

Løsningsforslag til øving 4

Veiledning fredag 14. februar

Oppgave 1

a) Parallellplatekondensatoren er etterhvert en gammel kjenning, så vi tar sjansen på å skrive ned det elektriske feltet mellom platene på direkten:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

dvs uniformt, og rettet fra positiv til negativt ladet plate. Vi har ikke noe magnetfelt her, $\vec{B} = 0$ overalt.

Dermed har vi for ij -komponenten av trykk tensoren:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right)$$

der δ_{ij} er Kronecker delta, lik 1 hvis $i = j$ og 0 ellers.

Her er $E_z = -\sigma/\epsilon_0$ mens $E_x = E_y = 0$. Dermed er $E = (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)^{1/2} = \sigma/\epsilon_0$ og vi får:

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \epsilon_0 \left(0 - \frac{1}{2} E^2 \right) = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \\ T_{xy} &= \epsilon_0 (0 - 0) = 0 \\ T_{yy} &= \epsilon_0 \left(0 - \frac{1}{2} E^2 \right) = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \\ T_{zz} &= \epsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

På samme måte som $T_{xy} = 0$ må samtlige ikke-diagonale elementer bli lik 0. Dermed:

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ettersom $\vec{B} = 0$ overalt, er også $\vec{S} = 0$ overalt.

b) I forelesningene kom vi fram til at den totale kraften på ladningene i et volum V avgrenset av en lukket flate A er

$$\vec{F} = \oint_A \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} dV$$

Da $\vec{S} = 0$, forsvinner det siste leddet på høyre side. La oss se på et volum som omslutter et bestemt areal på den øverste platen, f.eks. en rektangulær boks med topplokk og bunn i avstand $h/2$ henholdsvis over og under platen, og med areal L^2 . Sideveggene, med flatenormaler i positiv og negativ x - og y -retning, har altså areal hL . [Dette er akkurat det samme som vi gjorde på Øving 5 i høst, i forbindelse med grenseflatebetingelser for elektrisk felt.] For å finne kraften som virker på ladningene på flaten med areal L^2 skal vi altså bestemme flateintegralet av trykktensoren på overflaten av den rektangulære boksen. Det enkleste er å la $h \rightarrow 0$, for da vil åpenbart også bidraget til integralet fra sideveggene gå mot null. [Dette er ikke *nødvendig*, ettersom bidraget fra motstående sidevegger vil kansellere hverandre, og dermed gi null bidrag totalt uansett.] Med $h \rightarrow 0$ står vi altså igjen med topplokket og bunnen. Der topplokket ligger har vi $E = 0$, og følgelig $\overleftrightarrow{T} = 0$, så intet bidrag herfra. Ved bunnen er $\overleftrightarrow{T}$ som bestemt i punkt a), mens $d\vec{A} = -dA\hat{z}$, slik at integranden blir

$$\overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} dA = \frac{\sigma^2 dA}{2\epsilon_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{\sigma^2 dA}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Alternativt kan vi skrive $d\vec{A} = dA_x \hat{x} + dA_y \hat{y} + dA_z \hat{z}$ med $dA_x = 0$, $dA_y = 0$ og $dA_z = -dA$, og deretter regne ut de tre komponentene av integranden:

$$\begin{aligned} \left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A} \right)_x &= T_{xx} dA_x + T_{xy} dA_y + T_{xz} dA_z = 0 + 0 + 0 = 0 \\ \left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A} \right)_y &= T_{yx} dA_x + T_{yy} dA_y + T_{yz} dA_z = 0 + 0 + 0 = 0 \\ \left(\overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{A} \right)_z &= T_{zx} dA_x + T_{zy} dA_y + T_{zz} dA_z = 0 + 0 + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot (-dA) = -\frac{\sigma^2 dA}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

altså samme resultat.

Integranden er altså konstant over hele bunnen av boksen, så integralet blir rett og slett

$$-\frac{\sigma^2 L^2}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Dette er total kraft som virker på ladningene på flaten med areal L^2 . Kraft pr flateenhet må derfor bli

$$\frac{\vec{F}}{L^2} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

Ikke urimelig at kraften på den øverste platen virker nedover, for den vil jo tiltrekkes av den motsatt ladete platen.

