1-16)$$

$$a_1 = \frac{N S_{xy} - S_x S_y}{\Delta}. \quad (1-17)$$

Estimerte standardavvik i  $a_0$  og  $a_1$  kan beregnes fra

$$\Delta a_0 = \sqrt{\frac{1}{N-2} \frac{S S_{xx}}{\Delta}}, \quad \Delta a_1 = \sqrt{\frac{N}{N-2} \frac{S}{\Delta}}. \quad (1-18)$$

For et bevis av disse siste uttrykkene, se f.eks. Squires [4], Appendix E, eller Barford [5], Kapittel 3.

Hvis ligningen til den rette linjen er endret fra  $y = a_0 + a_1x$  til  $y = a_1x$ , fører minste kvadrat-kriteriet til følgende uttrykk for stigningstallet:

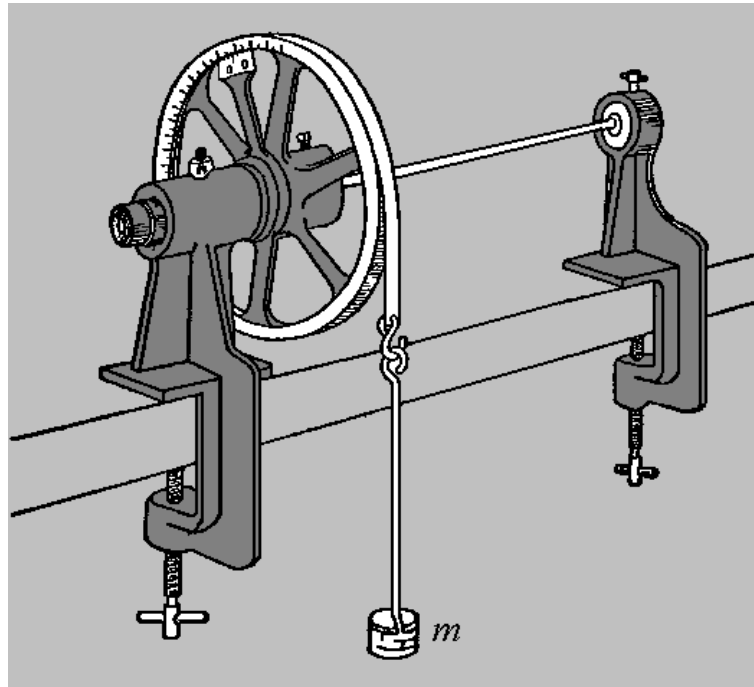
$$a_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad (1-19)$$

som leseren lett kan bekrefte. Den tilsvarende usikkerhet kan uttrykkes som

$$\Delta a_1 = \frac{1}{S_{xx}} \sqrt{\frac{S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2}{N - 1}}. \quad (1-20)$$

## A.4 Regresjonsanalyse

Excel og MATLAB har flere funksjoner for dataanalyse, men vi skal først og fremst bruke disse programmene som en avansert kalkulator og et verktøy for plotting. De som er interesserte i å lære mer om disse hjelpemidlene kan henvises til Internett.<sup>1,2</sup>



Figur A.2: En torsjon dreiebenk for måling av skjermodule av en metaltråd.

Betrakt et eksperiment der en ledning var plassert i en torsjon-dreiebenk og vridd i en liten vinkel rundt sin lengdeakse (se figur A.2). Forskjellige vekter var festet til beltet og de resulterende vinkler ble målt. Måleresultatet er vist i Tabell A.1

<sup>1</sup>[http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4102\\_lab/](http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/tfy4102_lab/)

