Institutt for fysikk, NTNU
Fag MNFFY 103 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2003

Øving 1

Veiledning: Tirsdag 21. januar
Innleveringsfrist: Fredag 24. januar

Oppgave 1

I forelesningene viste vi at en punktladning q plassert i $(x, y, z) = (0, 0, d)$ induserer en flateladning på overflaten av et uendelig stort, jordet (dvs $V = 0$) ledende plan, med tetthet

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

Lederens overflate ligger i xy-planet.

a) Vis at den totale induserte ladningen på lederens overflate er lik $-q$.
(Tips: Bruk polarkoordinater r, θ.)

b) Argumentér (uten regning) for at kraften på punktladningen er

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}\hat{z}$$

Kontrollér at den induserte flateladningen σ resulterer i samme tiltrekkende kraft.
(Tips: Bruk polarkoordinater, som i punkt a.)

c) Med en speilladning $-q$ i $(0, 0, -d)$ istedetfor den jordete lederen er det lett å bestemme den potensielle energien til systemet: Punktladningen q befinner seg i Coulombpotensialet V_0 til ladningen $-q$. Potensiell energi blir da

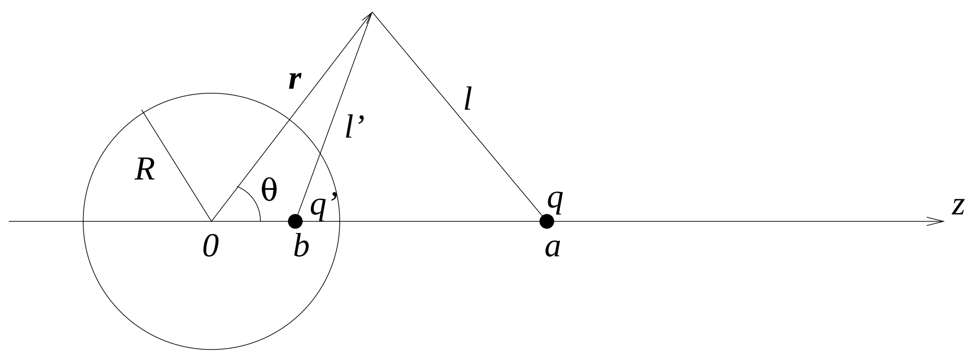
$$U_0 = qV_0 = q\frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2d} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

Men hva blir potensiell energi U for vårt “virkelige” system, dvs ladningen q og den jordete lederen?

(Tips: Husk at tettheten av potensiell energi er gitt ved det elektriske feltet som $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, slik at potensiell energi er $U = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d^3r$.)

Oppgave 2

For ei jordet ledende kule (dvs $V = 0$ på hele kula) med radius R og en punktladning q i avstand a ($a > R$) fra kulas sentrum blir potensialet V i området utenfor kula det samme som om vi erstatter kula med en punktladning $q' = -Rq/a$ i avstand $b = R^2/a$ fra kulas sentrum (på forbindelseslinjen mellom kulas sentrum og punktladningen q):



a) Det er klart at

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{l} + \frac{q'}{l'}\right)$$

Vis at med koordinater (r, θ) som angitt i figuren blir

$$V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta\right)^{-1/2} - \left(R^2 + \left(\frac{ra}{R}\right)^2 - 2ra\cos\theta\right)^{-1/2}\right]$$

(Vi må opplagt ha sylindersymmetri mhp z-aksen i figuren.) Dermed ser en direkte at $V(R, \theta) = 0$, som vi skal ha.

b) Finn tettheten av indusert flateladning $\sigma(\theta)$ på kula. Sjekk at svaret er rimelig, f.eks. for $z = R$ og $z = -R$ (dvs $\theta = 0$ og $\theta = \pi$). Hva blir total indusert ladning Q? (Du kan bestemme Q ved å integrere σ over kulas overflate. Ved hjelp av Gauss lov (på integralform) kunne du kanskje funnet Q uten å regne i det hele tatt...?)

Svar:

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi R}\frac{a^2 - R^2}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta)^{3/2}}$$

c) Bestem til slutt systemets potensielle energi U.
(Tips: U tilsvarer det arbeidet som skal til for å flytte ladningen q fra $z = \infty$ til $z = a$, med en kraft som akkurat balanserer Coulombkraften mellom q og q', dvs $qq'/[4\pi\epsilon_0(z - b(z))^2]$.)
Svar:

$$U = -\frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0(a^2 - R^2)}$$