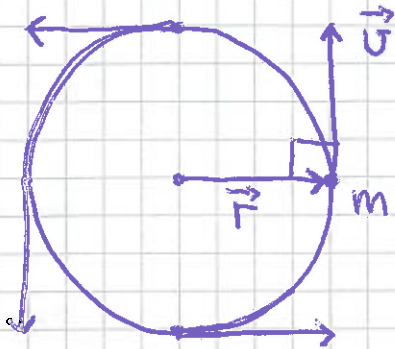


Sirkelbevegelse

Anta i første omgang konstant $v = |\vec{v}|$:



m = partikkelens masse

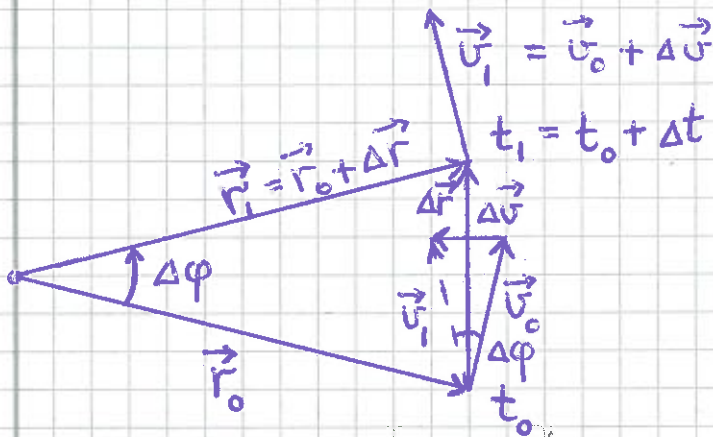
$\vec{r}$ = ——— " ——— posisjon

$\vec{v}$ = ——— " ——— hastighet

Ser at $\vec{v} \perp \vec{r}$

$\vec{v}$ er ikke konstant, retningen endrer seg hele tiden

$\Rightarrow$ akselerasjonen $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \neq 0$



$$|\vec{r}_0| = |\vec{r}_1| = r$$

$$|\vec{v}_0| = |\vec{v}_1| = v$$

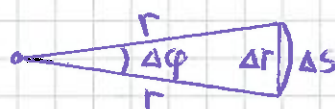
- ser at $\Delta \vec{v}$, og dermed $\vec{a}$, har retning inn mot sirkelens sentrum
- har formlike likebeinte trekanter $\Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$
- $a = |\vec{a}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r} = v \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$

Konklusjon: Legeme i uniform sirkelbevegelse har akselerasjon v^2/r , rettet radieelt inn mot sirkelens sentrum

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ buelengde / radius

(11)

$$\Delta\varphi = \Delta s / r$$



$$\Delta s \approx \Delta r \text{ når}$$

vinkelen $\Delta\varphi$ er liten

Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ omløpt vinkel pr tidsenhet

$$\omega \text{ (omega)} = \Delta\varphi / \Delta t = \frac{1}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{r} \cdot v ; v = r \cdot \omega$$

Vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ vinkelhastighetsendring pr tidsenhet

$$\alpha \text{ (alfa)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{r} \cdot a ; a = r \cdot \alpha$$

Enheter:

$$[\varphi] = \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1 ; [\omega] = \frac{1}{\text{s}} ; [\alpha] = \frac{1}{\text{s}^2}$$

Periode = omløpstid = T ; $[T] = \text{s}$

Frekvens = antall omløp pr tidsenhet = f ; $[f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$

Fra $v = \frac{\text{omkrets}}{\text{periode}} = \frac{2\pi r}{T}$ følger sammenhengene

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Tyngdepunkt (Massesenter; CM; "center of mass") (12)

Generell definisjon:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

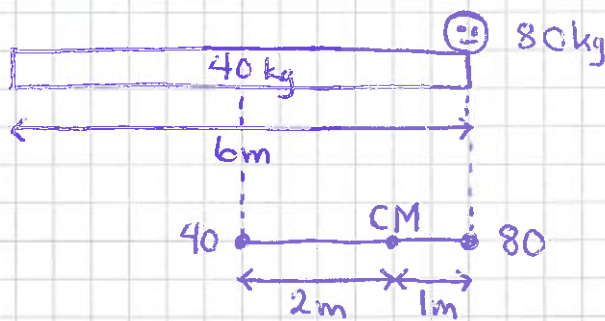
Ofte "opplagt" hvor CM er, pga symmetri.

