Institutt for fysikk, NTNU
Fag MNFFY 103 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2003

Løsningsforslag til øving 1

Veiledning tirsdag 21. januar

Oppgave 1

a) Total indusert ladning på lederens overflate finner vi ved å integrere ladningstettheten σ over hele xy-planet: $Q = \int \sigma dxdy$. Som antydet i oppgaven er det her enklest å bruke polarkoordinater(r, θ):

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sigma(r) r dr d\theta$$

Her er arealelementet $dA = rdrd\theta$ en bit av en ring med radius r, tykkelse dr og "bredde" $rd\theta$. Ladningstettheten er pga symmetrien kun avhengig av r:

$$\sigma(r) = -\frac{qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

Integralet over θ gir en faktor 2π, slik at vi får

$$Q = -qd \int_0^{\infty} \frac{rdr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} = qd \left|_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}} = -q\right.$$

b) For det første er det opplagt at kraften må være *tiltrekkende*, slik at retningen på $\vec{F}$ blir i negativ z-retning. Videre befinner punktladningen q seg i samme potensial, og dermed i samme elektriske felt $\vec{E}$, som om vi hadde en punktladning $-q$ i posisjon $(0, 0, -d)$. Kraften må derfor bli som Coulombkraften mellom to punktladninger q og $-q$ i innbyrdes avstand $2d$:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{z}$$

Vi viser dernest at Coulomb–vekselvirkningen mellom q og $\sigma(r)$ gir samme resultat for kraften på q. Som i oppgave *a*) bruker vi polarkoordinater (r, θ) og ser på bidraget til kraften fra en ring med radius r og bredde dr. Av

symmetrigrunner må kraften dF på q fra en slik ring peke i (negativ) z-retning. Avstanden fra q til ringen kaller vi f.eks. s og får

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\sigma 2\pi r dr}{s^2}\frac{d}{s}$$

Her har vi brukt at ringens ladning er $\sigma \cdot 2\pi r dr$, mens faktoren d/s plukker ut z-komponenten. Vi har dessuten $s = \sqrt{r^2+d^2}$, så total kraft blir

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{q(-qd)2\pi r dr \cdot d}{2\pi(r^2+d^2)^{3/2}(r^2+d^2)(r^2+d^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{q^2d^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2+d^2)^3} \\ &= -\frac{q^2d^2}{4\pi\epsilon_0}\left|_0^\infty \left(-\frac{1}{4(r^2+d^2)^2}\right)\right. \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} \end{aligned}$$

c) *Med* speilladning *uten* leder er E^2 symmetrisk med hensyn på xy-planet. Uten speilladning men med leder har vi samme elektriske felt i området $z > 0$, mens $E = 0$ i området $z < 0$. Dermed, ettersom $U = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d^3r$, må U bli *halvparten* så stor som U_0:

$$U = \frac{1}{2}U_0 = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$

Oppgave 2

a) Vi bruker cosinus-setningen til å uttrykke l og l' ved r og θ:

$$l = \sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}$$

$$l' = \sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}$$

Setter vi disse uttrykkene inn i V sammen med de oppgitte uttrykkene for q' og b, får vi det oppgitte uttrykket for V.

b) Som alltid må det elektriske feltet $\vec{E} = -\nabla V$ stå normalt på overflaten til den ledende kula, dvs ved $r = R$. På overflaten av ei kule tilsvarer normalretningen den radielle retningen, slik at $\vec{E} = -(dV/dr)\hat{r}$. Dessuten

har vi sammenhengen $E = \sigma/\epsilon_0$ mellom elektrisk feltstyrke E og lederens flateladningstetthet σ. Dermed er det bare å derivere den oppgitte V med hensyn på r, sette inn $r = R$ og gange med ϵ_0:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{q}{4\pi}\left[\frac{r - a\cos\theta}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\frac{a^2 r}{R^2} - a\cos\theta}{\left(R^2 + \left(\frac{ra}{R}\right)^2 - 2ra\cos\theta\right)^{3/2}}\right]_{r=R} \\
&= -\frac{q}{4\pi R}\frac{a^2 - R^2}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Det virker fornuftig at vi har størst σ for $\theta = 0$ (minst nevner, lik $(a - R)^3$) og minst σ for $\theta = \pi$ (størst nevner, lik $(a + R)^3$).

