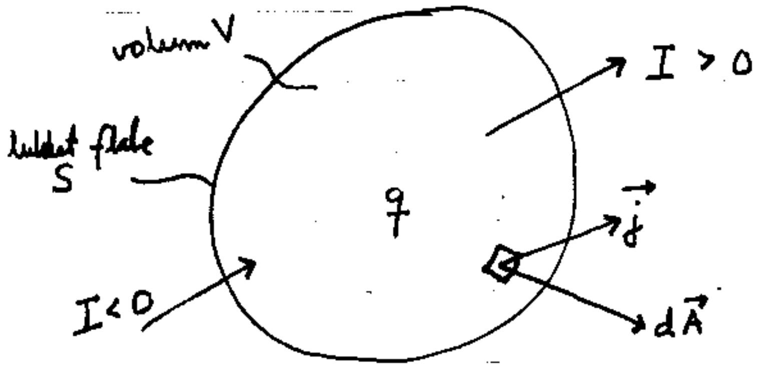
22.01.03 **Bevaringslover** [Grunnpillarer i fysikken! Størrelser som masse, impuls, energi etc. oppstår eller forsvinner ikke, de er bevart.

Ladningsbevarelse og kontinuitetsligningen



Ladning i V: $q = \int_V \rho \, dV$ ρ = ladningstettheten

Netto strøm (ut) gjennom S: $I_s = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A}$

Ladningsbevarelse: $dq = -I_s \, dt$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dq}{dt} + I_s = 0}$$ Kont. lign. på integralform

Omforming til differensialform:

$$\frac{d}{dt} q = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV \overset{\text{fast volum}}{=} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$I_s = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{j}) \, dV$$ (pga divergensteoremet)

$$\Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} \right) dV = 0$$

$$\xRightarrow{\text{(vilkårlig volum V)}} \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$$ Kont. lign. på differensialform

Ampere - Maxwells lov

Fra i høst: Biot-Savarts lov : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

$\Downarrow$

Amperes lov : $\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ (integralform)

$\Downarrow$ Stokes teorem

$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ Amperes lov på diff. form

For vilkårlig vektor $\vec{v}$: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = 0$$

Stemmer generelt <u>ikke</u> med kravet om ladningsbevarelse: $\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
(<u>Statiske</u> forhold: $\partial \rho / \partial t = 0 \Rightarrow$ Amperes lov OK)

Maxwells korreksjon:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ Ampere - Maxwells lov

Hvorfor dette tilleggsleddet?

1. Ladningsbevarelse OK:
$\nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} = 0 - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
siden $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ (Gauss lov)

2. Nødvendig for å utlede bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$

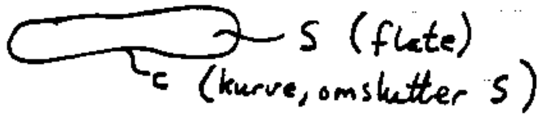
3. "Symmetri": $\partial \vec{B} / \partial t \neq 0 \Rightarrow \vec{E}$, $\partial \vec{E} / \partial t \neq 0 \Rightarrow \vec{B}$

Amperes lov for $\vec{H}$: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{fri}$

$$\longrightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{fri} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\vec{D}$: « forskyvning » $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: « forskyvningsstrømtetthet »

Omforming til integralform:



$$\underbrace{\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}}_{\substack{\text{Stokes} \\ \text{teorem}}} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{j} \cdot d\vec{A}}_{I} + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

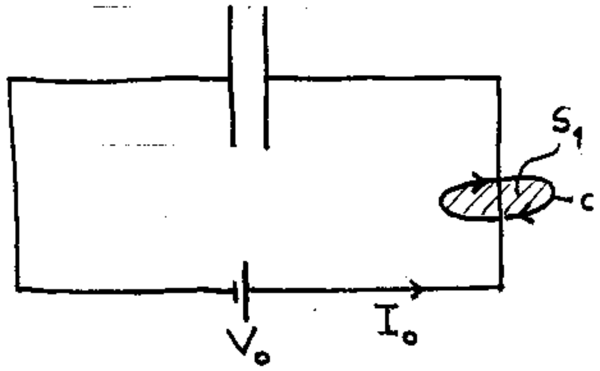
Ampere-Maxwells lov på integralform

eventuelt:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{fri} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

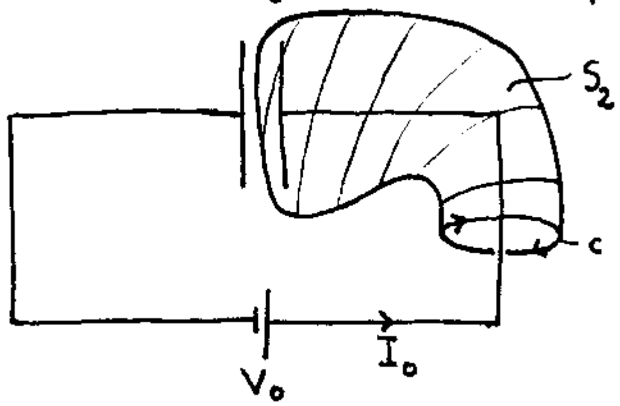
Eksempel: Platekondensator

1.



Med Amperes lov: $\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{S_1} = \mu_0 I_0 \; (\Rightarrow B = \mu_0 I_0/2\pi r)$

2.



Med Amperes lov: $\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{S_2} = 0 \neq \mu_0 I_{S_1}$ Ikke konsistent

Med Ampere-Maxwells lov:

1. $I_{S_1} = I_0$, $\vec{E}_{S_1} = 0 \Rightarrow \oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0$

2. $I_{S_2} = 0$, $E_{S_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$ (mellom kond. platene)

$\Rightarrow dE_{S_2}/dt = (1/\varepsilon_0 A)\, dQ/dt = I_0/\varepsilon_0 A$

$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{d\vec{E}_{S_2}}{dt}\cdot d\vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{I_0}{\varepsilon_0 A}\cdot A = \mu_0 I_0$

Konsistent!

Energibevarelse

Fra i høst:

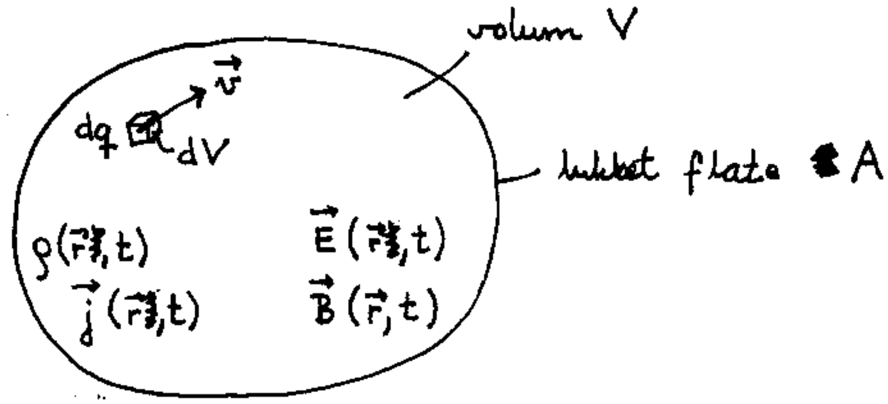
$U_e = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, dV$, $U_m = \int_V \frac{1}{2\mu_0} B^2 \, dV$ ["utledet" via eksempler: C , L]

$$U_{em} = U_e + U_m = \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV$$

= total energi lagret i det elektromagnetiske feltet i et volum V

gjentas 29.01.03

Generelt:



ρ, $\vec{j}$ <u>kilder</u> til <u>feltene</u> $\vec{E}$, $\vec{B}$ som igjen påvirker ρ, $\vec{j}$

Hit 22.01.03 via <u>Lorentzkraften</u>

<u>29.01.03</u>: Kraft på ladning $dq = \rho \, dV$: $\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Arbeid av feltene på dq i løpet av tiden dt:

$$\begin{aligned} \vec{F}\cdot d\vec{l} &= dq(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} \\ &= \rho \, dV (\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\, dt \qquad ((\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v} = 0) \\ &= \vec{E}\cdot\vec{j} \, dV \, dt \qquad (\vec{j} = \rho\vec{v}) \end{aligned}$$

⇒ Totalt arbeid pr tidsenhet på ladningene i V:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\vec{E}\cdot\vec{j}) \, dV$$

dvs.

