NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 41 43 39 30

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
MNFFY 103 ELEKTRISITET OG MAGNETISME
Onsdag 21. mai 2003 kl. 0900 - 1500

Eksamen bestod av 10 deloppgaver (1, 2, 3, 4a, 4b, 5a, 5b, 6a, 6b, 6c) som alle telte like mye under bedømmelsen.

OPPGAVE 1

i. C. (Null elektrostatisk felt inne i metall eliminerer A og D. Kulesymmetrisk ladningsfordeling gir radielt rettede feltlinjer.)

ii. B. (Null felt i metall eliminerer A og D. Polarisering i plastlaget resulterer i redusert elektrisk feltstyrke her, altså mindre tetthet av feltlinjer her enn i den omgivende lufta.)

iii. C. (Hver metallplate er en ekvipotensialflate. Det dielektriske materialet vil riktignok polariseres, men fri ladning på platene vil fordele seg slik at det elektriske feltet (= potensialforskjellen mellom platene dividert med plateavstanden) blir like stort overalt mellom platene. Null felt utenfor platene: Like stort bidrag, med motsatt retning, fra de to platene.)

iv. A. (Magnetiske feltlinjer alltid lukkede. Symmetrien tilsier dessuten sirkulære feltlinjer.)

v. A. (Lukkede feltlinjer eliminerer C og D. Magnetfeltet må avta når vi fjerner oss fra strømsløyfa, hvilket eliminerer B.)

OPPGAVE 2

Symmetrien tilsier at $\boldsymbol{E}$ overalt er radielt rettet utover, og at E kun avhenger av r. Ettersom permittiviteten her varierer med r, er det enklest å benytte den oppgitte Gauss' lov for forskyvningen $\boldsymbol{D}$, og deretter bruke $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\varepsilon$ til å bestemme det elektriske feltet. Fri ladning i dette tilfellet er punktladningen i sentrum av kula. Vi velger en kuleflate med radius r som vår Gaussflate, og finner

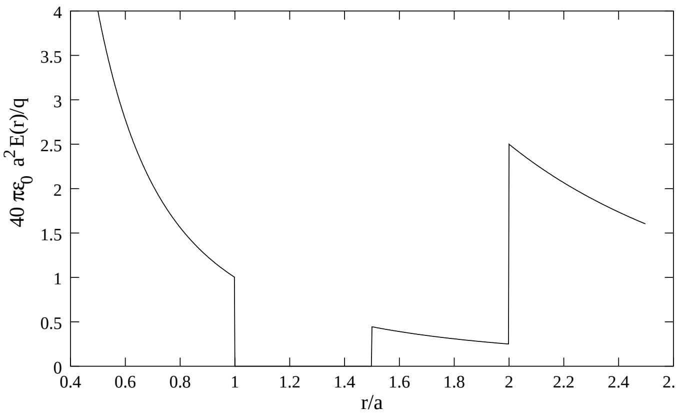
$$\begin{aligned} D(r) \cdot 4\pi r^2 &= q \\ \Rightarrow D(r) &= \frac{q}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$E(r) = \begin{cases} q/(40\pi\varepsilon_0 r^2) & \text{for } r < a \text{ og } 3a/2 < r < 2a \\ 0 & \text{for } a < r < 3a/2 \\ q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & \text{for } r > 2a \end{cases}$$

Inne i metallsjiktet har vi alltid $E = 0$ i elektrostatisk likevekt. Metallet kan betraktes som et dielektrikum i grensen $\varepsilon \to \infty$. Det gir $E = D/\varepsilon \to 0$, som stemmer.

Skisse av $E(r)$ (skalert med en faktor $40\pi\varepsilon_0 a^2/q$) mellom $r = a/2$ og $r = 5a/2$:



OPPGAVE 3

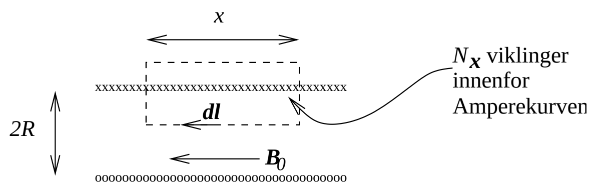
De to radielt rettede forbindelseslinjene gir ikke noe bidrag til magnetfeltet i punktet P. Bidragene fra de to halvsirklene finner vi ved å sette $d = 0$ i den oppgitte formelen og $L = a$ og $L = b$ for henholdsvis den minste og største halvsirkelen. Dessuten må vi dividere med en faktor 2, ettersom det oppgitte uttrykket gjelder for en hel sirkel. Retningen på de to bidragene får vi f.eks. fra høyrehåndsregelen: Inn i papirplanet fra den med radius a og motsatt fra den med radius b. Alt i alt:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

med retning inn i planet ($a < b$).

