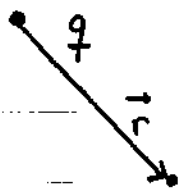


15.01.03 Speilingsmetoden for beregning av elektrisk potensial (Griffiths kap 3)

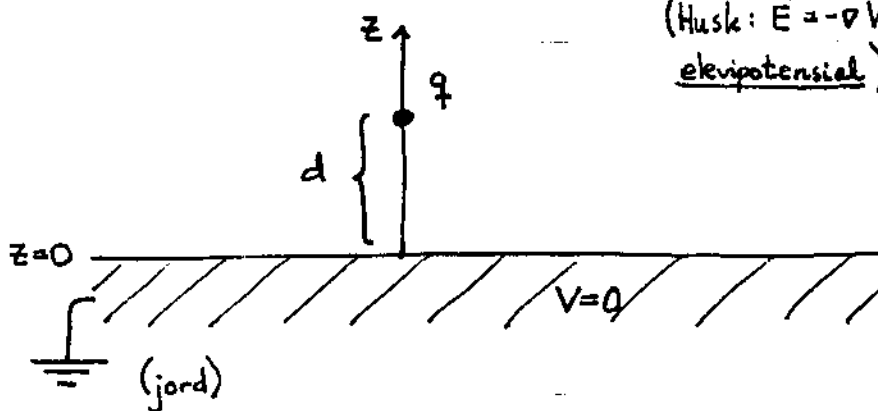
Punktladning:



$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Punktladning q i avstand d fra (uendelig) stor ledende overflate som er "jordet" (dvs $V=0$ overalt på lederen):

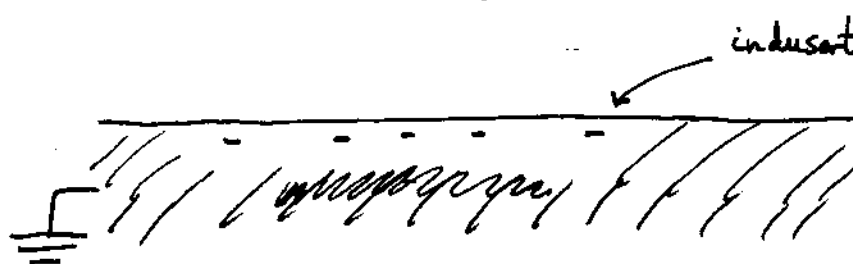
(Husk: $\vec{E} = -\nabla V = 0$ i leder $\Rightarrow$ ledaren er et ekvipotensial)



$$V(z > 0) = ?$$

$V \neq q/4\pi\epsilon_0 r$ fordi q tiltrekker negativ ladning i ledaren:

• $q > 0$



indusert overflateledning σ (som modifierer potensialet i området $z > 0$)

Husk: Leder (metall) har frie, mobile ledningsbærere (elektroner)

Hvordan beregne $V(z > 0)$?
(når vi ikke kjenner σ)

Matematisk:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{Gauss lov})$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \rho / \epsilon_0$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0}$$

Poissons ligning (følger fra Gauss lov)

I områder uden elektrisk ladning ($\rho = 0$):

$$\boxed{\nabla^2 V = 0}$$

Laplace's ligning

Laplace-operatoren:

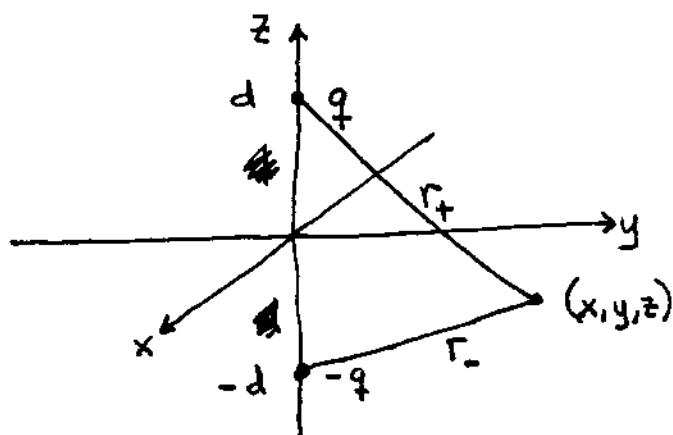
$$\nabla^2 f = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & (\text{kartesiske koord.}) \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} & (\text{kule-koord.}) \end{cases}$$

