

Løsningsforslag til øving 7

Veiledning fredag 7. mars

a) Veilengdeforskjellen mellom en elektronbølge som reflekteres av et ion i posisjon ja og en som reflekteres av naboionet i posisjon $(j+1)a$ er $2a$. Konstruktiv interferens mellom to slike bølger får vi dersom denne veilengdeforskjellen tilsvarer et helt antall bølgelengder:

$$2a = n\lambda$$

Sammenhengen mellom bølgelengden og bølgetallet er

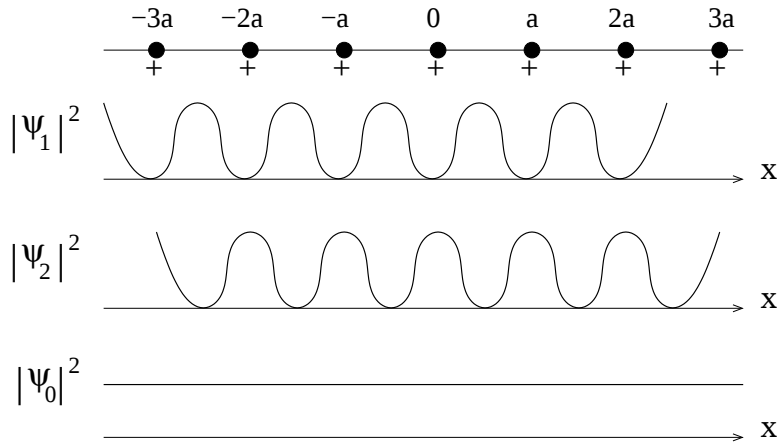
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

slik at Bragg-refleksjon opptrer for

$$k = 2\pi \frac{n}{2a} = n \frac{\pi}{a} \quad ; \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

b) Tilstand 1 har sannsynlighetstetthet $|\psi_1(x)|^2 \sim \sin^2(\pi x/a)$. Denne funksjonen har maksima for $x = (2l+1)a/2$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, dvs midt mellom ionenes posisjon i gitteret. I ionenes posisjoner er $|\psi_1|^2 = 0$. For tilstand 2 blir det motsatt, med maksima i ionenes posisjoner og minima midt i mellom. Tilstand 0 har sannsynlighetstetthet $|\psi_0(x)|^2 \sim |\exp(ikx)|^2 = 1$, dvs konstant gjennom hele krystallen.

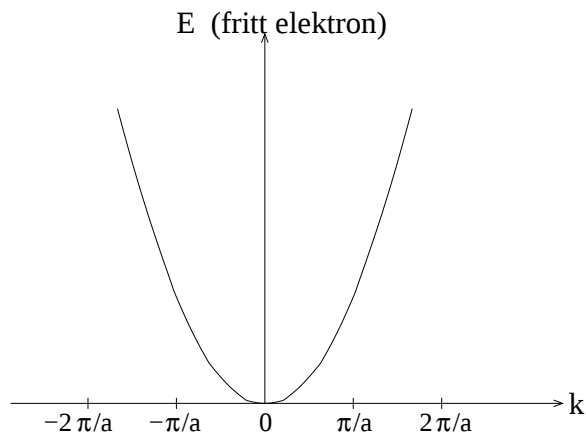
Skisse:



c) I tilstand 2 er sannsynligheten stor for at elektronet befinner seg i nærheten av et ion. Med en tiltrekkende Coulomb-vekselvirkning vil dette virke stabiliserende og resultere i *lav energi*. I tilstand 1 er det liten sannsynlighet for å finne elektronet i nærheten av et ion. Vi har mindre grad av tiltrekkende Coulomb-vekselvirkning, og følgelig blir energien høyere. Tilstand 0 representerer en mellomting mellom disse to, med like stor sannsynlighet for å finne elektronet nær og lenger unna ionene. Følgelig må også den resulterende energien ligge i midten. Konklusjon:

$$E_2 < E_0 < E_1$$

d) La oss først tegne opp energien som funksjon av k for et fritt elektron:



For $k = \pm\pi/a$ er ikke lenger ψ_0 en tillatt løsning, men derimot ψ_1 og ψ_2 med energier henholdsvis $E_1 = E_0 + E_0/8 = 9E_0/8$ og $E_2 = E_0 - E_0/8 = 7E_0/8$. Med tipset gitt til slutt i oppgaveteksten kan vi konstatere at helningen til $E(k)$ må være lik null i $k = \pm\pi/a$: Stående bølger har hastighet $v = 0$. Dermed har vi vel nok til å kunne tegne opp følgende skisse for $E(k)$:

