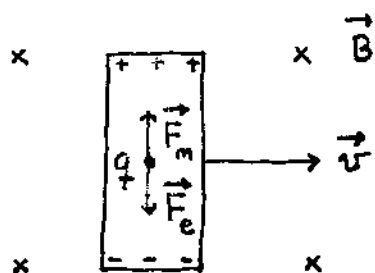


(A8 F 24.9)

12-02-03 Hall-effekten (E. Hall, 1879, student ved Johns Hopkins University)

Fra i høst: Leder i bevegelse i magnetfelt

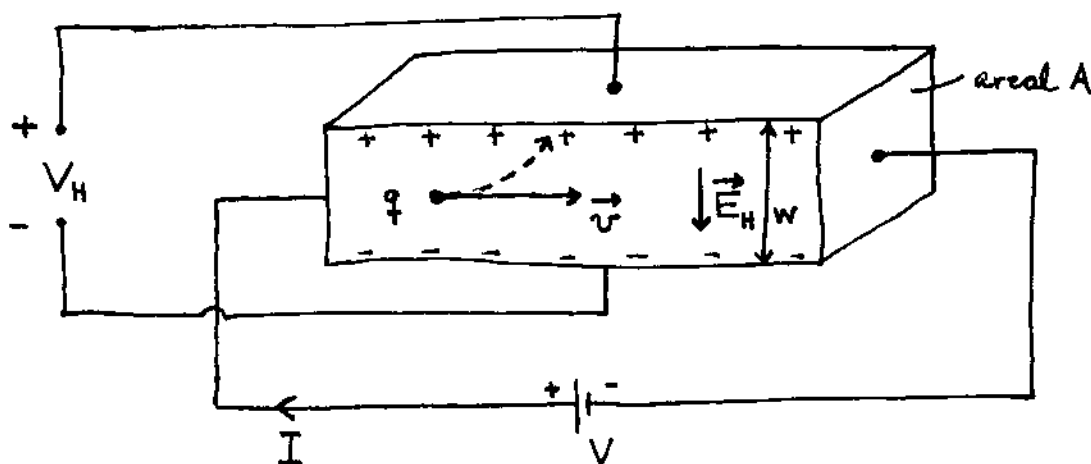
Likevekt når $\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$

$$\Rightarrow qE = qvB$$

$$\Rightarrow E = vB$$

Tilsvarende

(Samme) fysikk nå: Strøm gjennom rektangulær plate

Anta $q > 0$.

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB(\hat{x} \times \hat{z}) = -qvB\hat{y}$$

 $\Rightarrow$ overskudd av positiv ledning øverst, negativ ledning nederst $\Rightarrow$ induert elektrisk felt $\vec{E}_H$ rettet nedover

$$\text{Likevekt når } \vec{F}_m + q\vec{E}_H = 0 \Rightarrow \vec{E}_H = vB\hat{y} \quad (\text{"Hall-feltet"})$$

Målt spenning på tvers av platen:

$$V_H = E_H \cdot w = vBw \quad (\text{Hall-spenningen})$$

Uttrykker driftshastigheten $\vec{v}$ ved strømtettheten $\vec{j}$:

$$\vec{j} = \frac{I}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Tetthet av ledningsbærere: n

⇒ Ladning (mobil!) i volum $A \cdot \Delta x$: $\Delta Q = n \cdot A \cdot \Delta x \cdot q$

$$\Rightarrow j = \frac{1}{A} \frac{n A \Delta x q}{\Delta t} = n q v$$

$$\Rightarrow v = j / n q$$

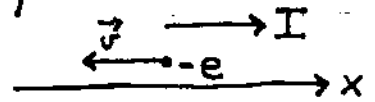
Dermed: $V_H = \frac{1}{n q} j B w$ $(E_H = \frac{1}{n q} j B)$

⇒ Måling av V_H gir tettheten av mobile ladninger n

($R_H = 1/nq$ = Hall-konstanten)