Skal her altså løse Poissons ligning med punktladning q i $(x, y, z) = (0, 0, d)$ med grænsebetingelserne

$$1) V = 0 \quad \text{for } z = 0$$

$$2) V \rightarrow 0 \quad \text{langt væk fra punktladningen, dvs for } x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$$

Tricks: Betragt følgende system:



$$r_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d)^2}$$

Dvs: Punktladninger q og $-q$ i hhv $(0,0,d)$ og $(0,0,-d)$
(ikke noe ledende plan!)

Elektrisk potensial:

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \right)$$

Har oppfylt:

1) $V(z=0) = 0$

2) $V \rightarrow 0$ når $x^2+y^2+z^2 \gg d^2$

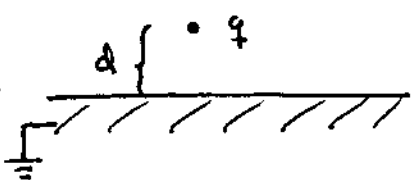
og vi har samme fysiske system i området $z > 0$

Entydighetsteorem (for bevis, se Griffiths kap 3.1 eller E. Kreyszig kap. 9):

Potensialet V i et område ^(volum) er entydig bestemt dersom

a) ladningstettheten ρ i området og

b) verdien av V på områdets grenseflate
er spesifisert

Dermed:  og  ($\leftarrow z=0$)

vi ha samme potensial $V(x,y,z)$ i området $z > 0$!

[Fordi vi har funnet en løsning av Poissons ligning med riktig verdi, $V=0$, på grenseflaten $z=0$ og $x^2+y^2+z^2 \rightarrow \infty$.]

Entydighetsteoremet garanterer da at dette er den eneste løsningen.]

Indusert ladning i ledaren:

Fra i høst:

$\vec{E} \perp$ overflaten til leder (Husk: $E_{||} \neq 0 \Rightarrow F_{||} \neq 0 \Rightarrow$ forflytning av frie lader.)



Gauss lov: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot A = q_{in}/\epsilon_0 = \sigma A/\epsilon_0$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (\hat{n} = \text{flatenormal})$$

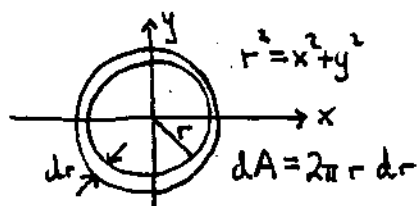
Her: $\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} = -\left(\nabla V\right)_{z=0} = -\left(\frac{dV}{dz}\right)_{z=0} \hat{z}$
 $\Rightarrow \sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{dV}{dz}\right)_{z=0}$

$$\sigma = -\epsilon_0 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(-\frac{1}{2}) \cdot 2(z-d)}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}} - \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot 2(z+d)}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}} \right]_{z=0}$$

$$= - \frac{q d}{2\pi (x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

[Som ventet: $\sigma < 0$ og $\max|\sigma|$ for $x=y=0$]

Total indusert ladning: $Q = \iint_{-\infty}^{\infty} \sigma(x,y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma(r,\varphi) r dr d\varphi$



$$= - \frac{2\pi q d}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}} dr$$

$$= -q d \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{(r^2+d^2)^{1/2}} \right) = -q$$

[ikke direkte ønsket?]

Kraft på punktladningen:

Tiltrukende kraft pga negativ σ , dvs $\vec{F} \sim -\hat{z}$.

