Institutt for fysikk, NTNU
Fag MNFFY 103 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2003

Løsningsforslag til øving 5

Veiledning fredag 21. februar

Oppgave 1

a) Vi regner ut venstre side av ligningen:

$$\hat{p}\psi(z) = -i\hbar \frac{d}{dz} e^{ikz} = (-i\hbar)(ik)e^{ikz} = \hbar k \psi(z)$$

Dermed har vi vist at $\psi(z)$ er egenfunksjon til $\hat{p}$ med egenverdi $p = \hbar k$.

b) Sammenhengen mellom hastighet og impuls er $p = mv$. Dermed blir

$$v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$$

Sammenhengen mellom bølgetall k og bølgelengde λ er

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Dermed er

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Oppgave 2

a) La oss studere passering til høyre for senterlederen. Symmetrien i eksperimentet tilsier at passering til venstre blir helt tilsvarende, men med motsatt fortegn. Dersom elektronet påvirkes av en kraft $\vec{F}$ i et tidsrom dt, blir impulsendringen ifølge Newtons 2. lov

$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

Dermed blir endringen i x-komponenten til impulsen

$$dp_x = F_x dt$$

Under forutsetning av at bevegelsen foregår tilnærmet langs z-aksen, og med tilnærmet konstant hastighet v_z, kan tidsintervallet skrives som

$$dt \simeq \frac{dz}{v_z}$$

[Kommentar: Dette må være en rimelig antagelse, ettersom elektronet *akselereres* i z-retningen når $z < 0$ men *bremses ned* i z-retningen når $z > 0$.] Kraften i x-retningen er bestemt av det elektriske feltet,

$$F_x = -eE_x$$

ettersom elektronets ladning er $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Komponenten av det elektriske feltet i x-retningen er igjen bestemt av det elektriske potensialet,

$$E_x = -\frac{\partial V(x,z)}{\partial x}$$

slik at

$$dp_x \simeq e\frac{\partial V(x,z)}{\partial x}\frac{dz}{v_z}$$

Total impulsendring finner vi deretter ved å integrere dp_x, fra startposisjonen $z \simeq -\infty$ til sluttposisjonen $z \simeq \infty$:

$$p_x \simeq \frac{e}{v_z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial V(x,z)}{\partial x}dz$$

[Kommentar: Fortegnet på p_x er faktisk innebygd i dette uttrykket, ettersom $\partial V/\partial x$ er negativ for positive x og positiv for negative x. Dermed skulle det ikke ha vært "$\pm$" foran integralet, som det stod i oppgaveteksten.]

b) Med den oppgitte formen på det elektriske feltet kan vi bestemme potensialforskjellen $V(r) - V(a)$:

$$V(r) - V(a) = -\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a^r \frac{K}{r'}dr' = -K\Big|_a^r \ln r' = K(\ln a - \ln r)$$

Ettersom $V(a) = V_a$ har vi altså

$$V(r) = V_a + K(\ln a - \ln r)$$

Deretter bruker vi at $V(b) = 0$ for å fastlegge K:

$$V(b) = 0 = V_a + K(\ln a - \ln b)$$

dvs

$$K = \frac{V_a}{\ln b - \ln a}$$

Hele potensialet blir dermed

$$\begin{aligned} V(r) &= V_a + \frac{V_a}{\ln b - \ln a}(\ln a - \ln r) \\ &= V_a \left(1 + \frac{\ln a - \ln r}{\ln b - \ln a}\right) \\ &= V_a \frac{\ln b - \ln a + \ln a - \ln r}{\ln b - \ln a} \\ &= V_a \frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a} \end{aligned}$$

som skulle vises.

c) Vi regner først ut den deriverte av V mhp x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x,z)}{\partial x} &= \frac{V_a}{\ln b - \ln a} \frac{\partial}{\partial x} \left(- \ln \sqrt{x^2 + z^2}\right) \\ &= -\frac{V_a}{\ln \frac{b}{a}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + z^2)\right) \\ &= -\frac{V_a}{\ln \frac{b}{a}} \frac{2x}{2(x^2 + z^2)} \\ &= -\frac{V_a}{\ln \frac{b}{a}} \frac{x}{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

Dermed:

$$k_x = \frac{p_x}{\hbar} = -\frac{eV_a}{\hbar v_z \ln \frac{b}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ dz}{x^2 + z^2}$$

Integralet løser vi ved å substituere $u = z/x$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\ dz}{x^2 + z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x\ du)}{x^2(1 + u^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \Big|_{-\infty}^{\infty} \arctan u = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Negativt fortegn på k_x virker rimelig, ettersom vi har betraktet passering til høyre for senterlederen, og dermed avbøyning i negativ x-retning. Tallverdien blir

$$k_x = \frac{eV_a \pi}{\hbar v_z \ln \frac{b}{a}}$$

som vi skulle vise. [Kommentar: Integralet bidrar med en faktor π når vi lar integrasjonsgrensene gå mot uendelig. Med endelige grenser blir bidraget noe mindre: ± 2 gir 2.2, ± 5 gir 2.75. For et *estimat* går det fint å bruke $\pm\infty$!] Kvadratet av cosinus-funksjonen har maksima når argumentet er $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ etc. Det betyr at avstanden Δx mellom to nabomaksima er gitt ved

$$k_x \Delta x = \pi$$

Dersom vi vil ha $\Delta x = 900$ Å, betyr det at hastigheten på de innkommende elektronene må være

$$v_z = \frac{eV_a\pi}{\hbar k_x \ln\frac{b}{a}} = \frac{eV_a\pi\Delta x}{\hbar\pi \ln\frac{b}{a}} = \frac{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 10\cdot 900\cdot 10^{-10}}{1.05\cdot 10^{-34}\cdot \ln\frac{5\cdot 10^{-3}}{0.5\cdot 10^{-6}}} = 1.5\cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Dette er en høy hastighet, ca halvparten av lyshastigheten. Det må brukes en akselerasjonsspenning av størrelsesorden

$$V = \frac{\frac{1}{2}mv_z^2}{e} = \frac{mc^2}{8e} = 64\text{kV}$$

for å produsere elektroner med slike hastigheter. Vel, her må vi vel strengt tatt regne relativistisk:
Startenergi ($v_z = 0$, $V = 0$):

$$mc^2 \quad \text{(hvileenergien)}$$

Sluttenergi:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}} - eV$$

Bevaring av energi gir:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{mc^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}} - 1\right) \\
&= \frac{mc^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}} - 1\right) \\
&= \frac{mc^2}{e}\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&\simeq \frac{9.1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}{1.6\cdot 10^{-19}}\cdot 0.155 \simeq 79 \text{ kV}
\end{aligned}$$