

Løsningsforslag til øving 6

Veiledning fredag 28. februar

Oppgave 1

a) Schrödingerligningen for en fri partikkel i to dimensjoner har løsning

$$\psi(x, y) = \frac{2}{L} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}$$

med $n_x, n_y = 1, 2, 3, \dots$. Vi har brukt grensebetingelsene $\psi(0, y) = \psi(x, 0) = \psi(L, y) = \psi(x, L) = 0$. Innsetting av denne løsningen i Schrödingerligningen gir direkte at tilhørende energier er

$$E(n_x, n_y) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2)$$

I $\vec{n}$ -rommet, eller egentlig $\vec{n}$ -planet ($\vec{n} = (n_x, n_y)$), har vi nå 2 tilstander (pga spinn!) pr flateenhet i første kvadrant. Antall tilstander innenfor en kvartsirkel med radius $n = |\vec{n}|$ blir

$$N(n) = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi n^2$$

slik at antall tilstander med energi mindre enn E blir

$$N(E) = \frac{1}{2} \pi \frac{2mL^2 E}{\hbar^2 \pi^2} = \frac{mA}{\hbar^2 \pi} E$$

der $A = L^2$ er systemets areal. Tilstandstettheten i energiroommet for et todimensjonalt system blir dermed

$$D(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{mA}{\hbar^2 \pi}$$

dvs konstant, uavhengig av E .

I en dimensjon har vi

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

med $n = 1, 2, 3, \dots$. Tilhørende energi er

$$E(n) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$$

I $\vec{n}$ -rommet, dvs på n -aksen, har vi 2 tilstander pr lengdeenhet på den positive halvparten av aksen. Antall tilstander på en lengde n blir

$$N(n) = 2 \cdot n$$

slik at antall tilstander med energi mindre enn E blir

$$N(E) = 2 \cdot \sqrt{\frac{2mL^2 E}{\hbar^2 \pi^2}} = \frac{2L}{\hbar \pi} \sqrt{2m} \sqrt{E}$$

Tilstandstettheten i energirommet for et endimensjonalt system blir dermed

$$D(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{L}{\hbar \pi} \sqrt{2m} E^{-1/2}$$

b) Vi har fra forelesningene at antall tilstander med energi mindre enn E er

$$N(E) = \frac{V}{3\hbar^3 \pi^2} (2mE)^{3/2}$$

Dessuten har vi sammenhengen mellom E og p :

$$E(p) = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow 2mE = p^2$$

Dermed kan vi bestemme $N(p)$:

$$N(p) = \frac{V}{3\hbar^3 \pi^2} p^3$$

På samme måte som at $D(E) = dN(E)/dE$ (se forelesningene) må vi ha

$$D(p) = \frac{dN(p)}{dp} = \frac{V}{\hbar^3 \pi^2} p^2$$

Endelig, ettersom $p = \hbar k$, finner vi

$$D(k) = \frac{dN(k)}{dk} = \frac{dN(p)}{dp} \frac{dp}{dk} = \frac{V}{\hbar^3 \pi^2} p^2 \cdot \hbar = \frac{V}{\hbar^3 \pi^2} \hbar^2 k^2 \hbar = \frac{V}{\pi^2} k^2$$

Oppgave 2

a) Schrödingerligningen for fri partikkel ($E_p = 0$) i tre dimensjoner er

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$$

Innsetting av den oppgitte planbølgeløsningen på venstre side gir

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{L^{3/2}}\exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\frac{1}{L^{3/2}}\exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) \\ &= \frac{4\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\psi(x, y, z) \end{aligned}$$

Dette skal være lik høyre side, $E\psi(x, y, z)$, slik at

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Vi har altså fått andre energi-eigenverdier enn med grensekravet at ψ skulle forsvinne på overflaten av systemet. Til gjengjeld er vi ikke begrenset til positive verdier for “kvantetallene” n_x , n_y og n_z , og vi skal i neste omgang se at tilstandstettheten i energirommet blir den samme med ulike valg av grensebetingelser.

b) Som sagt i oppgaveteksten: Antall tilstander i $\vec{n}$ -rommet inne i ei kule med radius n er

$$N(n) = \frac{8\pi n^3}{3}$$

Og det er samtidig lik antall tilstander med energi mindre enn $E(n)$. Med periodiske grensebetingelser fant vi i punkt a) at

$$E(n) = \frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}n^2$$

slik at n uttrykt ved E blir

$$n = \frac{L}{\hbar\pi}\sqrt{\frac{mE}{2}}$$

Dermed:

$$N(E) = \frac{8\pi}{3} \frac{L^3}{\hbar^3 \pi^3} \left(\frac{mE}{2} \right)^{3/2} = \frac{V}{3\hbar^3 \pi^2} (2mE)^{3/2}$$

som vi skulle vise. Dette er den samme $N(E)$ som vi utledet i forelesningene med grensebetingelsen “ $\psi = 0$ på systemets overflate”.

Kommentar: En må av dette ikke forledes til å tro at grensebetingelser for løsning av Schrödingerligningen alltid kan velges fritt. Poenget her er at vi betrakter et *makroskopisk* system der vi i hovedsak er ute etter egenskaper “inne i” systemet. Ulike valg av grensebetingelser vil selvsagt føre til ulike løsninger på og i nærheten av systemets overflate, men sålenge vi ikke er interessert i “overflateeffekter”, spiller det ingen rolle hva slags grensebetingelser vi benytter. Dermed kan vi velge det som er mest hensiktsmessig i hvert enkelt tilfelle. Svært ofte vil nettopp periodiske grensebetingelser være det lureste!