Institutt for fysikk, NTNU
Fag SIF 4012 Elektromagnetisme
Høst 2001

Løsning øving 1

Oppgave 1

a) Tyngdekraften er lik den elektriske kraften når

$$mg = eE$$

Det gir den elektriske feltstyrken

$$E = \frac{mg}{e} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 9.8\,\mathrm{m/s}^2}{1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = \underline{5.6 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N/C}}$$

Til sammenligning er "vanlige" elektriske felt ved jordoverflata av størrelsesorden 100N/C.

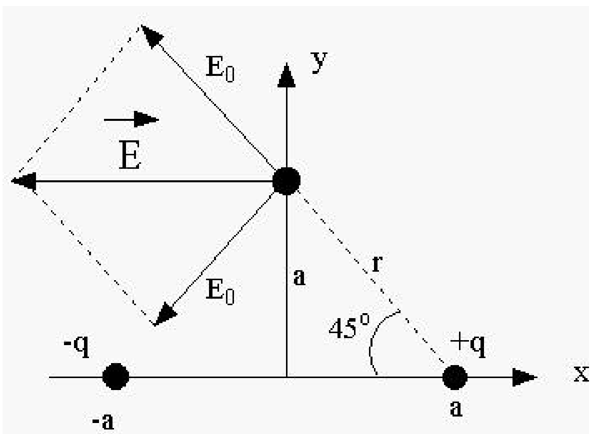
b) Man oppnår et tilsvarende stort elektrisk felt fra et elektron,

$$E = \frac{e}{4p e_0 r^2}$$

når avstanden er:

$$r = \sqrt{\frac{e}{4p e_0 E}} = \left(9 \cdot 10^9 \, \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{5.6 \cdot 10^{-11}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{m} = \underline{5.1\mathrm{m}}$$

Oppgave 2



Det elektriske feltet fra hver ladning er:

$$E_0 = \frac{q}{4pe_0r^2} = \frac{q}{8pe_0a^2}$$

da

$$r = \sqrt{2}a$$

Av symmetrigrunner er det klart at y-komponenten E_y til det resulterende feltet forsvinner ($E_y = 0$), mens x-komponenten blir:

$$E_x = E_0\left[\cos(3p/4) + \cos(-3p/4)\right] = \underline{-\sqrt{2}E_0}$$

Oppgave 3

a) Vi deler skiva opp i ringer med bredde dR. Alle punkter på ringen ligger i samme avstand r fra punktet på z-aksen (se figur neste side). Diametralt motsatte punkter (evt arealer dA) fører til at x- og y-komponentene til feltet forsvinner. z-komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4pe_0r^2}\cos q$$

Da r er konstant rundt hele ringen, kan en la dQ gjelde for hele ringen slik at

$$dQ = s\int dA = sRdR\int_0^{2p} dj = 2p\,sRdR.$$

Dermed blir feltet fra hele skiva:

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4pe_0}\int_0^{R_0}\frac{2p\,sRadR}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{sa}{2e_0}\Bigg|_0^{R_0}\frac{-1}{\left(a^2+R^2\right)^{1/2}} = \underline{\frac{s}{2e_0}\left(1-\frac{a}{\left(a^2+R_0{}^2\right)^{1/2}}\right)}$$