Eks 1: Kule, kuleskall, sirkulær skive (jevn massefordeling antas)

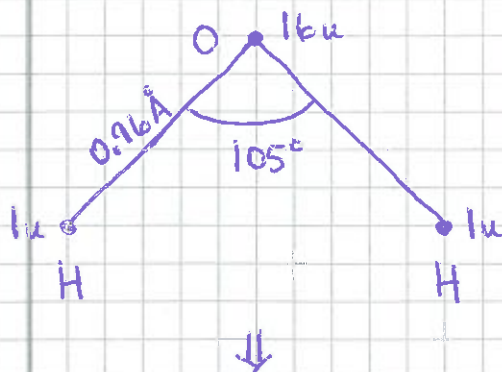
$\Rightarrow$ CM i sentrum

Eks 2: Jevntykk stang $\Rightarrow$ CM på midten

Eks 3: 6 m lang båt, 40 kg. Person i båtenden, 80 kg.

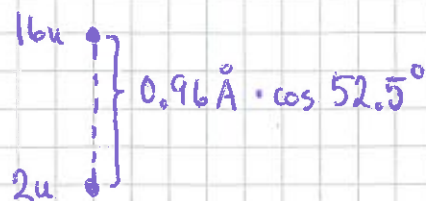


Eks 4: H_2O



$$1u = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ Å (ångström)} = 10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$$

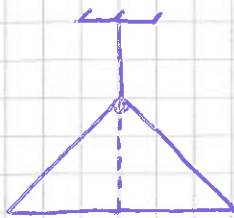


$\Rightarrow$ CM's avstand fra O:

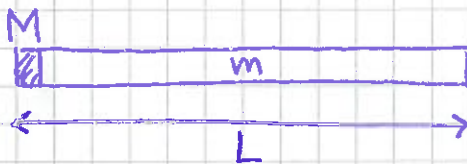
$$\frac{1}{9} \cdot 0.96 \text{ Å} \cdot \cos 52.5^\circ$$

$$= \underline{\underline{0.065 \text{ Å}}}$$

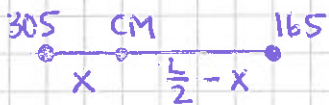
Eks5: Eksperimentell lokalisering av CM



Eks6: Rør med lodd i enden



$$m = 165 \text{ g}, \quad M = 305 \text{ g}$$



$$305x = 165 \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$\Rightarrow 470x = \frac{165L}{2} \Rightarrow x = \frac{165L}{940} \approx \underline{\underline{0.18L}}$$

Tyngdepunktbevegelsen

CM beveger seg som om hele massen M er samlet i CM og utsettes for summen av ytre krefter:

$$\sum \vec{F}_{\text{ytte}} = M\vec{A}$$

M = total masse

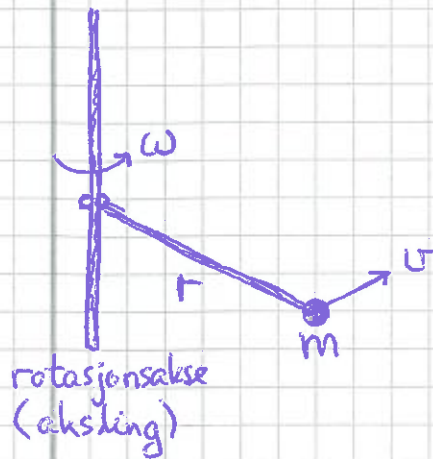
$$\vec{A} = \Delta \vec{V} / \Delta t = \text{CMs akselerasjon}$$

$$\vec{V} = \Delta \vec{R}_{\text{cm}} / \Delta t = \text{CMs hastighet}$$

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \text{CMs posisjon}$$

Rotasjonsenergi. Tregghetsmoment

(14)



$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 ; v = r \omega$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m r^2 \cdot \omega^2$$

$I = m r^2 =$ massens tregghetsmoment
mhp den valgte akse.

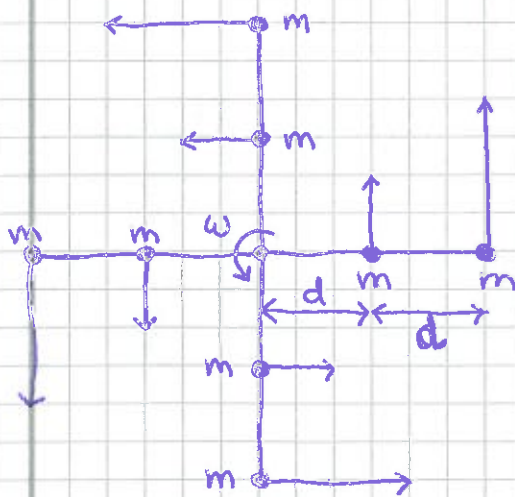
$$\text{Enhet: } [I] = \text{kg m}^2$$

Engelsk: moment of inertia

$\Rightarrow$ Kinetisk rotasjonsenergi:

$$E_k^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Med flere masser:



Alle m har lik vinkelhastighet ω , men ikke lik hastighet v .

$$E_k^{\text{rot}} = \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} (\sum m r^2) \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2$$

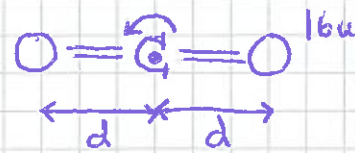
med $I = \sum m r^2$

Her er $I = 4 \cdot m d^2 + 4 \cdot m \cdot (2d)^2$
 $= (4 + 16) m d^2 = 20 m d^2$

slik at

$$E_k^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot 20 m d^2 \cdot \omega^2 = \underline{10 m d^2 \omega^2}$$

Eks: Hva er I for CO_2 ?



