Institutt for fysikk, NTNU
Fag MNFFY 103 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2003

Øving 5

Veiledning: Fredag 21. februar
Innleveringsfrist: Tirsdag 25. februar

Oppgave 1

Et fritt elektron (masse m) i rettlinjet bevegelse, f.eks langs z-aksen, beskrives kvantemekanisk av en bølgefunksjon

$$\psi(z) = e^{ikz}$$

[Denne bølgefunksjonen er *ikke* normert. Normering ville innebære at vi multipliserer med en faktor $1/\sqrt{L}$, der L er lengden på det tillatte området langs z-aksen.]
a) Vis at en slik planbølge-løsning er *egenfunksjon* til impulsoperatoren

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dz}$$

Med andre ord, vis at

$$\hat{p}\psi(z) = p\psi(z)$$

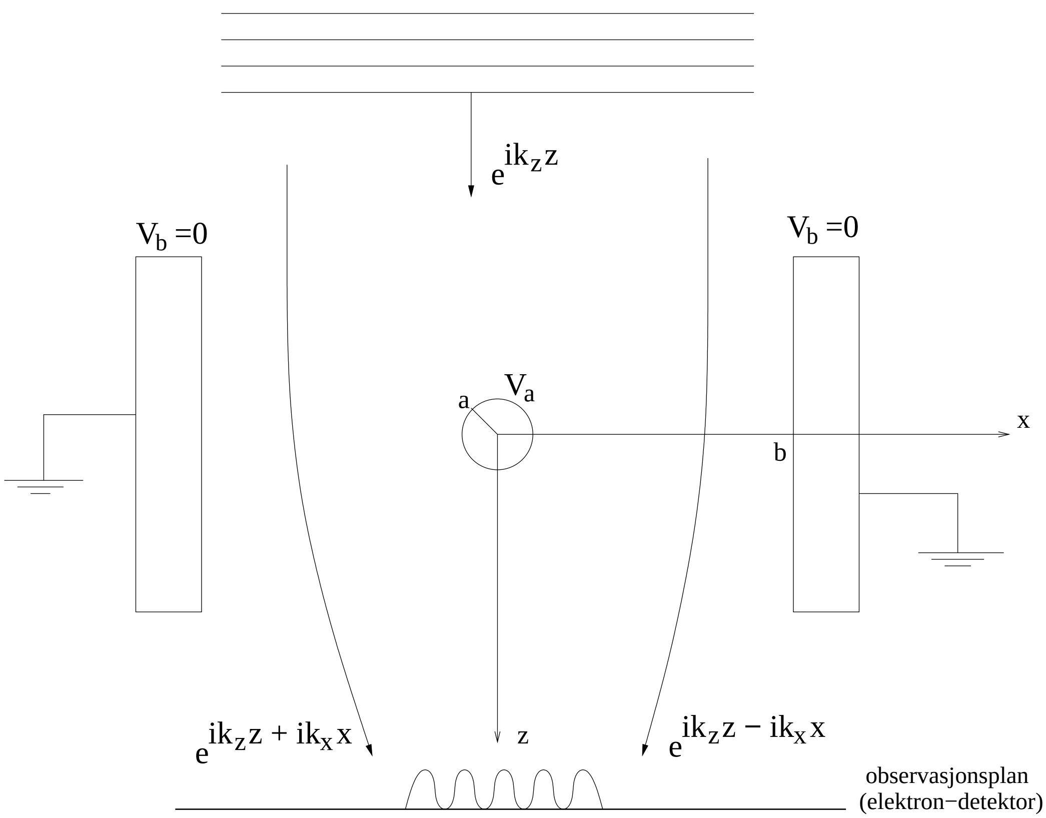
og bestem *egenverdien* p.

b) Hva blir sammenhengen mellom elektronets hastighet v og bølgetallet k? Hva blir sammenhengen mellom elektronets impuls p og bølgelengden λ?

Oppgave 2

I eksperimentet til Tonomura et al ble ett og ett elektron sendt inn mot et såkalt *Möllenstedt elektron biprisme*, som antydet i figuren på neste side.

På y-aksen ligger en tynn, rett leder med radius $a = 0.5\ \mu$m som holdes på konstant potensial $V_a = 10$ V. (Möllenstedt brukte gullbelagt edderkopptråd for å lage slike tynne ledere på midten av 50-tallet.) På hver side av den tynne lederen, i $x = \pm b$ ($b = 5$ mm), er det plassert jordete ledende plater, dvs med potensial $V_b = 0$.



