

Øving 3

Veiledning: Fredag 7. februar
Innleveringsfrist: Tirsdag 11. februar

Oppgave 1

Når en driver og styrer med vektorer, og ulike “operasjoner” på vektorer (divergens, curl etc.), er det ofte hensiktsmessig å ta i bruk den såkalte *Kronecker delta* δ_{ij} og *Levi-Civitasymbolet* ϵ_{ijk} . Indeksene i, j, k er heltall, og mer presist enten 1, 2 eller 3 dersom vi bruker disse symbolene i forbindelse med kartesiske koordinater i tre dimensjoner. (Hvilket ikke er så rent sjeldent...) Kronecker delta har følgende enkle definisjon:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$$

For Levi-Civitasymbolet gjelder:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } ijk = 123, 312 \text{ eller } 231 \\ -1 & \text{hvis } ijk = 132, 213 \text{ eller } 321 \\ 0 & \text{ellers, dvs hvis noen indekser er like} \end{cases}$$

Vi *nummererer* nå de kartesiske koordinatene fra 1 til 3, slik at $x_1 = x$, $x_2 = y$ og $x_3 = z$. For en vektorstørrelse, la oss ta det elektriske feltet $\vec{E}$ som eksempel, har vi da at $E_1 = E_x$, $E_2 = E_y$ og $E_3 = E_z$.

a) La oss se på kryssproduktet mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \hat{x} - (u_x v_z - u_z v_x) \hat{y} + (u_x v_y - u_y v_x) \hat{z}$$

Altså er f.eks. x -komponenten av kryssproduktet

$$(\vec{u} \times \vec{v})_x = u_y v_z - u_z v_y$$

og med nummereringskonvensjonen som vi innførte ovenfor, kan dette skrives

$$(\vec{u} \times \vec{v})_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$$

Vis at i -komponenten av kryssproduktet kan skrives på formen

$$(\vec{u} \times \vec{v})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} u_j v_k \equiv \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

der vi i den siste overgangen innførte den såkalte *summekonvensjonen*: Gjentatte indekser, dvs slike som opptrer mer enn en gang (i vårt tilfelle indeksene j og k), skal det summeres over, fra 1 til 3, selv om summetegnet utelates.

b) I forelesningene, i forbindelse med Poyntings teorem og energibevarelse, benyttet vi oss av følgende resultat for divergensen til kryssproduktet mellom $\vec{E}$ og $\vec{B}$:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

Utleid denne sammenhengen ved direkte utregning av venstre side av ligningen.

c) Dersom du ikke allerede gjorde det i punkt b), gjenta utledningen i punkt b) ved å benytte Levi-Civitasymbolet og summekonvensjonen innført under punkt a).

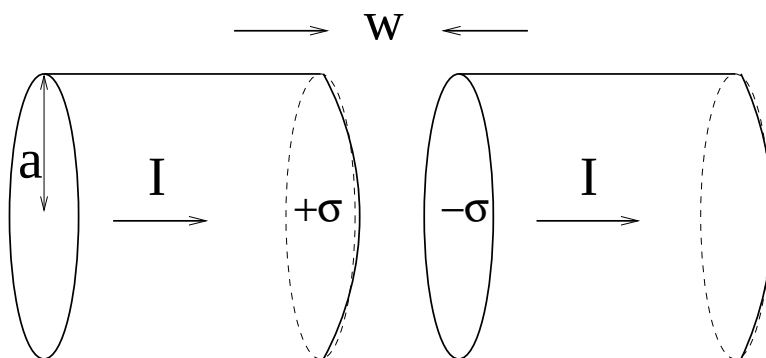
Tips: Ta utgangspunkt i at

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} E_j B_k$$

og benytt at $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik}$.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi se på energiforholdene inne i gapet i den sylindriske lederen fra Øving 2 (oppgave 2):



Vi antar at kondensatorplatene har null ladning før $t = 0$. Deretter lades platene opp ved at det går en konstant (og jevnt fordelt) strøm I i lederen. Som i øving 2 antar vi at plateradien a er mye større enn plateavstanden w og neglisjerer randeffekter i nærheten av gapets ytterkant.

a) Bestem $\vec{E}(s, t)$ og $\vec{B}(s, t)$ inne i gapet. [Hvis du gjorde øving 2, har du essensielt gjort dette allerede. Velg z -aksen langs lederen i strømmens retning, mens s angir avstanden fra lederens senterakse.]

b) Hva blir tettheten av elektromagnetisk feltenergi u_{em} inne i gapet? Bestem også Poyntings vektor $\vec{S}$ inne i gapet.

c) Kontrollér at vi har energibevarelse inne i gapet, både *lokalt* og *globalt* ved hjelp av Poyntings teorem på henholdsvis differensialform,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{\text{mek}} + u_{\text{em}}) = -\nabla \cdot \vec{S},$$

og integralform,

$$\frac{d}{dt}(U_{\text{mek}} + U_{\text{em}}) = -\oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}.$$

Her er $U_{\text{mek}} = 0$ ettersom vi ikke har noen ladninger inne i gapet. Anta at $\vec{E} = 0$ overalt utenfor gapet. “Globalt” betyr her hele gapets volum. Alternativt, for å være sikker på å unngå et eventuelt avvik fra (romlig) konstant elektrisk felt, kan en velge det “globale volumet” som en sylinder med lengde w og radius $b \ll a$.

Divergens til en vektor $\vec{u}$ i sylinderkoordinater:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}(su_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \phi} u_\phi + \frac{\partial}{\partial z} u_z$$