OPPGAVE 4

a) Magnetfeltet er homogent inne i spolen og rettet langs spolens lengderetning. Høyrehåndsregelen tilsier mot venstre i figuren gitt i oppgaveteksten. Vi velger da en rektangulær Amperekurve med lengde x langs spolen slik at N_x viklinger av spoletråden passerer innenfor rektangelet:



Utenfor spolen er magnetfeltet lik null. (Se forelesningene for begrunnelsen for at $B = 0$ utenfor spolen.) Det eneste bidraget til integralet på venstre side i Amperes lov kommer dermed fra integrasjonsveien av lengde x og parallell med $\boldsymbol{B}_0$, og vi får

$$B_0 \cdot x = \mu_0 N_x I_0$$

Faktoren N_x/x tilsvarer viklingstettheten N/d, slik at

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I_0}{d}$$

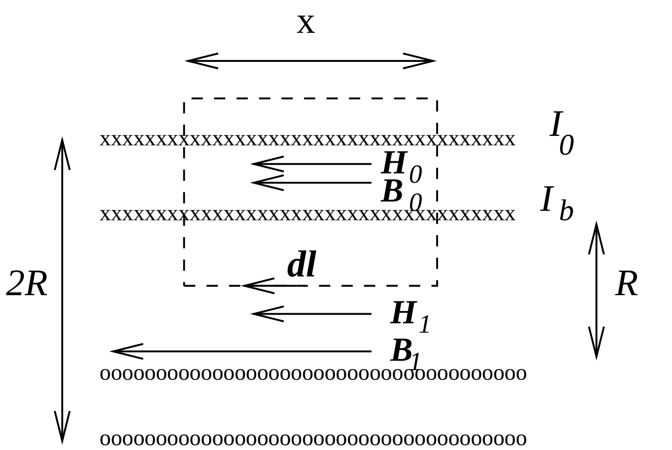
som skulle vises.
Tverrsnittet av spolen har areal $A = \pi R^2$, så total omsluttet magnetisk fluks blir

$$\Phi = N B_0 A = N \frac{\mu_0 N I_0}{d} \pi R^2$$

Selvinduktansen til spolen blir dermed

$$L_0 = \frac{\Phi}{I_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{d}$$

b) Strømmen I_0 i spoletråden setter opp et magnetfelt inne i spolen, og dermed også inne i den ferromagnetiske sylinderen. Magnetiske dipoler i materialet rettes inn langs det påtrykte magnetfeltet. På atomært nivå tilsvarer de magnetiske dipolene elektriske strømmer med samme omløpsretning som I_0. Internt i materialet vil disse atomære strømmene oppheve hverandre. Nettoeffekten blir en indusert overflatestrøm I_b på den ferromagnetiske sylinderen med samme retning som I_0. Magnetfeltet B_1 inne i sylinderen blir dermed som inne i en spole med strømstyrke $I_0 + I_b$ pr vikling, og dermed større enn feltet B_0 mellom sylinderen og spoletråden.
For å bestemme selvinduktansen L_1, må vi regne ut total magnetisk fluks inne i spolen. Vi starter med å bestemme $\boldsymbol{H}$ med den oppgitte Amperes lov. "Fri strøm" i dette tilfellet er selvsagt den påtrykte strømmen I_0 i spoletråden.



Med Amperekurve som vist i figuren finner vi H_1 inne i sylinderen:

$$\begin{aligned} H_1 \cdot x &= N_x I_0 \\ \Rightarrow H_1 &= \frac{N_x I_0}{x} = \frac{N I_0}{d} \end{aligned}$$

Uansett hvor vi legger den horisontale biten av Amperekurven inne i spolen, vil total *fri* strøm som omsluttes være $N_x I_0$. H-feltet må derfor bli konstant overalt inne i spolen: $H_0 = H_1$. Med sammenhengen $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ kan nå B_0 og B_1 bestemmes:

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu_1 H_1 = \frac{\mu_r \mu_0 N I_0}{d} \\ B_0 &= \mu_0 H_0 = \frac{\mu_0 N I_0}{d} \end{aligned}$$

Magnetfeltene B_0 og B_1 eksisterer over henholdsvis 3/4 og 1/4 av spolens tverrsnitt. Total omsluttet fluks blir dermed

$$\begin{aligned} \Phi &= N(3B_0 A/4 + B_1 A/4) = \frac{3}{4}\pi R^2 \frac{\mu_0 N^2 I_0}{d} + \frac{1}{4}\pi R^2 \frac{\mu_r \mu_0 N^2 I_0}{d} \\ &= \frac{(\mu_r + 3)\mu_0 N^2 \pi R^2}{4d} I_0 \end{aligned}$$