Hva hvis $q < 0$? (Elektroner: $q = -e$)

$$\vec{v} = -v \hat{x}, \quad q = -e$$



$$\Rightarrow \vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} = e v B (\hat{x} \times \hat{z}) = -e v B \hat{y}$$

⇒ overskudd av negativ ladning øverst

⇒ $\vec{E}_H$ rettet oppover

⇒ motsett fortegn på V_H

⇒ Måling av V_H gir også fortegnet på de mobile ladningene

$$q > 0 \text{ ? ! ?}$$

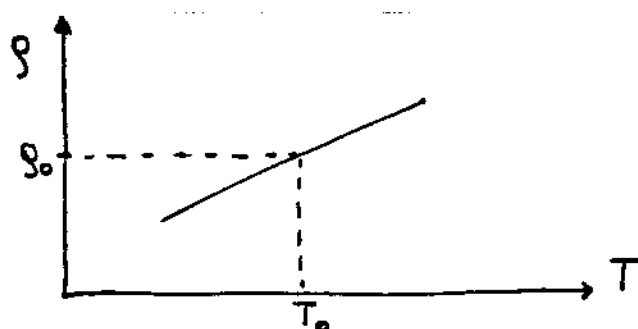
(atomnr. Z)

Viv et: Platen består av atomer som igjen består av atomkjerne med positiv ladning $(+Ze)$ og Z elektroner, hvor med negativ ladning $-e$. I et fast stoff sitter atomkjernene (og de innerste elektronene) i faste posisjoner (typisk ordnet struktur, gitter). Kun de ytterste elektronene (typisk 1 eller 2 pr atom) kan være mobile i det faste stoffet.

Dermed: Hvordan forklare $\rho > 0$ i et Hall-forsøk?

Resistivitetsens temperaturavhengighet (LHL 21.2)

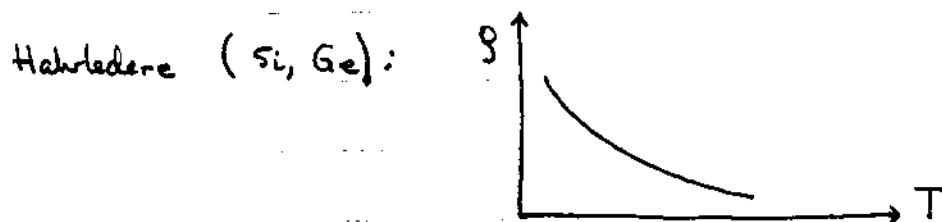
Elektrisk leder (metall): $\rho(T) = \rho_0 \{1 + \alpha(T - T_0)\}$



T_0 : referansetemp.
(f.eks. 300 K)

Naturlig forklaring:

Økende $T \Rightarrow$ kraftigere gittervibrasjoner $\Rightarrow$ hyppigere kollisjoner mellom mobile elektroner og gitteret $\Rightarrow$ redusert driftshastighet $\Rightarrow$ høyere ρ



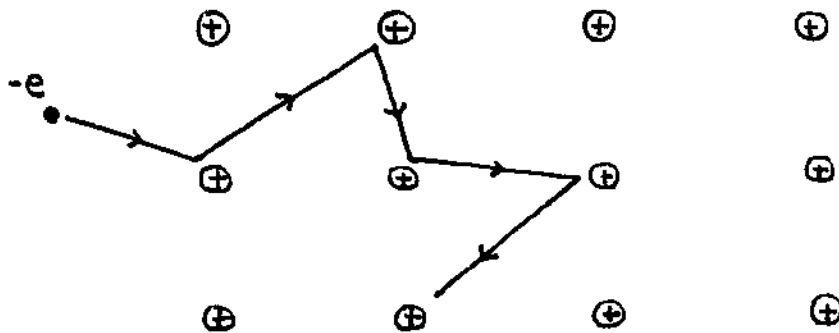
Hvordan forklare redusert ρ for økende T ?

