

Løsningsforslag til øving 3

Veiledning fredag 7. februar

Oppgave 1

a) La oss starte med å se på tilfellet $i = 1$:

$$(\vec{u} \times \vec{v})_1 = \epsilon_{1jk} u_j v_k = \epsilon_{123} u_2 v_3 + \epsilon_{132} u_3 v_2 = u_2 v_3 - u_3 v_2$$

som stemmer. Tilfellene $i = 2$ og $i = 3$ kan vises på tilsvarende måte, og dermed har vi vist at det oppgitte uttrykket representerer en vilkårlig komponent i av kryssproduktet.

b) Vi regner ut divergensen til kryssproduktet direkte:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot \\ &\quad [(E_y B_z - E_z B_y) \hat{x} - (E_x B_z - E_z B_x) \hat{y} + (E_x B_y - E_y B_x) \hat{z}] \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial x} B_z + E_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} B_y - E_z \frac{\partial B_y}{\partial x} - \\ &\quad \frac{\partial E_x}{\partial y} B_z - E_x \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial y} B_x + E_z \frac{\partial B_x}{\partial y} + \\ &\quad \frac{\partial E_x}{\partial z} B_y + E_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial z} B_x - E_y \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ &= B_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - B_y \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + B_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \\ &\quad E_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + E_y \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) - E_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ &= B_x (\nabla \times \vec{E})_x + B_y (\nabla \times \vec{E})_y + B_z (\nabla \times \vec{E})_z - \\ &\quad E_x (\nabla \times \vec{B})_x - E_y (\nabla \times \vec{B})_y - E_z (\nabla \times \vec{B})_z \\ &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \end{aligned}$$

som skulle vises.

c) Utledningen i punkt b) blir endel enklere hvis vi tar i bruk Levi-Civitasymbolet samt summekonvensjonen (dvs summasjon over gjentatte indekser):

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} E_j B_k \\
 &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} B_k + \epsilon_{ijk} E_j \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \\
 &= \epsilon_{kij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} B_k - E_j \epsilon_{jik} \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \\
 &= (\nabla \times \vec{E})_k B_k - E_j (\nabla \times \vec{B})_j \\
 &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})
 \end{aligned}$$

som funnet i punkt b). Legg merke til at alle tre indekser her er gjentatte og skal dermed summeres over, fra 1 til 3. Og det er jo som det skal være: Divergensen til en vektor er en skalar størrelse som fås ved å summere over alle 3 “komponenter”.

Oppgave 2

a) Mellom de to kondensatorplatene, med ladningstetthet hhv $+\sigma$ (til venstre) og $-\sigma$ (til høyre), er den elektriske feltstyrken $\vec{E}(t) = \hat{z}\sigma(t)/\epsilon_0$. Her er $\sigma(t) = 0$ for $t < 0$. Med konstant og jevnt fordelt strøm I fra og med $t = 0$, blir $\sigma(t) = Q(t)/A = It/\pi a^2$, så det elektriske feltet blir

$$\vec{E}(t) = \frac{It}{\epsilon_0 \pi a^2} \hat{z}$$

Dvs lineært voksende med t og uavhengig av avstanden fra senteraksen s . Magnetfeltet blir som beregnet i øving 2, ved hjelp av Ampere-Maxwells lov:

$$\vec{B}(s) = \frac{\mu_0 I s}{2\pi a^2} \hat{\phi}$$

Dvs “sirkulært” rettet, lineært voksende med s og uavhengig av tiden t . ($B = 0$ for $t < 0$.)

b) Når vi kjenner $\vec{E}$ og $\vec{B}$, kjenner vi også tettheten av elektromagnetisk feltenergi:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{em}} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \\
 &= \frac{I^2 t^2}{2\epsilon_0 \pi^2 a^4} + \frac{\mu_0 I^2 s^2}{8\pi^2 a^4}
 \end{aligned}$$

Poyntings vektor blir

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{I^2 s t}{2\epsilon_0 \pi^2 a^4} \hat{s}$$

der vi har brukt at $\hat{z} \times \hat{\phi} = -\hat{s}$. $\vec{S}$ er altså rettet radielt innover, og vokser lineært med både s og t .

c) Sjekker først energibevarelse lokalt:

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = \frac{I^2 t}{\epsilon_0 \pi^2 a^4}$$

$$-\nabla \cdot \vec{S} = -\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s S_s) = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \frac{I^2 s^2 t}{2\epsilon_0 \pi^2 a^4} = \frac{I^2 t}{\epsilon_0 \pi^2 a^4}$$

og vi ser at høyre og venstre side i Poyntings teorem er like store.

Deretter energibevarelse globalt (dvs i hele gapets volum, idet vi antar at $\vec{E} = 0$ overalt utenfor gapet, og romlig homogen inne i gapet). Ettersom vi skal derivere med hensyn på t på venstre side, trenger vi bare å se på den tidsavhengige delen av u_{em} . Denne biten tilsvarer $\epsilon_0 E^2/2$ og er romlig homogen. Dermed blir venstre side i Poyntings teorem:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{I^2 t^2}{2\epsilon_0 \pi^2 a^4} \cdot w \pi a^2 \right) = \frac{I^2 t w}{\epsilon_0 \pi a^2}$$

På høyre side av Poyntings teorem har vi flateintegralet av Poyntings vektor over gapets overflate. Vi får null bidrag fra “endeflatene” for der er $d\vec{A} \perp \hat{s}$. På sylinderoverflaten er $s = a$, og altså $|\vec{S}|$ konstant. Her er videre $d\vec{A}$ parallell med $\hat{s}$, så alt i alt finner vi

$$-\oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{I^2 a t}{2\epsilon_0 \pi^2 a^4} \cdot 2\pi a w = \frac{I^2 t w}{\epsilon_0 \pi a^2}$$

Dermed har vi vist at $dU/dt = -\oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$, som betyr energibevarelse for hele gapet.