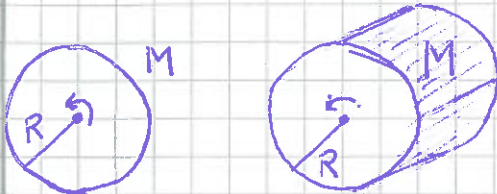
$$d = 1.16 \text{ \AA}$$

$$I = 2 \cdot 16u \cdot d^2 = 32u \cdot d^2$$

$$= 2 \cdot 16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (1.16 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2 =$$

Diverse objekter som kan rulle:

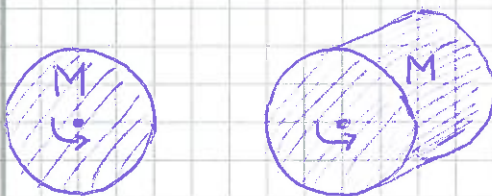
Tynn ring og hul sylinder.



All masse M er i avstand R fra akse

$$\Rightarrow I = MR^2$$

Kompakt skive / sylinder.



M jevnt fordelt.

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Kuleskall (f.eks. bordtennisball, fotball)



$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

Kompakt kule (f.eks. snookerkule)



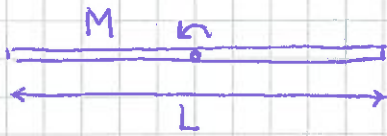
$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\Rightarrow \text{Generelt } I = c \cdot MR^2 \quad (\text{med } c = 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5})$$

Andre "enkle" objekter:

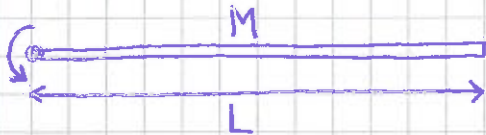
(16)

Tynn stang, akse gjennom CM



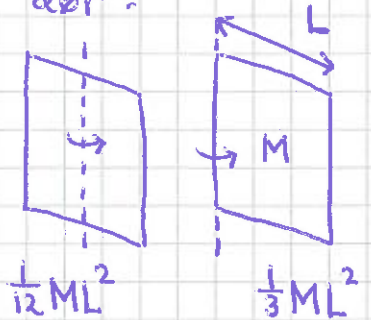
$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

Tynn stang, akse i enden

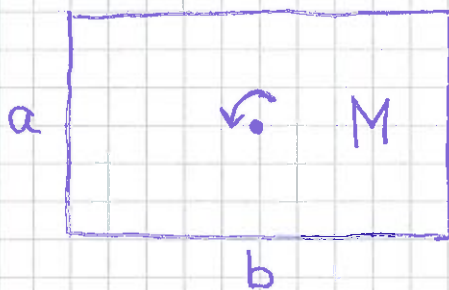


$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Eventuelt tynn plate, f.eks. ei dør:



Rektangulær plate, akse $\perp$ CM

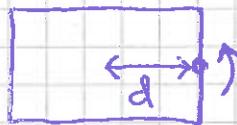


$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

Steiners sats (Parallakseteoremet)



$$I_0$$



$$I = I_0 + M \cdot d^2$$

I_0 = treghetsmoment mhp akse gjennom CM

M = total masse

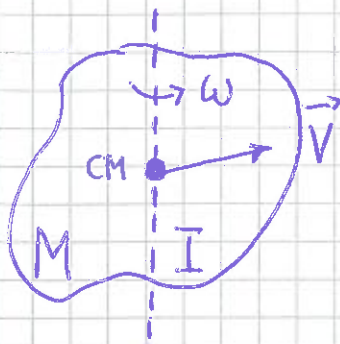
I = treghetsmoment mhp akse som er parallellforskjøvet
lengde d bort fra CM

Kinetisk energi for stivt legeme

(17)

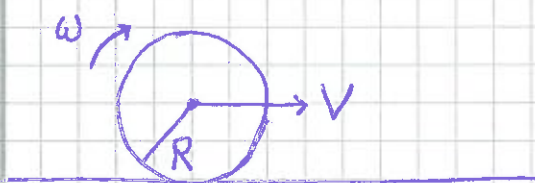
Generell bevegelse for et stivt legeme er