<sup>2</sup><http://home.hio.no/~bjorn-e/REGRESJONEXCEL.HTM>

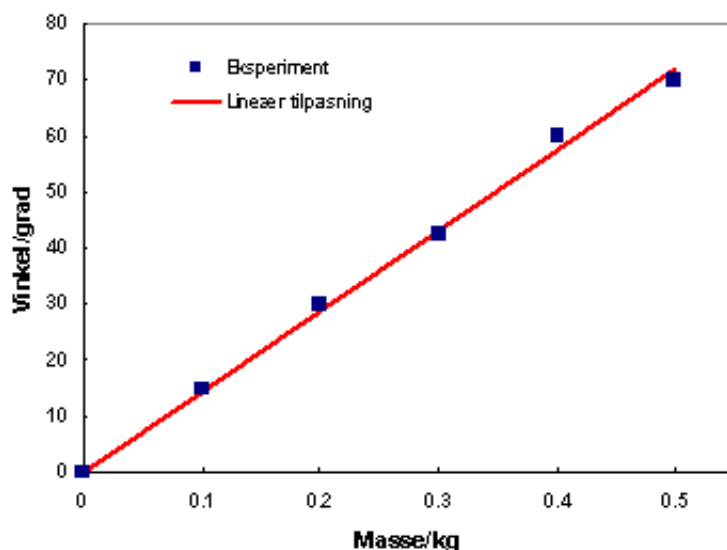
Tabell A.1: Data for torsjon

Masse/kg	Vinkel/grad
0	0
0.1	15
0.2	30
0.3	42.5
0.4	60
0.5	70

Måledata er tilpasset ligningen:

$$\theta^* = am, \quad (1-21)$$

der  $m$  står for massen festet til beltet på dreiebenken. En lineær tilpasning til måledata er vist i figur A.3. Bestemmelse av  $a$  og  $\Delta a$  overlates som en øvelse for leseren.

Figur A.3: Vinkel  $\theta$  som funksjon av  $m$ .

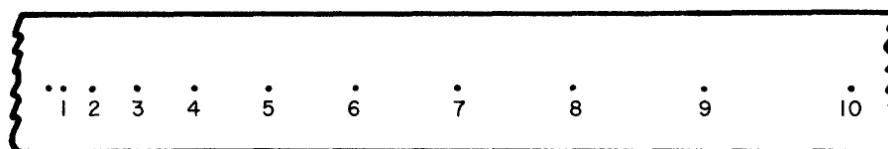
### A.4.1 Andre-ordens polynom

Nå skal vi analysere data samlet i et eksperiment hvor et legeme faller under påvirkning av tyngdekraften.<sup>3</sup> Ifølge teorien kan vi forvente at sammenhengen mellom tid  $t$  og posisjonen  $y^*$  kan uttrykkes som

$$y_i^* = s_0 + v_0 t_i + \frac{1}{2} g t_i^2, \quad (1-22)$$

hvor  $s_0$  og  $v_0$  er henholdsvis den initielle posisjonen og initielle hastigheten, og  $g$  er tyngdeakselerasjonen. Data for analysen ble målt ved å benytte et instrument hvor posisjonen av et objekt i fritt fall (vist som en prikk på en papirstrimle) ble målt ved jevne

<sup>3</sup>E. D. Noll, *The Physics Teacher*, 14 (1976) 37–39.



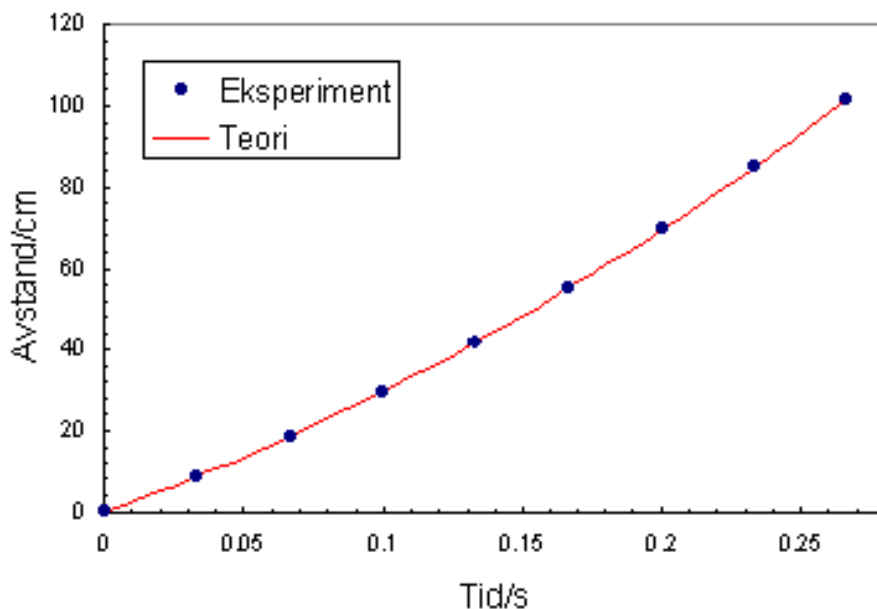
Figur A.4: Posisjonen av et legeme i fritt fall ved jevne intervall

tidsintervall (se figur A.4) Ettersom varigheten av hvert intervall er kjent (i dette tilfellet  $1/30$  s), kan den tilsvarende verdien for tiden enkelt regnes ut.