$\vec{E}\cdot\vec{j}$ = tilført <u>effekt</u> pr volumenhet

Ladningsbevarelse: $\frac{d}{dt}\overbrace{\int_V \rho \, dV}^{q} = -\overbrace{\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}}^{I_A}$

Kommentar: Betrakt volum V med fast mengde partikler. En endring i feltenergien U_{em} kan da skje på to måter:

1) endring i mekanisk energi U_{mek}
2) strøm av feltenergi gjennom flaten A som avgrenser V

Altså:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{U_{em}}_{\text{feltenergi i } V} = -\frac{d}{dt}\underbrace{U_{mek}}_{\text{mekanisk energi i } V} \underbrace{- \oint_A \vec{S}\cdot d\vec{A}}_{\text{feltenergi pr tidsenhet \underline{inn} i } V}$$

Uttrykker $\vec{j}$ ved $\vec{E}$ og $\vec{B}$ med Ampere-Maxwells lov:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

For vilkårlige vektorer $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$: $\nabla\cdot(\vec{V}_1\times\vec{V}_2) = \vec{V}_2\cdot(\nabla\times\vec{V}_1) - \vec{V}_1\cdot(\nabla\times\vec{V}_2)$

Dessuten: $\vec{V}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}V^2$ $\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{V}\cdot\vec{V} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\cdot\vec{V} + \vec{V}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = 2\vec{V}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$

Dermed:

$$\vec{E}\cdot\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\left\{\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})\right\} - \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E^2$$

Faradays lov: $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) = -\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}B^2$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}U_{em} - \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\int_V \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})\,dV}_{\text{(med divergensteoremet)}\ \oint_A (\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{A}}$$

Vi har partikler med ladning inne i V!

Dermed: Arbeid utført på ladningene i V $\Rightarrow$ økning i (ladningenes) partiklenes mekaniske energi:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}U_{mek} = \frac{d}{dt}\int_V u_{mek}\,dV \qquad (u_{mek} = \text{mekanisk energitetthet})$$

Poyntings teorem (Energibevarelse) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V (u_{mek} + u_{em})\,dV + \oint_A \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{A} = 0}$$

Dvs: Endring pr tidsenhet av total energi (mekanisk og elektromagnetisk) i volumet V tilsvarer energi pr tidsenhet som strømmer gjennom flaten A som avgrenser V.

Sammenlign kont.lign. for ladning: $\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV + \oint_A \vec{j}\cdot d\vec{A} = 0$

$\vec{j}\cdot d\vec{A}$ = <u>ladning</u> som krysser flateelement $d\vec{A}$ pr tidsenhet ("ladningsfluks")

$\frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{A}$ = <u>energi</u> ——— " ——— ("energifluks")

Poyntings vektor: $\boxed{\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}}$ ~~[NB: Uheldig notasjon; har brukt S også for flateelem.]~~

= energien pr tidsenhet og pr flateenhet som transporteres ut av volumet V av feltene $\vec{E}$ og $\vec{B}$

Enhet (Dimensjon): $[S] = \frac{J}{m^2 s}$ ("energifluksstetthet")

På differensialform:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{mek} + u_{em}\right) + \nabla\cdot\vec{S} = 0}$$

(Sammenlign: $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0$)

Med <u>lineære media</u> til stede:

Betrakter <u>frie</u> ladninger og strømmer

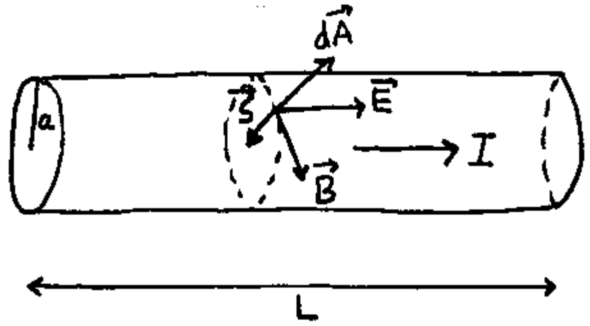
$\Rightarrow u_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})$

$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

Retning på energistrømmen gjennom flaten :

$$+\oint_A \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{A}$$ = energi pr tidsenhet som strømmer ut gjennom flaten A ($d\vec{A}$ positiv utover)

Eksempel: Energiforhold i motstand



$E = V/L$ (antar uniformt elektrisk felt)

(V = spenningsfall over motstanden)

På overflaten:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot 2\pi a = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad (\text{"sirkulært" rettet})$$

$\Rightarrow$ Poyntings vektor: $S = |\vec{S}| = |\frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})| = \frac{1}{\mu_0} \frac{V}{L} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{VI}{2\pi a \cdot L}$

retning: <u>inn</u> mot sentrum

Energistrøm$^{\text{pr tidsenhet}}$ <u>ut</u> gjennom motstandens overflate:

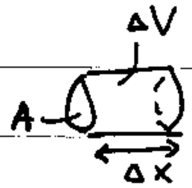
$$\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = -\frac{VI}{2\pi a L} \cdot 2\pi a L = -VI$$

dvs <u>tilført</u> effekt $= \underline{\underline{VI}}$ (jfr 24.5 i høst)