- translasjon av CM
- rotasjon om akse gjennom CM



$$E_k = E_k^{\text{trans}} + E_k^{\text{rot}} \\ = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Rulling

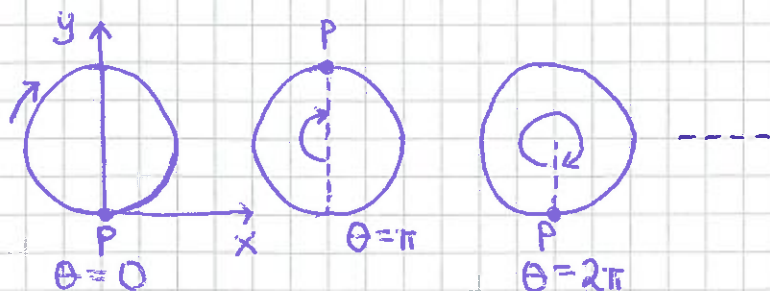


Rullebetingelse:

$$\omega = 2\pi/T, \quad V = 2\pi R/T$$

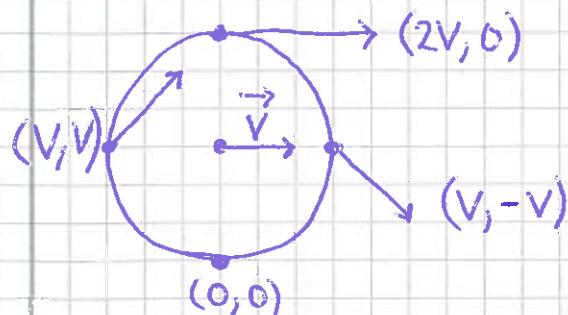
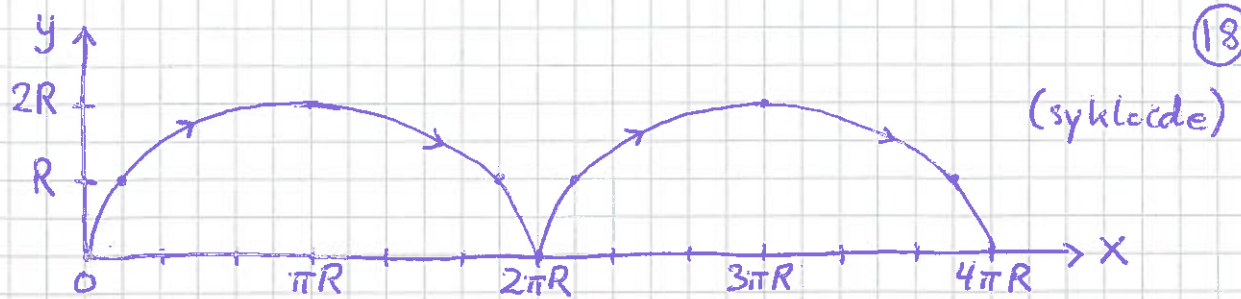
$$\Rightarrow \boxed{V = R\omega}$$

Banen (x, y) og hastigheten (v_x, v_y) til et punkt P på periferien:



$$x = R(\theta - \sin \theta), \quad y = R(1 - \cos \theta)$$

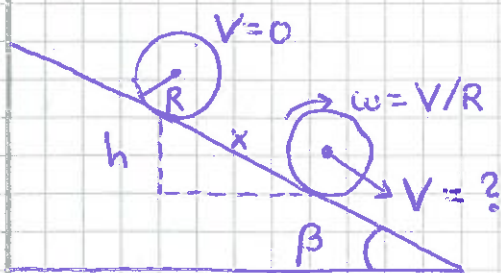
$$v_x = V(1 - \cos \theta), \quad v_y = V \sin \theta$$



$v_x = v_y = 0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$
dvs når P er i kontakt med underlaget

$\Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{v} = 0$; null effekttap selv om vi har
friksjonskraft $\vec{R}$ mellom underlag og rullende objekt;
mekanisk energi er bevart!

Eks: Rulling på skråplanet



Rullende objekt, masse M ,
radius R , treghetsmoment $I = c \cdot MR^2$.
Hva er hastigheten V etter å ha
rullet en lengde x ?