Før det kommer inn i biprismet kan elektronet beskrives som en plan bølge med hastighet i positiv z-retning, dvs

$$\psi = e^{ik_z z}$$

Med høyest potensial på lederen på y-aksen vil det elektriske feltet være rettet *utover* fra ledertråden og mot de to jordete platene. Dermed vil den elektriske kraften på elektronet virke *innover* mot ledertråden (ettersom elektronets ladning er negativ). Resultatet er at elektronet avbøyes innover mot z-aksen. Det betyr at hvis elektronet passerer til høyre for sentertråden, vil den ha en hastighetskomponent i negativ x-retning etter det har passert biprismet. Passering til venstre for ledertråden gir det motsatte, dvs hastighetskomponent i positiv x-retning. Dette gir to bølger,

$$e^{i(k_z z + k_x x)} \quad \text{og} \quad e^{i(k_z z - k_x x)}$$

som vil interferere etter passering gjennom biprismet.
Elektronets bølgefunksjon i observasjonsplanet må derfor bli på formen

$$\psi(x,z) = e^{ik_z z}\left(e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}\right)$$

slik at sannsynlighetstettheten blir

$$|\psi(x,z)|^2 = 4\cos^2 k_x x$$

Tonomura benyttet en intensitet på ca 1000 elektroner pr sekund, og etter noen minutter hadde det avtegnet seg et tydelig interferensmønster med "mørke" (dvs få elektrontreff) og "lyse" (dvs mange elektrontreff) striper (i y-retningen).
[Se http://bohr.phys.ntnu.no/~stovneng/MNFFY103/tonomura.jpg]

a) Det er klart at avbøyningen av elektronene må avhenge av formen på potensialet $V(x,z)$ inne i biprismet. Vi vil forsøke å skaffe oss et *estimat* av avbøyningen. Med utgangspunkt i Newtons 2. lov,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

vis at impulsen p_x i x-retningen for et elektron som har passert gjennom biprismet tilnærmet kan uttrykkes på formen

$$p_x \simeq \pm \frac{e}{v_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V(x,z)}{\partial x} dz$$

der positivt (negativt) fortegn gjelder for passering til høyre (venstre) for senterlederen. Vi har her antatt at avbøyningen er liten (dvs, banene som er tegnet inn i figuren har fått en sterkt overdrevet avbøyning), slik at bevegelsen foregår tilnærmet langs z-aksen med konstant hastighet v_z. Vi har dessuten antatt at den totale forflytningen i z-retning er lang i forhold til både a og b, slik at øvre og nedre grense i integralet kan tilnærmes med henholdsvis $z = \infty$ og $z = -\infty$.

b) I Øving 4 i høst viste vi at det elektriske feltet rundt en lang, rett leder er radielt rettet og faller av som en over avstanden fra lederens senterakse:

$$\vec{E} = \frac{K}{r}\hat{r} \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

(Her er K en konstant, bestemt av ladningstettheten på den rette lederen.) La oss gjøre følgende friske tilnærmelser:

- Det elektriske feltet inne i biprismet er på denne formen *overalt*.
- Styrken på det elektriske feltet (dvs konstanten K) fastlegges ved å bruke grensebetingelsene $V(r = a) = V_a$ og $V(r = b) = 0$.

[Kommentar: Den første av disse grensebetingelsene er korrekt, den andre ikke: I nærheten av de to platene er ikke lenger det elektriske feltet rettet radielt, men derimot langs x-aksen, ettersom $\vec{E}$ skal stå vinkelrett på overflaten av en elektrisk leder. Slike "detaljer" bryr vi oss ikke om her, vi skulle jo bare finne et estimat på avbøyningen...]
Vis at disse tilnærmelsene fastlegger konstanten K til

$$K = \frac{V_a}{\ln b - \ln a}$$

og potensialet til

$$V(r) = V_a \frac{\ln b - \ln r}{\ln b - \ln a} \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

c) Bruk resultatene i a) og b) til å vise at bølgetallet $k_x = p_x/\hbar$ for bevegelsen i x-retningen blir

$$k_x = \frac{eV_a\pi}{\hbar v_z \ln \frac{b}{a}}$$

Dersom en ønsker en avstand på 900 Å mellom to nabo-maksima i interferensmønstret, hvor stor hastighet v_z må de innkommende elektronene da ha? [Svar: $1.5{\cdot}10^8$ m/s]

Oppgitt:

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + \text{konstant}$$