Elektroner i faste stoffer

Hittil: Klassisk modell; "fri-elektron-gass"
(P. Drude, ca 1900)

I metall: Hvert atom avgir 1 eller flere elektroner til en elektrongass med tetthet n .

Fri bevegelse av disse elektronene, men kollisjoner med ionegitteret.



Beregner konduktiviteten σ :

ytre elektrisk felt: $\vec{E}$

hastighet etter siste kollisjon: $\vec{v}_0$ (ved $t=0$)

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - \frac{e\vec{E}}{m} t$$

Etter kollisjon: tilfeldig fordelt retning på $\vec{v}_0 \Rightarrow$
midlet over tid: $\langle \vec{v}_0 \rangle = 0$

$$\Rightarrow \text{Driftshastighet: } \langle \vec{v} \rangle = - \frac{e\vec{E}}{m} \tau$$

med τ = midlere tid mellom kollisjoner

Strømtetthet: $\vec{j} = -ne \langle \vec{v} \rangle = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E}$

Pr def: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (Ohms lov)

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m}}$$

Elektrisk ledningsevne, klassisk
fri-elektron-gass.

Denne modellen kan (bl. a.) ikke forklare

* positiv Hall-konstant $R_H = \frac{1}{nq}$
(dvs positive ledningsbærere)

* øktende resistivitet med økende temperatur
for endel materialer (Si, Ge)

(Hit 12-02-03)

19-02-03 To åpenbare mangler i ~~den~~ klassisk fri-elektron-gass modell:

* trenger en kvantemekanisk beskrivelse (ikke "klassisk")

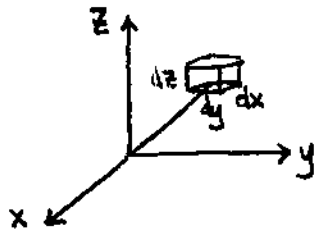
* må ta hensyn til at elektronene beveger seg
i et periodisk potensial (ikke "frielektroner", dvs
pga ionegitteret konstant potensial)

Introduserer disse to effektene, én om gangen!

Beskriver elektronets tilstand med en bølgefunksjon $\psi(\vec{r})$

Fysisk betydning av ψ :

$|\psi(x,y,z)|^2 dx dy dz$ = sannsynlighet for at elektronet befinner seg i volumelementet $(x, x+dx; y, y+dy; z, z+dz)$



Dvs: $|\psi(x,y,z)|^2$ = sannsynlighetstettheten ved (x,y,z)

Klassisk mekanikk:

$$E_k + E_p = E$$

med $E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$ = kinetisk energi ($\vec{p} = m\vec{v}$)

E_p = potensiell energi

E = total energi

Kvantemekanikk:

$\vec{p}$ erstattes av operator: $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$\hbar = h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant

Andre fysiske størrelser som avhenger av $\vec{p}$ blir også

operatorer ved å la $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$:

$$E_k = p^2/2m \rightarrow (-i\hbar \nabla)^2/2m = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

De mulige tilstander ψ med tilhørende energi E er bestemt av Schrödinger-ligningen:

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + E_p \psi = E \psi}$$

(tidsuavhengig)

(*) Kontinuerlig ψ tilsvarer kontinuerlig sannsynlighetstetthet, $\rho = |\psi|^2$

Kontinuerlig $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ tilsvarer kontinuerlig sannsynlighetsstrøm tetthet,

$$j_x = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right)$$

Disse størrelsene oppfyller en kontinuitetsligning: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$

(i 3 dimensjoner: $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \vec{j} = 0$)

Enkelt (men relevant) eksempel:

Partikkel i konstant potensial, $E_p = \text{konstant}$, i området mellom $x=0$ og $x=L$

Dvs: Fritt elektron i fast stoff med lengde L , ikke klassisk elektron men kvantemekanisk.