$\Rightarrow$ oppvarming, "Joule heating"

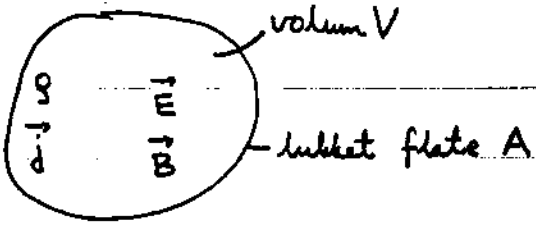
Hit
29.01.03

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho\,\Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho\,A\,\Delta x}{\Delta t} = \rho\,A\,v$$



$$j = I/A = \rho\,v$$

$$\vec{j} = \rho\,\vec{v}$$



5.2.03 Impulsbevarelse

Newtons 2. lov: $\vec{F} = d\vec{p}_{mek}/dt$

Total kraft på ladningene i V:

$$\vec{F} = \int_V (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\, \varrho \, dV \qquad \varrho \vec{v} = \vec{j}$$

$$= \int_V (\varrho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})\, dV$$

$\Rightarrow$ Kraft pr volumenhet: $\vec{f} = \varrho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

Bruker Maxwells ligninger til å eliminere ϱ og $\vec{j}$:

→ Gauss lov: $\nabla \cdot \vec{E} = \varrho / \varepsilon_0$

→ Ampere-Maxwells lov: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{f} = \varepsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

→ Faradays lov: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \nabla \times \vec{E}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \varepsilon_0 \left\{ (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right\} \underbrace{+ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}}_{- \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$= \varepsilon_0 \left\{ (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right\} + \frac{1}{\mu_0} \left\{ (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \right\} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

(siden $\nabla \cdot \vec{B} = 0$)

→ ("Gauss lov for $\vec{B}$") [Har brukt alle 4 Maxwells ligninger her.]

$$(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} = \left(E_x \frac{\partial}{\partial x} + E_y \frac{\partial}{\partial y} + E_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}\right)$$

$$= \left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{x} + \ldots\ \text{tilsv. for } \hat{y}, \hat{z}$$

$$(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)E_x\hat{x} + \ldots\ \text{tilsv. for } \hat{y}, \hat{z}$$

Ad $\overleftrightarrow{T}$: Hadde $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ for <u>lineære isotrope</u> media.

Generelt (f.eks. krystaller): Ulik grad av polarisering i ulike retninger.

$$\Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi_e} \vec{E}$$

der

$$\overleftrightarrow{\chi_e} = \begin{bmatrix} \chi_e^{xx} & \chi_e^{xy} & \chi_e^{xz} \\ \chi_e^{yx} & \chi_e^{yy} & \chi_e^{yz} \\ \chi_e^{zx} & \chi_e^{zy} & \chi_e^{zz} \end{bmatrix}$$

susceptibilitets-tensoren

slik at f.eks.

$$P_x = \varepsilon_0 \left(\chi_e^{xx} E_x + \chi_e^{xy} E_y + \chi_e^{xz} E_z\right)$$

og tilsvarende for P_y og P_z

Skriver om kryssproduktene ved hjelp av (uten bevis...!)

$$\nabla(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\times(\nabla\times\vec{v}) + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{u}) + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u}$$

$$\Rightarrow \nabla(E^2) = 2\,\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) + 2\,(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} \qquad \text{(og tilsv. for } \vec{B}\text{)}$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \varepsilon_0\left\{(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} - \tfrac{1}{2}\nabla E^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{\mu_0}\left\{(\nabla\cdot\vec{B})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} - \tfrac{1}{2}\nabla B^2\right\} \qquad - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\vec{E}\times\vec{B})}_{\mu_0\vec{S}}$$

Innfører Maxwells "trykktensor":

$$T_{ij} = \varepsilon_0\left(E_iE_j - \tfrac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \tfrac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)$$

der $i,j = x, y$ eller z

og

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{når } i=j \\ 0 & \text{når } i\neq j \end{cases} \qquad \text{(Kronecker delta)}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \qquad \text{(3×3 matrise)}$$

$$\text{Eks: } T_{yy} = \varepsilon_0\left(E_y^2 - \tfrac{1}{2}(E_x^2+E_y^2+E_z^2)\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_y^2 - \tfrac{1}{2}(B_x^2+B_y^2+B_z^2)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(E_y^2 - E_x^2 - E_z^2\right) + \frac{1}{2\mu_0}\left(B_y^2 - B_x^2 - B_z^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\overleftrightarrow{T} = \text{vektor}: \quad (\vec{u}\cdot\overleftrightarrow{T})_x = \sum_{i=x,y,z} u_i\,T_{ix} = u_xT_{xx} + u_yT_{yx} + u_zT_{zx}$$