Den første klare prikken betegnes som starten på observasjonsperioden (ikke når det frie fallet begynner), og avstanden mellom prikkene etter den første måles med en linjal. Posisjonen av objektet ble målt ved å bruke en metrisk linjal. De numeriske dataene er presentert i tabell A.2, og plottet i figur A.5 sammen med en regresjonstilpasning. Fullførelse av denne oppgaven overlates til leseren.

Tabell A.2: Data for fritt fall

Tid/s	Avstand/cm	Tid/s	Avstand/cm
0	0	—	—
0.03333	8.8	0.16667	55.07
0.06667	18.67	0.2	69.47
0.1	29.6	0.23333	84.93
0.13333	41.73	0.26667	101.46



Figur A.5: Posisjonen av et legeme i fritt fall sfa tid.



### A.4.2 Ikke-lineær regresjon

Frem til nå har vi kun presentert lineær regresjonsanalyse. Ordet lineær spesifiserer det faktum at den teoretiske modellen ikke involverer andre eller høyere potenser av de justerbare parametrene ( $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , osv). Betrakt følgende modell

$$y^* = y_0^* e^{-kt},$$

som representerer eksponentiell nedgang. De eksperimentelle data skal tilpasses modellen over ved å behandle  $y_0$  og  $k$  som justerbare parametre. Man ser enkelt at avhengigheten av  $k$  er ikke-lineær. I dette tilfellet kan man bruke en matematisk transformasjon for å komme frem til følgende lineære problem

$$\ln y^* = \ln y_0^* - kt,$$

som viser at, hvis modellen er anvendbar, vil et plott av  $\ln y^*$  sfa  $t$  gi en rett linje med negativt stigningstall med størrelse  $k$ , som skjærer aksen ved  $\ln y_0^*$ . Denne fremgangsmåten er åpen for kritikk (som ikke vil bli presentert her), i tillegg er det ikke alltid mulig å transformere et ikke-lineært problem til et lineært. Derfor er det viktig å vite hvordan man kan implementere ikke-lineær regresjon. I Excel kan dette gjøres ved å bruke Problemløser (Solver) verktøyet. Undersøk på egen hånd hvordan dette verktøyet fungerer. Du kan bruke dette verktøyet for å tilpasse de spesifikke varmekapasitet data til Einsteins teori.



# Bibliografi

- [1] E. Lillestøl, A. Hunderi og J.R. Lien, 2001 *Generell fysikk for universiteter og høyskoler. Bind 2: varmelære og elektrisitetslære*, Universitetsforlaget.
- [2] M. Alonso and E.J. Finn, 1992 *Physics*, Addison Wesley.
- [3] P.C. Hemmer, 2002 *Termisk fysikk*, Tapir.
- [4] G.L. Squires, 1985, *Practical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [5] N.C. Barford, 1985, *Experimental Measurements: Precision, Error and Truth* (2nd edn), Wiley, Chichester.
- [6] A. Einstein, 1907 “Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme”, *Ann. Phys.* 22, 180–190.
- [7] M. J. Klein, 1965 “Einstein, Specific Heats, and the Early Quantum Theory”, *Science* 148, 173–180.
- [8] Nyttige nettsteder ang. varmepumper:  
<http://www.novap.no/flash>  
<http://www.energy.sintef.no/publ/xergi/99/4/art-4.htm>  
[http://www.ntnu.no/gemini/2001-04/10\\_13.htm](http://www.ntnu.no/gemini/2001-04/10_13.htm)  
<http://www.spareenergi.no/varmepumpe.htm> (mange videre linker)