- Elektron avgrenset til $x \in [0, L]$
 $\Rightarrow E_p = \infty$ utenfor $[0, L]$
- Nullnivå for E_p uten betydning
 $\Rightarrow$ velger $E_p = 0$ i $[0, L]$ ($\Rightarrow$ kinetisk energi = total energi)
- I tre dimensjoner: $\Psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$
 men anta én dimensjon først, dvs $\Psi = \Psi(x)$
- Null sannsynlighet for å finne elektronet utenfor $[0, L]$
- Må ha kontinuerlig $\Psi(x)$ [og $\frac{d\Psi}{dx}$] overalt (*)

Dermed:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (\text{for } 0 \leq x \leq L)$$

$$\Psi(0) = \Psi(L) = 0 \quad (\text{grensebetingelser})$$

Løsning:

$$\text{Innenfor } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \Psi'' + k^2 \Psi = 0$$

$$\Rightarrow \Psi \sim e^{ikx} \quad \text{eller} \quad \Psi \sim e^{-ikx}$$

Generell løsning: $\Psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

$$\Psi(0) = 0 = A + B \Rightarrow B = -A \Rightarrow \Psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = C \sin kx$$

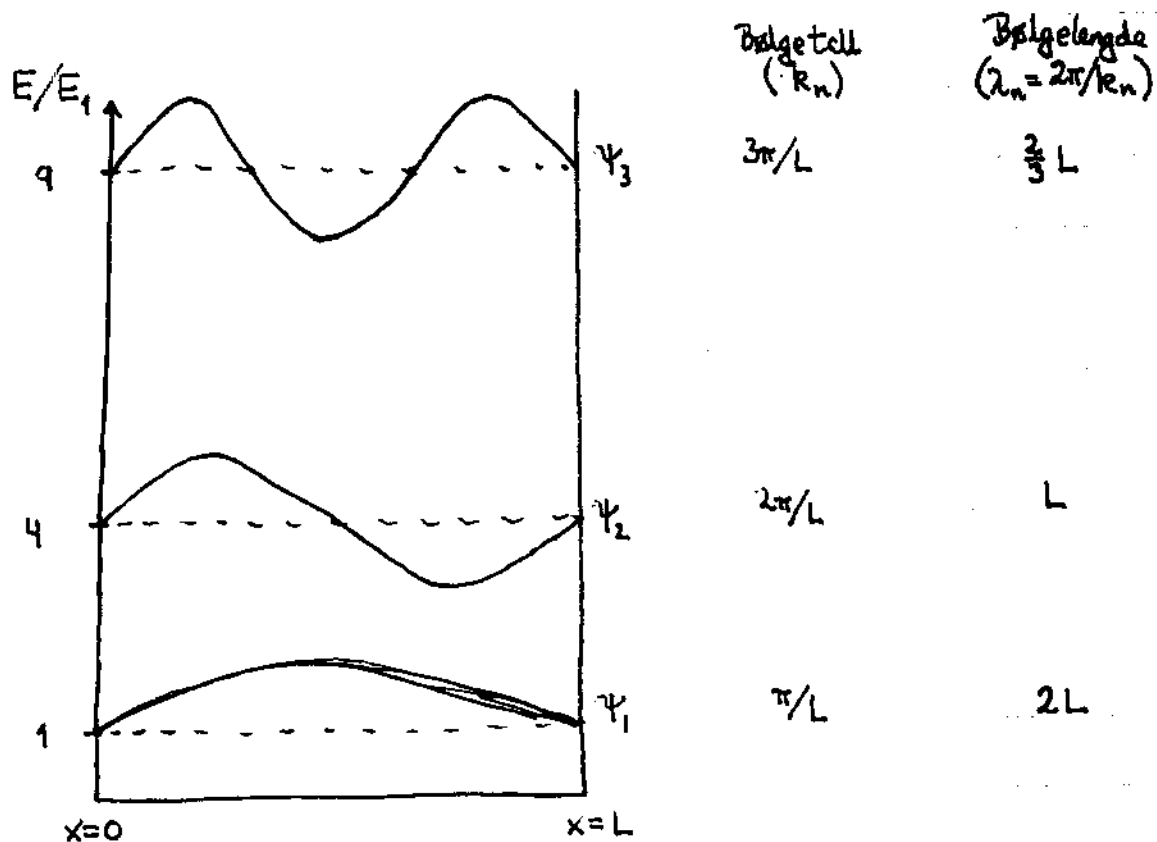
$$\Psi(L) = 0 = C \sin kL \Rightarrow kL = \pi n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Diskrete (kvantiserte) energier:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Tilhørende bølgefunksjon: ("Normering": $\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1$)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{"stående bølger"})$$