La oss først bestemme total indusert overflateladning Q på den ledende kula ved å integrere tettheten σ over kuleflaten:

$$Q = \int \sigma dA$$

Helt generelt er et differensielt kuleflateelement gitt ved $dA = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$, der R er kulas radius, θ er vinkelen mellom $\vec{r}$ og z-aksen (se figuren i oppgaveteksten), mens ϕ er vinkelen mellom projeksjonen av $\vec{r}$ på xy-planet og x-aksen. I vårt tilfelle er σ uavhengig av vinkelen ϕ, så integralet over ϕ gir rett og slett en faktor 2π. Dermed finner vi:

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{q}{4\pi R}(a^2 - R^2)2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}} \\
&= -\frac{qR(a^2 - R^2)}{2}\Bigg|_0^\pi \frac{1}{Ra(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{1/2}} \\
&= -\frac{q(a^2 - R^2)}{2a}\left[(R^2 + a^2 + 2Ra)^{-1/2} - (R^2 + a^2 - 2Ra)^{-1/2}\right] \\
&= -\frac{q(a^2 - R^2)}{2a}\left[\frac{1}{a + R} - \frac{1}{a - R}\right] \\
&= -\frac{q(a^2 - R^2)}{2a}\left[-\frac{2R}{a^2 - R^2}\right] \\
&= -q\frac{R}{a}
\end{aligned}$$

Med andre ord: Total indusert ladning på kuleoverflaten er like stor som speilladningen q'.

Dette kunne vi ha sagt umiddelbart ved å benytte oss av Gauss lov på integralform: Velg en lukket Gaussflate S som omslutter hele den ledende kula. Det spiller ingen rolle om punktladningen q ligger innenfor eller utenfor S, la oss for eksempel anta at q ligger utenfor S. Da sier Gauss lov

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q/\epsilon_0$$

og ettersom speilladningen q' resulterer i samme elektriske felt $\vec{E}$ overalt på flaten S, må total ladning innenfor S være like stor i de to tilfellene. Konklusjon: $Q = q' = -qR/a$.

c) For å bestemme systemets potensielle energi ser vi på hvor stort arbeid som trengs for å bringe punktladningen q fra $z = \infty$ til $z = a$. Hva med den induserte ladningen på kula, er det ikke også et arbeid knyttet til dannelsen av denne? Nei! Hele kula ligger fast på konstant potensial $V = 0$, så det kreves *null arbeid* for å indusere σ. Det betyr at vi kan se bort fra arbeidet som skal til for å bringe speilladningen $q' = -qR/z$ fra $b = 0$ til $b = R^2/a$. (Med punktladningen q i vilkårlig avstand z ligger speilladningen $q' = -qR/z$ i posisjon R^2/z.) Coulombkraften på q fra q' er

$$F(z) = \frac{q\left(-q\frac{R}{z}\right)}{4\pi\epsilon_0\left(z - \frac{R^2}{z}\right)^2}$$

slik at arbeidet utført på q, og dermed systemets potensielle energi U, blir

$$\begin{aligned} U &= -\int_\infty^a F(z)dz \\ &= \frac{q^2R}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^a \frac{dz}{z\left(z - \frac{R^2}{z}\right)^2} \\ &= \frac{q^2R}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^a \frac{zdz}{(z^2 - R^2)^2} \\ &= -\frac{q^2R}{4\pi\epsilon_0}\Bigg|_\infty^a \frac{1}{2(z^2 - R^2)} \\ &= -\frac{q^2R}{8\pi\epsilon_0(a^2 - R^2)} \end{aligned}$$

Et negativt arbeid utført på q innebærer at systemet har *lavere* potensiell energi når q er i posisjon $z = a$ enn når q er uendelig langt borte. Det er da også rimelig, ettersom q *tiltrekkes* av den induserte ladningen på kula.