Selvinduktansen blir:

$$L_1 = \frac{\Phi}{I_0} = \left(\frac{\mu_r + 3}{4}\right) \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{d} = \left(\frac{\mu_r + 3}{4}\right) L_0$$

OPPGAVE 5

a) For VR-krets gir Kirchhoffs spenningsregel $V = RI$. Dermed:

$$\begin{aligned} & V_0 \exp(i\omega t) = RI_0 \exp(i\omega t) \\ \Rightarrow \quad & Z = \frac{V_0}{I_0} = R \\ \Rightarrow \quad & Z \equiv |Z| \exp(i\alpha) \equiv \{|Z|, \alpha\} = \{R, 0\} \end{aligned}$$

For VC-krets:

$$\begin{aligned} & V_0 \exp(i\omega t) = \frac{Q}{C} \\ \Rightarrow \quad & I = \frac{dQ}{dt} = CV_0 i\omega \exp(i\omega t) \\ \Rightarrow \quad & I_0 = i\omega C V_0 \\ \Rightarrow \quad & Z = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} \exp(-i\pi/2) = \{1/\omega C, -\pi/2\} \end{aligned}$$

For VL-krets:

$$\begin{aligned} & V_0 \exp(i\omega t) = L\frac{dI}{dt} = i\omega L I_0 \exp(i\omega t) \\ \Rightarrow \quad & Z = i\omega L = \{\omega L, \pi/2\} \end{aligned}$$

b) De to kretsene er henholdsvis serie- og parallellkobling av en motstand, en spole og en kondensator. Med resultatene fra punkt a) samt "oppskriftene" for kobling av flere impedanser (gitt i oppgaveteksten) finner vi:

i.

$$\begin{aligned} Z &= R + i\omega L + 1/i\omega C \\ &= R + i(\omega L - 1/\omega C) \\ &= 25 + i(0.25 - 25) \\ &= 25 - 24.75i \\ &\equiv |Z|e^{i\alpha} \end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{25^2 + 24.75^2} = 35.2\ \Omega \\ \alpha &= \arctan(-24.75/25) = -44.7\ ^\circ \quad (= -0.78 \text{ rad}) \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
Z^{-1} &= 1/R + 1/i\omega L + i\omega C \\
&= 1/R + i(\omega C - 1/\omega L) \\
&= 1/25 + i(0.04 - 4) \\
&= 0.04 - 3.96i \\
&\equiv \frac{1}{|Z|}e^{-i\alpha}
\end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}
|Z| &= 1/\sqrt{(0.04^2 + 3.96^2)} = 0.25\ \Omega \\
\alpha &= -\arctan(-3.96/0.04) = 89.4\ ^\circ \quad (= 1.56 \text{ rad})
\end{aligned}$$

Vi legger her merke til at impedansen med god tilnærmelse er den samme som om vi tok bort både kondensatoren og motstanden. Det skyldes at frekvensen er tilstrekkelig lav til at nesten all strøm passerer gjennom spolen (dog faseforskjøvet med -90° i forhold til den påtrykte spenningen).

OPPGAVE 6

a) For å bestemme det totale antall elektroner i ledningsbåndet, må vi integrere det oppgitte uttrykket for $dN_c(E)$ fra bunnen av ledningsbåndet, $E = E_c$, og til $E = \infty$:

$$N_c = \int_{E_c}^{\infty} D_c(E) f(E) dE$$

Innsetting av det oppgitte fritt-elektron-uttrykket for $D_c(E)$ samt det tilnærmede uttrykket for $f(E)$ gir

$$N_c = \frac{V}{2\hbar^3\pi^2}(2m_c)^{3/2} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} \exp\left(\frac{\mu - E}{k_B T}\right) dE$$

Integralet løses ved å substituere

$$x = \frac{E - E_c}{k_B T}$$

slik at integrasjonsgrensene med x som variabel blir 0 og ∞, og $dE = k_B T dx$. Integralet i uttrykket for N_c blir

$$(k_B T)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu - E_c}{k_B T}\right) \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx$$

Verdien av dette integralet er oppgitt til $\sqrt{\pi}/2$, så antall elektroner i ledningsbåndet blir

$$N_c = \frac{V}{2\hbar^3\pi^2}(2m_c)^{3/2}k_B^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}T^{3/2}\exp\left(\frac{\mu - E_c}{k_B T}\right)$$

og tettheten av "ledningselektroner" er

$$n = \frac{N_c}{V} = \frac{1}{4}\left(\frac{2m_c k_B}{\hbar^2\pi}\right)^{3/2} T^{3/2}\exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right)$$

der vi har benyttet at det kjemiske potensialet μ ligger midt i båndgapet. Konstanten A er altså

$$A = \frac{1}{4}\left(\frac{2m_c k_B}{\hbar^2\pi}\right)^{3/2}$$

Forholdet mellom n ved 600 og 300 K blir

$$\frac{n(600)}{n(300)} = \frac{600^{3/2}\exp\left(-\frac{E_g}{2k_B\cdot 600}\right)}{300^{3/2}\exp\left(-\frac{E_g}{2k_B\cdot 300}\right)} = 2^{3/2}\exp\left(\frac{E_g}{2k_B}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{600}\right)\right)$$