Hit 19-02-03

I fast stoff: Mange elektroner!

26-02-03

Hvor mange elektroner i hver tilstand?

Pauli-prinsippet:

Ikke mer enn ett elektron
i hver tilstand

(Generelt: Fermioner (elektron, proton...): 0 eller 1 pr tilstand)

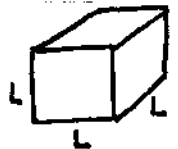
Bosoner (fotoner, ${}^4\text{He}$...): 0, 1, 2, ... pr tilstand

Tre-dimensjonalt materiale med N frie elektroner:
 ["Partikkel i boks", A&F 37.5]

Fra i høst (A&F 23.7): Elektronet har spinn (dvs "indre dreieimpuls") $\vec{S}$, med $S = |\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar$ (dvs $s = \frac{1}{2}$)
 og $S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$ (dvs $m_s = \pm \frac{1}{2}$).

Dvs: To mulige spinn-verdier for hver "posisjons-tilstand".
 Beskrives med spinn-bølgefunksjon $\chi(\sigma)$ der $\sigma = +1$ (spinn "opp") eller $\sigma = -1$ (spinn "ned")

Alt i alt: $(0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L)$



$$\Psi(x, y, z; \sigma) = X(x) Y(y) Z(z) \chi(\sigma)$$

$$= \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \sin \frac{n_z \pi z}{L} \chi(\sigma)$$

der $n_x = 1, 2, 3, \dots$; $n_y = 1, 2, 3, \dots$; $n_z = 1, 2, 3, \dots$; $\sigma = \pm 1$

Tilhørende energi:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

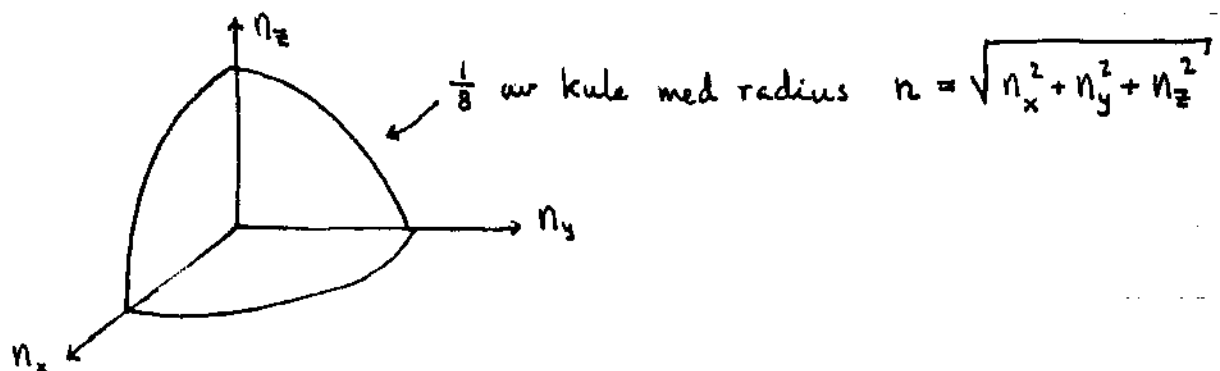
Fyller opp med N elektroner, bruker Pauli-prinsippet samt to mulige spinn-tilstander pr "romlig" tilstand.