Løsn: Reduksjon i E_p gir økning i E_k : $E_k = Mgh$

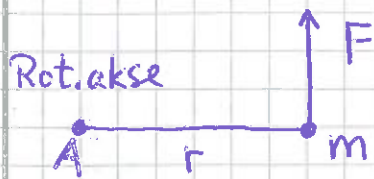
$$E_k = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \cdot cMR^2 \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2 = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh/(1+c)}, \quad h = x \sin \beta$$

$$\Rightarrow V(\text{ring}; c=1) < V(\text{kuleskall}; c=\frac{2}{3}) < V(\text{kompakt skive}; c=\frac{1}{2}) < V(\text{kompakt kule}; c=\frac{2}{5})$$

Rotasjon og krefter

Kraftmoment og Newtons 2. lov for rotasjon



$$v = r \cdot \omega$$

$$F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = mr \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow F \cdot r = mr^2 \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{M = I \cdot \alpha} \quad \text{N2 for rotasjon}$$

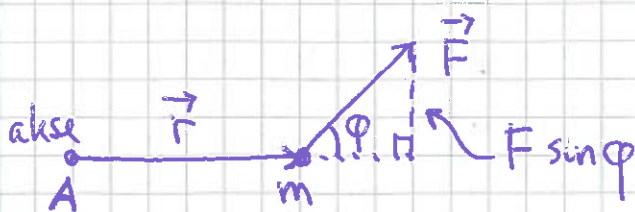
$M = F \cdot r =$ kraftmoment (evt. dreiemoment;
eng. torque; "kraft $\times$ arm")

$$[M] = \text{N} \cdot \text{m} \quad (= \text{J})$$

$$I = mr^2 = \text{tregghetsmoment}$$

$$\alpha = \Delta \omega / \Delta t = \text{vinkelakselerasjon}$$

Bare komponenten av $\vec{F}$ som står vinkelrett på $\vec{r}$ bidrar til M :



$$M = r \cdot F \sin \phi$$

Statisk likevekt for stivt legeme

(20)

Et stivt legeme forblir i ro (i statisk likevekt) hvis

$$\sum \vec{F} = 0$$

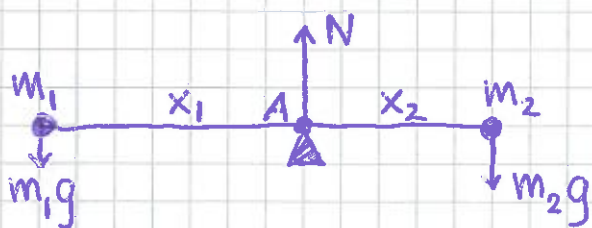
sum av ytre
krefter på legemet

og

$$\sum M = 0$$

sum av ytre kraftmoment
på legemet

Eks 1: Skålvekt/ Vektstang/ Vippehuske



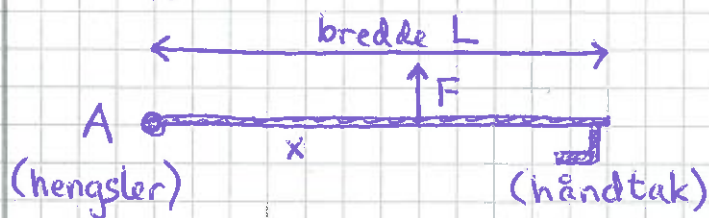
Vanlig å velge $M > 0$ når
resulterende rotasjon blir
mot klokke: $+\curvearrowright$

Med akse A er $\sum M = m_1 g x_1 - m_2 g x_2$

$\Rightarrow$ Balanse/ Likevekt når $m_1 x_1 = m_2 x_2$

($\sum \vec{F} = 0$ gir $N = m_1 g + m_2 g$)

Eks 2: Åpning av dør



masse M

$$I = \frac{1}{3} M L^2 \quad (\text{s. 16})$$

$$M = F \cdot x \Rightarrow F \cdot x = I \cdot \alpha \Rightarrow F = I \alpha / x$$

$\Rightarrow$ For ønsket vinkelakselerasjon α kreves minst kraft
F når x er størst, dvs $x = L$.
(Derfor er håndtaket ytterst på døra.)

Eks 3: Spett

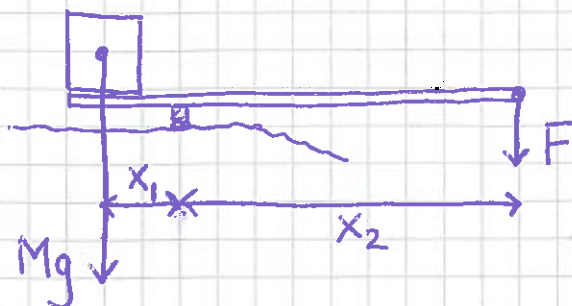
(21)

For å løfte M trengs

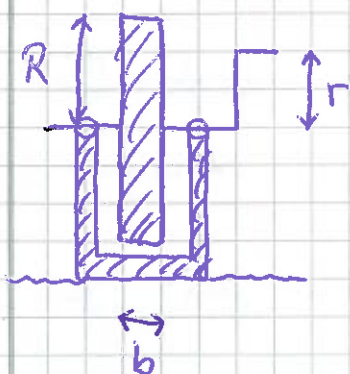
$$F \cdot x_2 > Mg \cdot x_1$$

$$F > Mg \cdot (x_1/x_2)$$

$$\Rightarrow F \ll Mg \text{ hvis } x_2 \gg x_1$$



Eks 4: Slipestein



$$R = 30 \text{ cm}, r = 20 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Massetetthet: } \rho = 2.5 \text{ g/cm}^3 \text{ (sandstein)}$$

$$\text{Tregheksmoment: } I = \frac{1}{2}MR^2 \text{ (s. 15)}$$

Beregn vinkelakselerasjonen α når kraft F på håndtaket er 100 N.