Kommentar: Første tanke som melder seg nå er at dette måtte vi da ha kunnet løse på en mye enklere måte. Det er jo bare snakk om å bestemme kraften på en jevnt fordelt ladning i et elektrostatiske felt som vi skrev ned på direkten. La oss prøve: Ladningen på et kvadratisk areal med sidekanter L er $Q = \sigma L^2$. Det elektriske feltet er $\vec{E} = -\hat{z}\sigma/\epsilon_0$. Altså blir kraften pr flateenhet

$$\frac{\vec{F}}{L^2} = \frac{Q\vec{E}}{L^2} = -\frac{\sigma^2}{\epsilon_0}\hat{z}$$

...som er dobbelt så stor som det vi fant ved hjelp av trykktensoren!? Begge deler kan ikke være riktig, og det er nok den enkle framgangsmåten som ble litt i enkleste laget. Feilen ligger i at vi her har inkludert bidraget til det elektriske feltet fra ladningene som vi skal beregne kraften på! Det blir like galt som å påstå at det går an å løfte seg selv etter håret. Nei, kraften må nok beregnes med utgangspunkt i alle de *andre* ladningene i systemet. Av symmetrigrunner kan vi i dette problemet konkludere med at resten av ladningene på den positivt ladete platen tilsammen virker med null kraft på den "utvalgte" ladningen. Dermed står vi igjen med den negativt ladete platen, og det elektriske feltet fra en enkelt ladet plate kjenner vi, nemlig $\sigma/2\epsilon_0$. Dermed kom den manglende faktoren 2 på plass, og vi finner samme kraft pr flateenhet som vi fant ved hjelp av trykktensoren.

Nok en kommentar: Ut fra ovenstående kommentar går det ikke fram at resultatet $\sigma^2/2\epsilon_0$ for kraften pr flateenhet gjelder mer generelt enn som så. Faktum er at dette gjelder for enhver overflate av en elektrisk leder, hvilket burde gå fram av følgende argument: Betrakt et lite areal på lederens overflate. Er det lite nok, har vi tilnærmet konstant ladningstetthet σ på hele arealet. Dette lille arealet gir et bidrag $\sigma/2\epsilon_0$ til det elektriske feltet på begge sider av overflaten, rettet normalt bort fra flaten. Resten av ladningene på lederens overflate må bidra til det elektriske feltet på en slik måte at vi alt i alt får null felt på innsiden (dvs inne i lederen) og et felt σ/ϵ_0 på utsiden. Med andre ord, resten av lederens ladninger må gi nøyaktig et bidrag $\sigma/2\epsilon_0$,

rettet mot overflaten av det utvalgte arealet inne i lederen og rettet bort fra overflaten på utsiden. Følgelig blir kraften pr flateenhet av lederen alltid $\sigma^2/2\epsilon_0$, rettet utover.

Oppgave 2

a) Dersom konduktiviteten er proporsjonal med tettheten av mobile ladninger, må vi øke ladningstettheten med en faktor 10^7 for å oppnå en tilsvarende økning i konduktiviteten. Det betyr at ladningstettheten må økes fra $1.45 \cdot 10^{10}$ pr cm^3 til $1.45 \cdot 10^{17}$ pr cm^3 , som dermed blir antall fosforatomer som må tilføres. [Egentlig differansen mellom disse to tallene, men $1.45 \cdot 10^{10}$ er jo tilnærmet lik null i forhold til $1.45 \cdot 10^{17}$.]

b) I silisium har vi $5 \cdot 10^{22}$ atomer pr cm^3 . Brøkdelen atomer som erstattes av fosfor er dermed

$$\frac{n_{\text{P}}}{n_{\text{Si}}} = \frac{1.45 \cdot 10^{17}}{5 \cdot 10^{22}} = 2.9 \cdot 10^{-6}$$

Altså tilstrekkelig å bytte ut ett av ca 350000 Si-atomer!

Oppgave 3

I forelesningene fant vi følgende uttrykk for Hall-spenningen V_H :

$$V_H = \frac{1}{nq} j B w$$

der $j = I/A$ er strømtettheten, B er magnetfeltet, w er Hall-prøvens tykkelse, n er tettheten av mobile ladninger, og q er ladningen pr ladningsbærer, $|q| = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Ifølge oppgaven bidrar et fosforatom i silisium med ett *elektron*, slik at de mobile ladningene er negative i dette tilfellet. Her spiller det liten rolle, det var kun spørsmål om antall ladninger. Med de oppgitte tallene finner vi

$$n = \frac{IBw}{eAV_H} = \frac{2.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8 \cdot 10^{-3}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 2.0 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{4.8} \cdot 10^{22} \simeq 0.2 \cdot 10^{22} \text{ pr } \text{m}^3$$

Følgelig er tettheten av fosforatomer i Hall-prøven ca $0.2 \cdot 10^{16}$ pr cm^3 .