Ser på <u>divergensen til</u> $\overleftrightarrow{T}$:

$$(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})_j = \frac{\partial}{\partial x}T_{xj} + \frac{\partial}{\partial y}T_{yj} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zj}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}T_{xj} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \varepsilon_0\left(E_xE_j - \tfrac{1}{2}\delta_{xj}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_xB_j - \tfrac{1}{2}\delta_{xj}B^2\right)\right\}$$

$$= \varepsilon_0\left[\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)E_j + \left(E_x\frac{\partial}{\partial x}\right)E_j - \frac{1}{2}\delta_{xj}\frac{\partial}{\partial x}E^2\right]$$

$$+ \frac{1}{\mu_0}\left[\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)B_j + \left(B_x\frac{\partial}{\partial x}\right)B_j - \frac{1}{2}\delta_{xj}\frac{\partial}{\partial x}B^2\right]$$

Tilsv. for y og z $\Rightarrow$

$$(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})_j = \varepsilon_0\left[(\nabla\cdot\vec{E})E_j + (\vec{E}\cdot\nabla)E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2\right]$$

$$+ \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla\cdot\vec{B})B_j + (\vec{B}\cdot\nabla)B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right]$$

Dermed: $\vec{f} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}$

Total kraft på ledningene i V:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}\,dV = \int_V(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})\,dV - \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_V\vec{S}\,dV$$

Divergensteoremet $\Rightarrow \int_V(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})\,dV = \oint_A\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{A}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \oint_A\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_V\vec{S}\,dV}$$

Fortolkning av $\overleftrightarrow{T}$: T_{ij} = kraft pr flateenhet på systemets overflate, i i-retning, på et flateelement med flatenormal i j-retning

Diagonale elementer (T_{xx} etc): Trykk. Ikke-diagonale (T_{xy} etc): Skjærspenninger

Utgangspunktet (s.15) var:

Newtons 2. lov: $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}_{mek.}$ ($\vec{p}_{mek}$ = total partikkelimpuls i V)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{p}_{mek} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_V \vec{S}\, dV + \oint_A \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}$$

Naturlig fortolkning: (sammenlign med Poyntings teorem)

$\mu_0\varepsilon_0 \int_V \vec{S}\, dV = \vec{p}_{em}$ = impuls knyttet til feltene $\vec{E}$ og $\vec{B}$

$\oint_A \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}$ = impuls som strømmer inn gjennom flaten A pr tidsenhet

Impuls-tettheter: $\vec{\wp}_{mek}$, $\vec{\wp}_{em}$

$$\Rightarrow \vec{p}_{mek} = \int_V \vec{\wp}_{mek}\, dV, \quad \vec{p}_{em} = \int_V \vec{\wp}_{em}\, dV$$

$$\therefore \vec{\wp}_{em} = \mu_0\varepsilon_0 \vec{S}$$

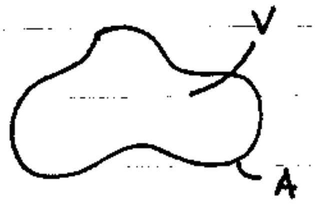
Impulsbevarelse (kontinuitetsligning for impuls)

på integralform: $\frac{d}{dt}(\vec{p}_{mek} + \vec{p}_{em}) = \oint_A \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A}$

på differensialform: $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\wp}_{mek} + \vec{\wp}_{em}) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$

Eksempel: se elektromagnetiske bølger (senere)

Oppsummering, bevaringslover



Ladning (skalar):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV + \oint_A \vec{j}\cdot d\vec{A} = 0$$

Energi (skalar):

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(u_{mek} + u_{em}\right) dV + \oint_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = 0$$

Impuls (vektor):

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\vec{p}_{mek} + \vec{p}_{em}\right) dV - \oint_A \overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{A} = 0$$

der

ρ = ladning pr volumenhet

$u_{mek} + u_{em}$ = energi —— " ——

$\vec{p}_{mek} + \vec{p}_{em}$ = impuls —— " ——

og

$\vec{j}$ = strøm av ladning pr tidsenhet og flateenhet

$\vec{S}$ = —" — energi —— " ——

$-\overleftrightarrow{T}$ = —" — impuls —— " ——

($-T_{ij}$ = impuls i i-retning som krysser flate med flatenormal i j-retning pr tidsenhet og flateenhet)