n_x	n_y	n_z	$\frac{2mL^2 E}{\hbar^2 \pi^2}$	Antall elektroner med samme E	Totalt antall elektroner
1	1	1	3	2	2
2	1	1	6	} $2 \cdot 3 = 6$	8
1	2	1	6		
1	1	2	6		
2	2	1	9	} $2 \cdot 3 = 6$	14
2	1	2	9		
1	2	2	9		
3	1	1	11	} $2 \cdot 3 = 6$	20
1	3	1	11		
1	1	3	11		
2	2	2	12	2	22
3	2	1	14	} $2 \cdot 6 = 12$	34
3	1	2	14		
2	3	1	14		
2	1	3	14		
1	3	2	14		
1	2	3	14		

Makroskopisk system $\Rightarrow$ stor $L \Rightarrow$ liten avstand mellom energinivåer: $\Delta E \approx \hbar^2 \pi^2 / 2mL^2$
 $\Rightarrow$ tilnærmet kontinuerlig energi-spektrum

~~.....~~ Fermienergien

$\vec{n}$ -rommet ($\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$):



- totalt antall elektroner = N
- 2 tilstander (pga spinn opp eller ned) pr "heltallspunkt" i n -rommet
- hvert heltallspunkt opptar volum = 1 i n -rommet
- volum av kule-oktant = $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi n^3 = \frac{1}{6} \pi (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{3/2}$

$$\Rightarrow \text{antall tilstander i kule-oktant} = 2 \cdot \frac{1}{6} \pi n^3$$

$$\Rightarrow \text{antall tilstander med energi mindre enn } \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 =$$

—————||————— i kule-oktanen = $\frac{1}{3} \pi n^3$

Dermed: $N = \frac{1}{3} \pi n^3$

Fermienergien E_F = maksimalenergien for besatte (evt: okkuperte) tilstander (ved $T=0$)

Dermed: $E_F = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$

$$\Rightarrow n = \frac{L}{\hbar \pi} (2mE_F)^{1/2}$$

$$\Rightarrow N = \frac{\pi}{3} n^3 = \frac{\pi L^3}{3\hbar^3 \pi^3} (2mE_F)^{3/2}$$

Systemets volum: $V = L^3$

Tetthet av elektroner: $g = N/V = N/L^3$

$$\Rightarrow g = \frac{1}{3\hbar^3 \pi^3} (2mE_F)^{3/2} = \frac{(\frac{2m}{\hbar^2} E_F)^{3/2}}{3\pi^2}$$

$$\Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 g)^{2/3}$$

Fermienergi for "kvantegass" av frie elektroner med tetthet g

Dette er grunntilstanden, dvs forholdene ved $T=0$:

Alle elektroner i tilstander med lavest mulig energi.

Hva skjer ved endelig temperatur $T > 0$?

Ionegitteret vibrerer og kan tilføre elektronene termisk energi via kollisjoner:

$$\Delta E_{\text{term}} \sim k_B T$$

$$(k_B = \text{Boltzmanns konstant} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K})$$

Eks: Ved romtemperatur er $T \approx 300 \text{ K}$

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{term}} \sim 4 \cdot 10^{-21} \text{ J} \sim 26 \text{ meV}$$

Hitt 26/02/03
(+5.34)

Renfne 5/3/03

Kan alle elektronene "eksiteres" ?

Forutsetning: Må ha ledig tilstand å eksiteres til!
(pga Pauliprinsippet)

Typiske Fermienegier i metaller:

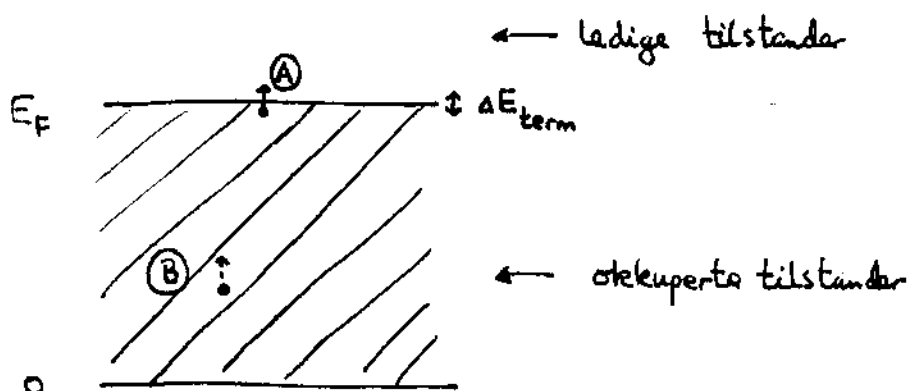
$$g = V/V \sim 10^{29} \text{ pr } m^3$$

$$\Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 g)^{2/3} \sim \frac{(1.05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} \cdot (3\pi^2 \cdot 10^{29})^{2/3} \text{ J}$$

$$\sim 10^{-18} \text{ J} \sim 8 \text{ eV}$$

[Fermitemperatur: $T_F = E_F/k_B$ Typisk: $T_F \sim 10^4 - 10^5 \text{ K}$]

$\Rightarrow E_F \gg \Delta E_{\text{term}}$ ved romtemperatur

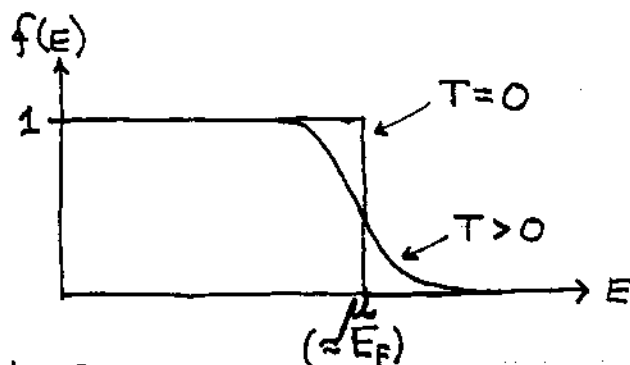


$\Rightarrow$ termisk eksitasjon (A) mulig
 ——— " ——— (B) umulig

$\Rightarrow$ Kun elektroner med $E \approx E_F$ kan eksiteres termisk

Sannsynlighet for at tilstand med energi E er okkupert ved temperatur T :

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$



$$f(\mu) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Fermi-Dirac - fordelingen
 (gjelder for fermioner)

$\mu(0) = E_F$
 $\mu = \text{"kjemisk potensial"}$

Denne side tas
påregning side
32

Tetthet av tilstander

Vi hadde:

$$N = \frac{V}{3\hbar^3 \pi^2} (2m E_F)^{3/2}$$

↑
antall elektroner

↑
max energi for okkuperte
tilstander

Generelt:

$$N(E) = \frac{V}{3\hbar^3 \pi^2} (2m E)^{3/2}$$

= antall tilstander mellom 0 og E

Definerer $D(E)$ = antall tilstander pr energienhet
(dvs: tilstandstetthet)

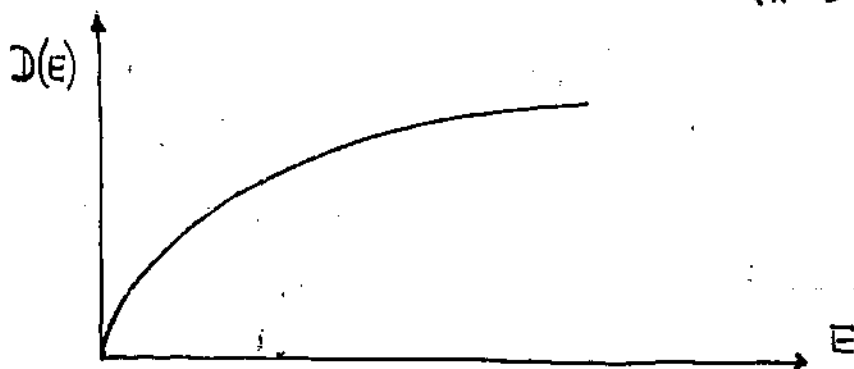
$$\Rightarrow D(E) dE = \text{antall tilstander mellom } E \text{ og } E+dE$$

