Institutt for fysikk, NTNU
Fag MNFFY 103 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2003

Løsningsforslag til øving 2

Veiledning tirsdag 28. januar

Oppgave 1

$$
\begin{aligned}
& \nabla \cdot \nabla \times \vec{v} \\
= \; & \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \hat{y}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right) \\
= \; & \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a) Enten vi har tenkt å bruke Gauss lov, Amperes lov eller som her, Ampere-Maxwells lov, til å løse et problem, må vi først finne ut hva vi kan om symmetrien i problemet. Her er det åpenbart at vi har sylindersymmetri, dvs magnetfeltet B må ha samme verdi overalt på en sirkel konsentrisk med lederen. Retningen på $\vec{B}$ finner vi ved å gå tilbake til Biot-Savarts lov: $d\vec{B} \sim I d\vec{l} \times \hat{r}$ viser at $\vec{B}$ må peke tangentielt til den valgte konsentriske sirkelen.
I Ampere-Maxwells lov kan vi velge, etter hva som er mest hensiktsmessig, den flaten som avgrenses av "Ampere-kurven" (her: sirkel med radius s, konsentrisk med lederen). La oss f.eks. velge den minste flaten, dvs en sirkelformet skive med radius s inne i lederens gap. Ampere-Maxwells lov er:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \mu_0 I_{\text{inn}}$$

der I_{inn} angir netto strøm som passerer gjennom den valgte flaten.
Kurveintegralet på venstre side av ligningen blir enkelt: Ettersom $\vec{B}$ ligger tangentielt til integrasjonskurven og har konstant absoluttverdi, får vi rett og slett $B \cdot 2\pi s$.

Det siste leddet på høyre side er også enkelt: Med omsluttet flate inne i gapet passerer det ikke noe strøm gjennom den, dvs $I_{\text{inn}} = 0$.
Mellom de to kondensatorplatene, med ladningstetthet hhv $+\sigma$ (til venstre) og $-\sigma$ (til høyre), er den elektriske feltstyrken $E = \sigma/\epsilon_0$. Med ladning $\pm Q$ på platene er $\sigma = Q/A = Q/\pi a^2$. Første ledd på høyre side i Ampere-Maxwells lov blir dermed:

$$\mu_0\epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0}{\pi a^2}\frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \pi s^2 = \frac{\mu_0 I s^2}{a^2}$$

der vi har brukt at $I = \partial Q/\partial t$, og integrert over skiva med areal πs^2.
Magnetfeltet inne i gapet blir dermed

$$B(s) = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}$$

Vi kunne alternativt ha brukt en annen omsluttet flate i Ampere-Maxwells lov, f.eks. den vi får ved å forskyve den sirkelformede skiva i lederens retning inntil skiva ligger inne i lederen. Da vil første ledd på høyre side gi null bidrag (siden $\vec{E} = 0$ inne i lederen), mens $I_{\text{inn}} = Is^2/a^2$. Resultatet for $B(s)$ blir selvsagt det samme.
b) Fra punkt *a*) har vi altså at

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2}\hat{\phi} = B_\phi(s)\hat{\phi}$$

Bruker vi det oppgitte uttrykket for $\nabla \times \vec{B}$ i sylinderkoordinater, ser vi at vi kun får bidrag fra ett ledd:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(sB_\phi\right)\hat{z} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mu_0 I s^2}{2\pi a^2}\right)\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\hat{z}$$

(med $\hat{z}$ i strømmens retning). Inne i lederen er dette nettopp lik $\mu_0\vec{j}$, mens inne i gapet er dette lik $\mu_0\epsilon_0\partial\vec{E}/\partial t$, begge deler som det skal være!