Løsning:

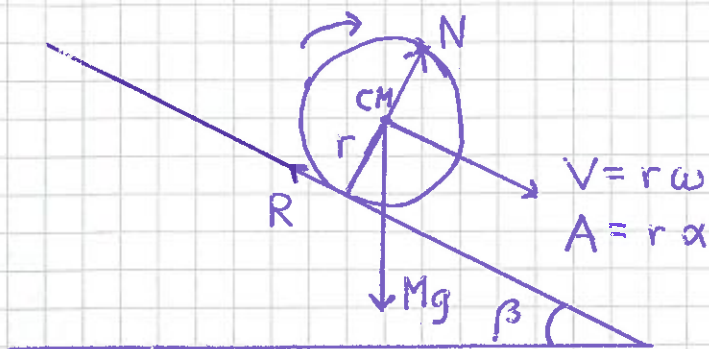
$$F \cdot r = I \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = F \cdot r / I = 2Fr / MR^2$$

$$\begin{aligned} M &= \rho \cdot V = \rho \cdot \pi R^2 \cdot b = 2.5 \cdot 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)} \cdot \pi \cdot (0.30 \text{ m})^2 \cdot 0.10 \text{ m} \\ &= 22.5 \cdot \pi \text{ kg} \approx 71 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha &= 2 \cdot 100 \text{ N} \cdot 0.20 \text{ m} / 22.5 \pi \text{ kg} \cdot (0.30 \text{ m})^2 \\ &= \underline{\underline{6.3 \text{ s}^{-2}}} \quad (\text{ert rad/s}^2) \end{aligned}$$

Eks 5: Rulling på skråplanet (revisited!)

(22)



$$I = c \cdot Mr^2$$

$$N1 \perp \text{skråplanet} \Rightarrow N = Mg \cos \beta$$

$$N2 \parallel \text{skråplanet} \Rightarrow Mg \sin \beta - R = MA$$

$$N2 \text{ rotasjon om CM} \Rightarrow R \cdot r = I \cdot \alpha \quad \left[\begin{array}{l} N \text{ og } G \text{ har} \\ \text{ingen arm!} \end{array} \right]$$

$$I = cMr^2, \alpha = A/r \Rightarrow R \cdot r = cMr^2 \cdot A/r \Rightarrow R = cMA$$

$$\text{Setter } R = cMA \text{ inn i } N2 \parallel :$$

$$Mg \sin \beta - cMA = MA \Rightarrow g \sin \beta = (1+c)A$$

$$\Rightarrow A = \underline{\underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon blir $A = g \sin \beta$, og vi får ikke rotasjon.

Friksjonskraften reduserer A med faktoren $1+c$, og gir rotasjon.

$$\text{Fra 1.samling: } V = A \cdot t, x = \frac{1}{2}At^2 \quad (\text{antar } x_0 = 0 \text{ og } V_0 = 0)$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{2x/A} \quad (\text{tid for å rulle lengden } x)$$

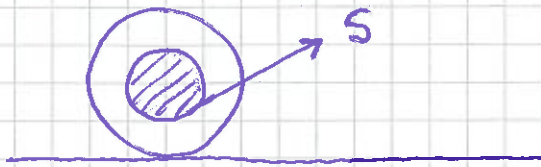
$$\Rightarrow V = A \cdot \sqrt{2x/A} = \sqrt{A^2 \cdot 2x/A} = \sqrt{2xA}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2x \cdot g \sin \beta}{1+c}}}}$$

= hastighet etter å ha rullet lengden x ,
samme som på s. 18

Eks 6: Snelle/Fojo på flatmark

(23)

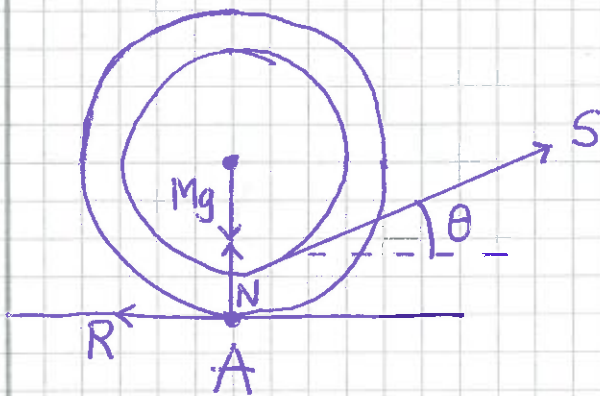


Hvilken vei ruller snella?