Med $E_g = 0.67$ eV og $k_B = 8.617\cdot 10^{-5}$ eV/K blir dette forholdet lik 1843.

b) Ved $T = 0$ er valensbåndet i Ge fylt med elektroner, mens ledningsbåndet er helt tomt. Uten termisk energi til stede vil heller ikke det ytterste valenselektronet i As, med energi E_d, kunne eksiteres til krystallens ledningsbånd.
Etterhvert som temperaturen økes, vil flere og flere elektroner kunne eksiteres til de ledige tilstandene i ledningsbåndet. Sannsynligheten for slik termisk eksitasjon avhenger eksponentielt av energiforskjellen mellom opprinnelig tilstand og eksitert tilstand. De første elektronene som eksiteres til ledningsbåndet er derfor nevnte valenselektroner i As. Etterhvert har vi tilstrekkelig termisk energi tilgjengelig til at så godt som alle As-atomene har gitt fra seg hvert sitt elektron til ledningsbåndet. Dette skjer omtrent ved temperaturen T_1. En ytterligere økning i temperaturen gir ingen endring i n, siden vi ennå ikke har nok termisk energi til at vi i særlig grad får eksitert elektroner fra valensbåndet ($E \simeq E_v$). Dermed får vi et platå i $n(T)$, med n lik konsentrasjonen av As-atomer.
Ved temperaturen T_2 er den termiske energien stor nok til at et betydelig antall elektroner eksiteres fra okkuperte tilstander nær toppen av valensbåndet og opp i ledige tilstander i ledningsbåndet. Ytterligere temperaturøkning fører til at n etterhvert domineres av elektroner eksitert fra valensbåndet.

Temperaturene T_1 og T_2 angir altså at vi har tilstrekkelig termisk energi til å eksitere elektroner fra henholdsvis E_d og E_v, til ledningsbåndet, E_c. Vi må da ha

$$k_B T_1 \sim E_c - E_d$$

og

$$k_B T_2 \sim E_c - E_v$$

c) Strømmen I innebærer at elektroner passerer gjennom halvlederen med en viss midlere driftshastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ (la oss vente med fortegnet til slutt). Med et magnetfelt $\boldsymbol{B} = B_z\hat{z}$ medfører dette at elektronene avbøyes i y-retning, på grunn av kraften $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Dermed oppstår et overskudd av henholdsvis positiv og negativ ladning på hver side av halvlederen, hvilket induserer et elektrisk felt $\boldsymbol{E} = E_y\hat{y}$. Ved stasjonære forhold må den totale Lorentzkraften forsvinne. Det oppnås når

$$E_y = vB_z$$

Sammenhengen mellom v og I er gitt ved

$$v = \frac{j}{nq} = \frac{I}{nqbc}$$

der j er strømtettheten og bc er arealet på tvers av strømmens retning. Videre har vi sammenhengen mellom E_y og Hallspenningen:

$$V_y = E_y \cdot b$$

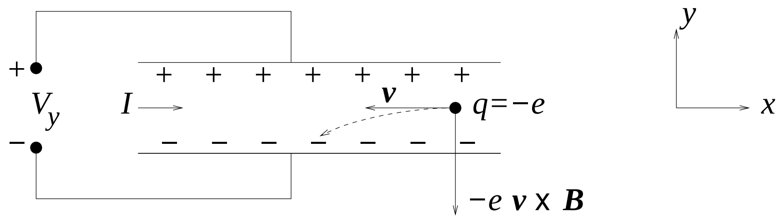
Kombinerer vi dette, finner vi

$$n = \frac{I}{vqbc} = \frac{B_z I}{qcV_y}$$

Med $B_z = 0.3$ T, $I = 3.4 \cdot 10^{-3}$ A, $V_y = 4.7 \cdot 10^{-3}$ V, $c = 5 \cdot 10^{-3}$ m og $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C fås

$$n = 2.7 \cdot 10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}$$

($= 2.7 \cdot 10^{14}\ \mathrm{cm}^{-3}$).
Positiv strøm I i positiv x-retning betyr at de negativt ladete elektronene beveger seg i negativ x-retning:



Den magnetiske kraften $-e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ virker dermed i *negativ* y-retning, så elektronene avbøyes *nedover*. Polariteten blir dermed som vist i figuren, med høyest potensial på oversiden av silisiumbiten.