der

$$\cos q = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

er brukt. En kunne også ha satt

$$dQ = s\,dA = s\,Rd\,j\,dR$$

og fått dobbeltintegralet

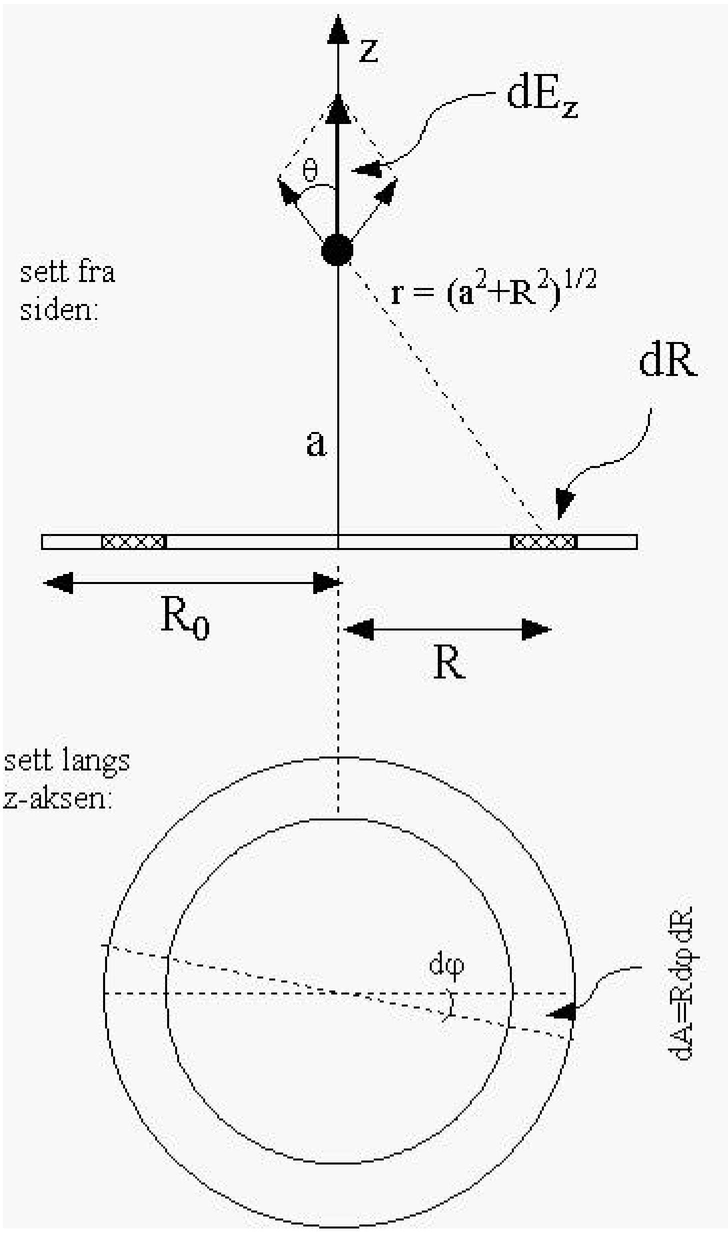
$$\int_0^{2p} dj\int_0^{R_0}(\cdots)s\,RdR.$$

Alternativt kunne vinkelen *q* ha blitt benyttet som integrasjonsvariabel:

$$\tan q = \frac{R}{a} \Rightarrow d(\tan q) = \frac{dq}{\cos^2 q} = \frac{dR}{a};\, r = \frac{a}{\cos q}$$

$$\int_0^{R_0} \frac{RdR}{r^2}\cos q = \int_0^{q_0} \left(\frac{\cos q}{a}\right)^2 a \tan q \,\frac{adq}{\cos^2 q}\cos q =$$

$$\int_0^{q_0} \sin q dq = 1 - \cos q_0 = 1 - \frac{a}{r_0} = 1 - \underline{\frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0{}^2}}}$$



b) Når R_0 » a, betyr det at plata er stor i forhold til avstanden fra plata til punktet som betraktes. Det siste leddet kan da neglisjeres ($a/R_0 \to 0$), og vi finner

$$\underline{E_z = \frac{s}{2e_0}}$$

som er feltet utenfor et uendelig stort ladet plan. Når a » R_0, vil plata bli som et punkt langt vekk. Da vil

$$\sqrt{a^2 + R_0^{\ 2}} \to a$$

og vi må derfor rekkeutvikle for å få et ikke-forsvinnende bidrag til E_z. Med

$$x = \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \to 0$$

finner en, med utvikling i Taylorrekke:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots$$