Kan den bli liggende i ro?

Løsning:

Her er det lurt å velge kontaktlinja mellom snelle og underlag som rotasjonsakse A:



Hvorfor? Fordi verken G, N eller R har noen arm mhp rotasjon om aksene A.

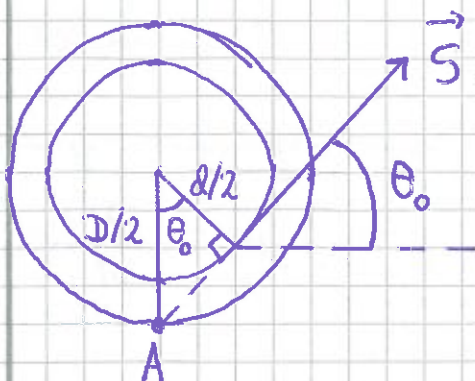
Bare snordraget S kan ha en arm mhp A.

$\vec{S}$ danner vinkelen θ med horisontalen.

Liten vinkel θ (som i figuren) $\Rightarrow$ S gir kraftmoment med klokka $\Rightarrow$ snella ruller mot høyre

Stor vinkel $\theta \Rightarrow$ S gir kraftmoment mot klokka $\Rightarrow$ snella ruller mot venstre

Hvis forlengelsen av $\vec{S}$ går gjennom aksene A, er $\sum M = 0$ mhp aksene A, dvs statisk likevekt (må og ha $\sum \vec{F} = 0$):



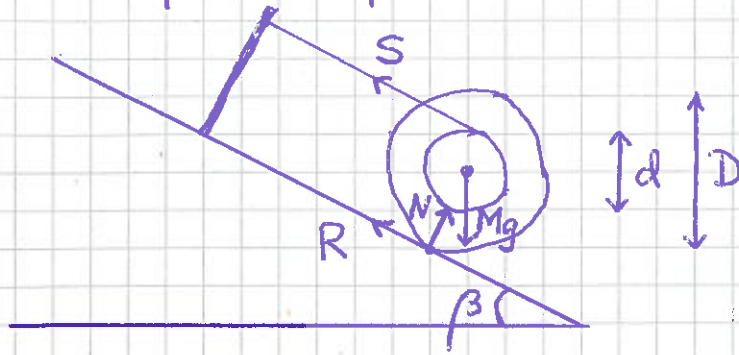
$$\Rightarrow \frac{d/2}{D/2} = \cos \theta_0$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{d}{D} \right)$$

$$[= \arccos \left(\frac{d}{D} \right)]$$

Eks 7: Snelle på skråplanet

(24)



Friksjonskraften R hindrer snella å rottere "baklengs" nedover skråplanet. Men $R_{\max} = \mu_s \cdot N$ (se s. 6), og $N = Mg \cos \beta$ blir mindre jo brattere skråplanet er. Hvor stor kan β være uten at snella begynner å rottere og gli ("slure") nedover?

Løsning:

Max vinkel β_0 når $R = R_{\max} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot Mg \cos \beta$.

Velger her akse gjennom CM ; da har N og G null arm. Snordrag S har arm $d/2$ og gir kraftmoment $+ S \cdot d/2$ (dvs mot klokke); friksjonskraften R har arm $D/2$ og gir kraftmoment $-(D/2) \cdot \mu_s \cdot Mg \cos \beta_0$ (dvs med klokke). $\sum M = 0$ gir dermed

$$S \cdot \frac{d}{2} - \frac{D}{2} \mu_s Mg \cos \beta_0 = 0 \Rightarrow S = \frac{D}{d} \mu_s Mg \cos \beta_0$$

Videre gir $N \perp$ skråplanet: $Mg \sin \beta_0 - R - S = 0$, dvs

$$Mg \sin \beta_0 - \mu_s Mg \cos \beta_0 - \frac{D}{d} \mu_s Mg \cos \beta_0 = 0$$