$$\Rightarrow N(E) = \int_0^E D(E') dE'$$

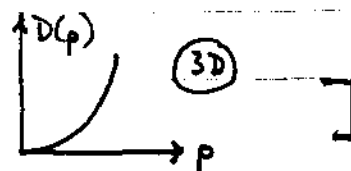
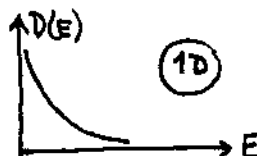
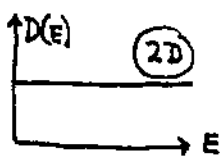
$$\Rightarrow \frac{dN}{dE} = \frac{d}{dE} \int_0^E D(E') dE' = D(E)$$

$$\Rightarrow D(E) = \frac{V}{2\hbar^3 \pi^2} (2m)^{3/2} E^{1/2}$$

Tilstandstetthet for
frie elektroner
(i 3 dimensjoner)



[Øving 6:

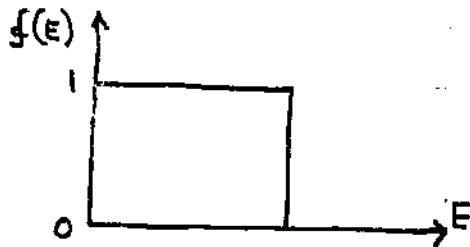


Klassisk tenkning : $U(T) \approx \frac{3}{2} N k_B T \Rightarrow C_V^{\text{klass.}} = \frac{3}{2} N k_B$ uafhængig af T
 [Alle N elektroner tilføres energi $\sim k_B T$]

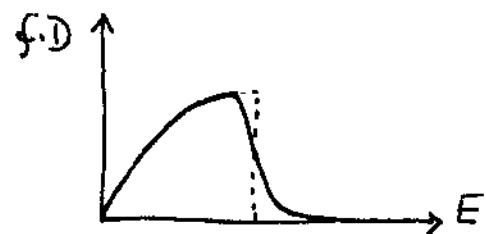
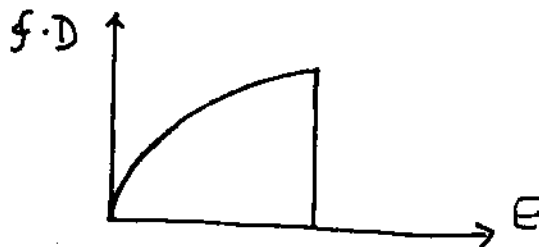
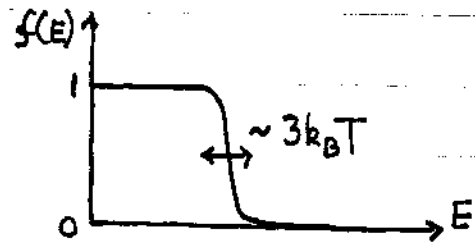
Ekspenmentale kan bare forklares ved hjælp af Pauli-princippet og
Fermi-Dirac-fordelingen : Kun en andel $\sim T/T_F$ kan tilføres
 energi $\sim k_B T$ og dermed bidrage til C_V

Fordeling av elektronerna ved $T=0$ og $T>0$:

$T=0$



$T>0$



$f(E) \cdot D(E)$ = midlere antall elektroner pr energienhet

$$\Rightarrow N = \int_0^{\infty} f(E) \cdot D(E) \cdot dE$$

Eksempel: Elektronenes varmekapasitet C_V i metall for små T

U = indre energi

$$U(T) - U(0) \approx k_B T \cdot D(E_F) \cdot k_B T \sim T^2$$

$$\Rightarrow C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \sim T$$

$$\text{Gitterbidraget} \sim T^3 \Rightarrow C_V^{\text{tot}} = \alpha T + \beta T^3$$