eventuelt

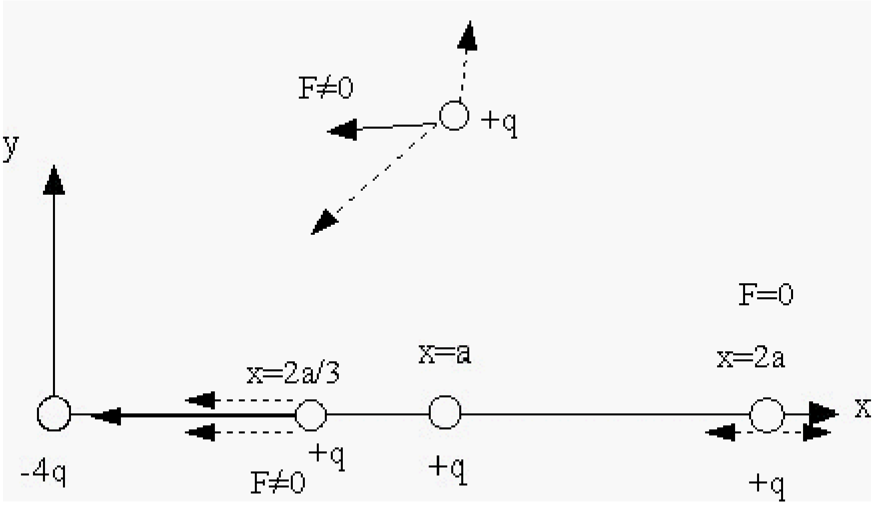
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \cdots; \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \cdots} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots$$

slik at feltet blir:

$$E_z = \frac{s}{2e_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = \frac{s}{2e_0}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}x + \cdots\right)\right) = \frac{sR_0^{\ 2}}{4e_0 a^2} = \frac{Q}{4pe_0 a^2}$$

som er feltet fra en punktladning $Q = sA$, der $A = pR_0^2$ er arealet av sirkelskiven.

Oppgave 4



Punktladningen er i likevekt (dvs kan ligge i ro) dersom kraften på den er lik null. De to kreftene, hhv fra ladningen –4q i $x=0$ og fra ladningen +q i $x=a$, kan bare kansellere dersom de har eksakt motsatt retning. Det kan de ikke ha dersom den tredje ladningen +q er plassert utenfor x-aksen, f.eks. som øverst på figuren. (Enkeltkomponenter av kraften med stiplete piler, totalkraften med heltrukken pil.) Altså må ladningen +q ligge på x-aksen for å kunne være i likevekt.
Videre, ettersom tiltrekningskraften mellom to ladninger –4q og +q er sterkere enn frastøtningen mellom +q og +q for en bestemt avstand mellom ladningene, er det klart at ladningen +q må ligge et sted til høyre for $x=a$ for å være i likevekt. I tillegg kan selvsagt partikkelen bindes i det singulære punktet x=0.
Null kraft på x-aksen i punktet x_0 medfører dermed (når en også tar hensyn til kraftens retning):

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(-\frac{4}{x_0{}^2}\frac{x_0}{|x_0|} + \frac{1}{(x_0-a)^2}\frac{x_0-a}{|x_0-a|} \right)\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \\
&\Rightarrow 4(x_0-a)^2 = x_0{}^2 \\
&\Rightarrow 3x_0{}^2 - 8ax_0 + 4a^2 = 0 \\
&\Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}\left(4 \pm \sqrt{4^2 - 3\cdot 4}\right)a = \frac{1}{3}(4 \pm 2)a = \underline{2a}
\end{aligned}
$$

Vi har her forutsatt at $x_0 > a$, slik at $x_0=2a/3$ ikke er en aktuell løsning. Vi ser da også av figuren at begge kraftkomponentene virker mot venstre på en ladning +q plassert her.
Posisjonen $x_0=2a$ er stabil mhp en forflytning langs x-aksen, da den frastøtende kraften fra +q i $x=a$ vil avta raskere enn den tiltrekkende kraften fra –4q i $x=0$ for en positiv forflytning Δx, og øke raskest for en negativ forflytning. (En kan sjekke dette matematisk ved å derivere uttrykket for nettokraften mhp x_0.)
Ved en forflytning i y-retningen, derimot, vil denne likevekten være ustabil. (Vis dette ved å beregne y-komponenten av de to kreftene som virker på den tredje ladningen når den er plassert i $(x,y) = (2a, \Delta y)$!)