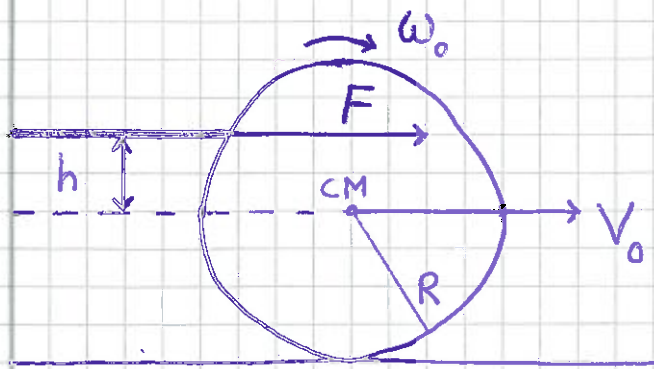
Ganger ligningen med $(Mg \cos \beta_0)^{-1}$:

$$\underbrace{\frac{\sin \beta_0}{\cos \beta_0}}_{\tan \beta_0} - \mu_s \left(1 + \frac{D}{d}\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\tan \beta_0 = \mu_s \left(1 + \frac{D}{d}\right)}}$$

$$\Rightarrow \beta_0 = \arctan \left[\mu_s \left(1 + \frac{D}{d}\right) \right]$$

Eks 8: Snooker

(25)



Kompakt kule, masse M ,
radius R , treghetsmoment
 $I = \frac{2}{5}MR^2$ mhp akse
gjennom CM.

Anta svært kortvarig ($\Delta t \approx 0$) horisontalt støt med stor kraft F , i høyde h over senterlinja. Hvor må du treffe med "køen" for at kula skal rulle uten å gli umiddelbart?

Løsning:

Støtet gir kula hastighet V_0 og vinkelhastighet ω_0 ; disse fastlegges med N2 og N2 for rotasjon (om CM). Ren rulling hvis $V_0 = R\omega_0$.

$$N2 \text{ (s.7)} \Rightarrow F = \Delta p / \Delta t = M \Delta V / \Delta t = M V_0 / \Delta t$$

$$N2, \text{ rot. om CM} \Rightarrow F \cdot h = I \cdot \Delta \omega / \Delta t = \frac{2}{5}MR^2 \cdot \omega_0 / \Delta t \\ = \frac{2}{5}MR^2 \cdot \left(\frac{V_0}{R}\right) / \Delta t$$

Setter inn $F = M V_0 / \Delta t$:

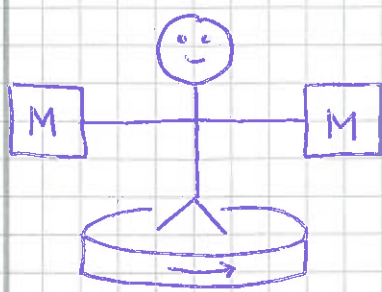
$$\frac{M V_0}{\Delta t} \cdot h = \frac{2}{5} \frac{M R V_0}{\Delta t} \Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{2}{5} R}}$$

Hvis $h > \frac{2}{5}R$: "Topp-spinn"

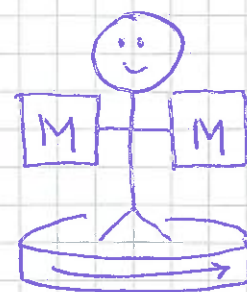
Hvis $h < \frac{2}{5}R$: "Underskru"

Eks 9: Piruett på kontorstol

(26)



Stor I_0 , liten ω_0



Liten I_1 , stor ω_1

Null ytre kraftmoment $\Rightarrow$ produktet $I \cdot \omega$ endres ikke

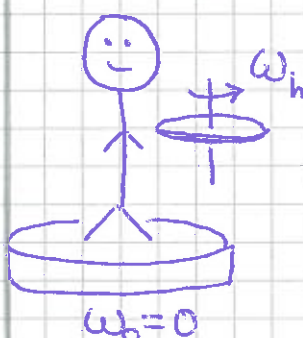
$$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_0 \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 \cdot I_0 / I_1 > \omega_0$$

Kinetisk energi øker:

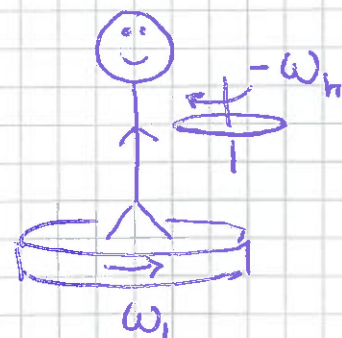
$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1 \cdot \omega_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0 \cdot \omega_0 \cdot \frac{I_0}{I_1} = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \cdot \frac{I_0}{I_1} \\ &= E_{k0} \cdot I_0 / I_1 > E_{k0} \end{aligned}$$

Utført arbeid tas fra kjemisk energi i musklene.

Eks 10: Roterende student og hjul



snu hjulet
opp ned



Null ytre kraftmoment $\Rightarrow \sum I \cdot \omega$ endres ikke

Hjulet: $I_h \omega_h \rightarrow -I_h \omega_h$, dvs endring $-2I_h \omega_h$

$\Rightarrow$ Studenten må få endring $+2I_h \omega_h$
(+stol)

$$\Rightarrow I_1 \omega_1 = 2I_h \omega_h \Rightarrow \omega_1 = \frac{2I_h \omega_h}{I_1}$$