

Løsning øving 10

Oppgave 1.

a) Energi som må lagres:

$$U = \frac{700\text{W} \cdot 0.005\text{s}}{0.90} = \underline{3.89\text{J}}$$

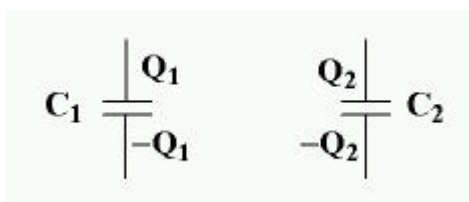
b) Energi på kondensatoren: $U = \frac{1}{2} CV^2$
som betyr at spenningen må være:

$$V = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.89\text{J}}{0.8 \cdot 10^{-3}\text{F}}} = \underline{98.6\text{V}}$$

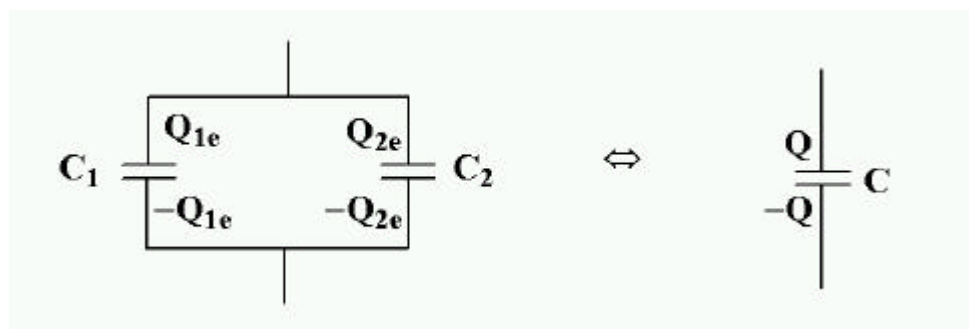
(Enheter: $\text{J/F} = (\text{VC})/(\text{C/V}) = \text{V}^2$)

Oppgave 2.

a) Før sammenkobling:



Etter sammenkobling:



der $Q = Q_1 + Q_2 (= Q_{1e} + Q_{2e})$ og $C = C_1 + C_2$ (som gjelder for parallellkobling av kapasitanser).

Energiforhold: ($U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2/C$)

Før sammenkobling:

$$U_{\text{før}} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2} \right)$$

Etter sammenkobling:

$$U_{\text{etter}} = \frac{1}{2} \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{C_1 + C_2}$$

Endringen i energi blir dermed:

$$\Delta U = U_{\text{etter}} - U_{\text{før}} = \frac{1}{2C_1C_2(C_1 + C_2)} [C_1C_2(Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2) - C_2(C_1 + C_2)Q_1^2 - C_1(C_1 + C_2)Q_2^2] =$$

$$= -\frac{(C_2Q_1 - C_1Q_2)^2}{2C_1C_2(C_1 + C_2)}$$

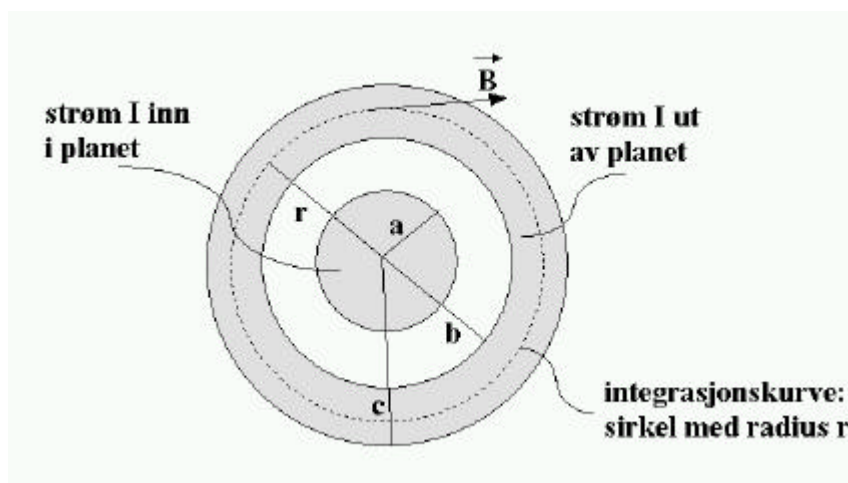
b) Med oppgitte tallverdier innsatt:

$$\Delta U = -\frac{(10 \cdot 8 - 5 \cdot (-2))^2 (mF \cdot mC)^2}{2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot (5 + 10)(mF)^3} = -5.4 \frac{(mC)^2}{mF} = \underline{\underline{-5.4J}}$$

Denne energien forsvinner som tap i ledningene pga motstand i disse, og går da over til varme. Før sammenkobling har vi potensialforskjeller $V_{1f} = Q_1/C_1 = 1600V$ og $V_{2f} = Q_2/C_2 = -200V$ over de to kondensatorene. Når de kobles sammen, vil ladning flyte fra den ene til den andre gjennom tilkoblingsledningene inntil potensialforskjellen er den samme over begge kondensatorene. Denne må da bli: $V_e = Q/C = (Q_1 + Q_2)/(C_1 + C_2) = 400V$. Ladningen på de to kondensatorene blir etter sammenkobling $Q_{1e} = V_e C_1 = 2mC$ og $Q_{2e} = V_e C_2 = 4mC$.