~~Uten speilledning~~ Punktladningen q befinner seg i samme potensial som om vi hadde $-q$ i $(0,0,-d)$ uten leder.

$\Rightarrow$ felt $\vec{E}$ og kraft $\vec{F}$ som fra $-q$ i $(0,0,-d)$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{z}$$

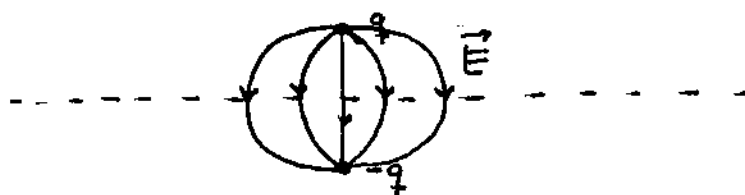
[Øving 1: regn ut $\vec{F}$ direkte ved hjelp av $\sigma(x,y)$.]

Potensiell energi:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \text{energi pr volumenet} \quad (\text{A\&F 25.11})$$

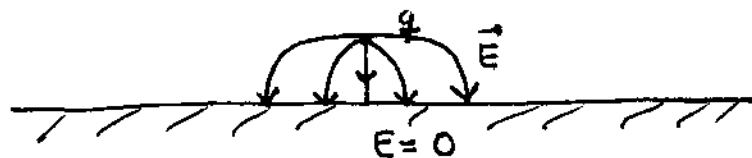
$$\Rightarrow U = \int u d^3r = \text{total energi} \quad (d^3r \equiv dV = \text{volumenelement})$$

Med speilledning uten leder:



$$U_{12} = q_1 V_1 = q_2 V_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2d} \quad (\text{A\&F 21.11})$$

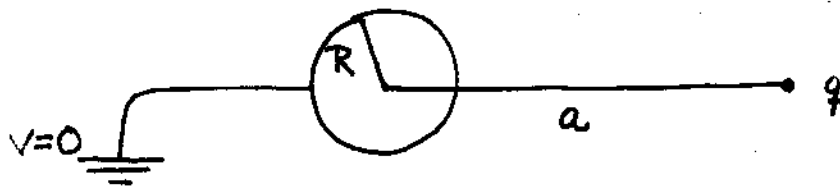
Med ledende plan uten speilledning:



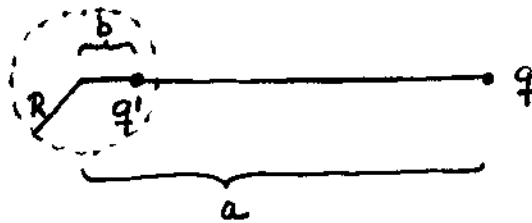
$$\text{Da } U = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d^3r, \text{ har vi åpenbart: } U = \frac{1}{2} U_{12} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4d}$$

[Hvis q og $-q$ flyttes fra $+\infty$ og $-\infty$ til $+d$ og $-d$, kan begge utføre et arbeid likt $-\int_{\infty}^d \vec{F} \cdot d\vec{s} = -(1/4\pi\epsilon_0) \int_{\infty}^d \frac{q^2}{z^2} dz = (1/4\pi\epsilon_0) (q^2/4d)$. Hvis bare $+q$ flyttes fra $+\infty$ til $+d$, utføres kun det ene arbeidet $(1/4\pi\epsilon_0) (q^2/4d)$. Den indre negative ledningen i ledaren flyttes ved konstant potensial $V=0$ og kan da ikke utføre noe arbeid!]

Eksempel 2: Punktladning og jordat, ledende kule



Potensial V utenfor kule det samme som for



med

$$q' = -\frac{R}{a} q, \quad b = \frac{R^2}{a}$$

[Øving 1: vis at speilladningen q' i avstand b fra kulas sentrum gir $V=0$ på (hele) kulas overflate. Finn induert flateledning $\sigma(\theta)$ på kula samt total ^{indusert} ladning Q . Bestem systemets potensielle energi U .]