[Vi skal etterhvert snakke om induktans i forelesningene. Dersom den sammenkoblede kretsen har induktans av betydning, vil ladningen kunne svinge fram og tilbake mellom de to kondensatorene, slik at den tilhørende strømmen svekkes (pga motstanden i ledningene) for hver svingning. Vi har da en svingekrets (evt oscillator). Hvis ladninger svinger fram og tilbake i kretsen, betyr det at de er akselerert, og akselererte ladninger kan sende ut stråling i form av elektromagnetiske bølger. I såfall vil noe av den tapte energien være knyttet til denne strålingen.]

Oppgave 3.



Pga symmetrien vil B kun avhenge av avstanden r fra symmetriaksen, og feltlinjene vil bli sirkler om denne aksen. Vi kan derfor bruke Amperes lov på en sirkel med radius r :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_i$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi r}$$

Her er I_i netto strøm som går innenfor radius r . Ettersom strømmen er jevnt fordelt over hvert tverrsnitt, har vi i de 4 ulike områdene:

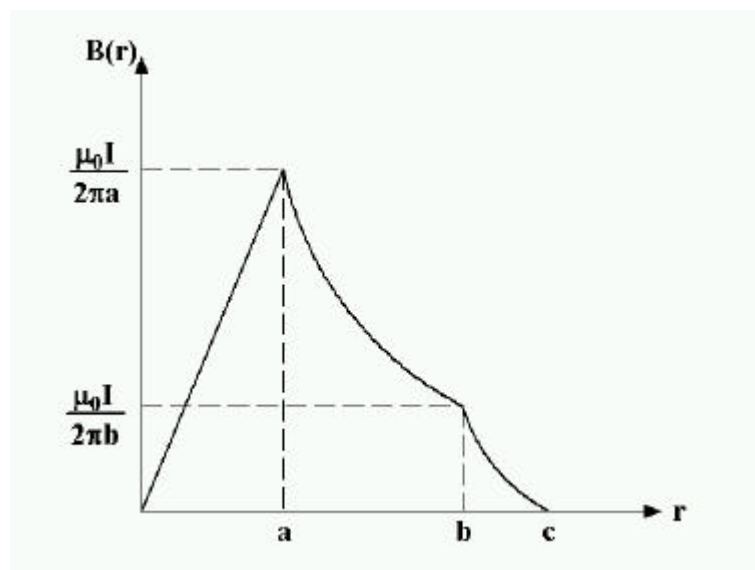
$$\text{i) } r < a : I_i = I \frac{pr^2}{pa^2} = I \left(\frac{r}{a} \right)^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2pa^2} r$$

$$\text{ii) } a < r < b : I_i = I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2pr}$$

$$\text{iii) } b < r < c : I_i = I - I \frac{p(r^2 - b^2)}{p(c^2 - b^2)} = I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2pr} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$$\text{iv) } r > c : I_i = I - I = 0 \Rightarrow B(r) = 0$$

Skisse av $B(r)$:



Oppgave 4.

Gauss lov på differensialform, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, gir:

$$\text{a) } \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = k(1+1+1) = 3k \neq 0$$

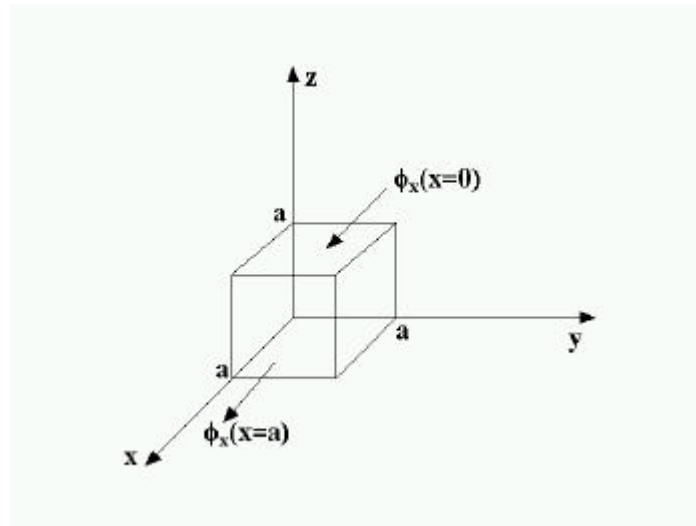
$$\text{b) } \nabla \cdot \vec{B} = k(1+0-1) = 0$$

$$\text{c) } \nabla \cdot \vec{B} = k(y - x + (x - y)) = 0$$

$$\text{d) } \nabla \cdot \vec{B} = k(0+0+0) = 0$$

Følgelig er feltene under punktene b), c) og d) mulige $\mathbf{B}$ -felt, mens det under punkt a) ikke er det.

Alternativt kan en benytte Gauss lov på integralform, f.eks. med en kube plassert med det ene hjørnet i origo, og med sidekanter med lengde a langs x -, y - og z -aksen. Netto magnetisk fluks gjennom overflaten på denne kuben blir:



$$\Delta f = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \Delta f_x + \Delta f_y + \Delta f_z$$

der

$$\Delta f_x = f_x(x=a) - f_x(x=0) = \int_0^a dy \int_0^a dz [B_x(x=a) - B_x(x=0)]$$

og tilsvarende for Δf_y og Δf_z . Dette gir:

$$B_x(a) - B_x(0) = ka \Rightarrow \Delta f_x = ka^3$$

$$a) \quad B_y(a) - B_y(0) = ka \Rightarrow \Delta f_y = ka^3$$

$$B_z(a) - B_z(0) = ka \Rightarrow \Delta f_z = ka^3$$

$$\Rightarrow \Delta f = \Delta f_x + \Delta f_y + \Delta f_z = 3ka^3 \neq 0$$

b) Tilsvarende regning som under punkt a) gir:

$$\Delta f_x = ka^3, \Delta f_y = 0, \Delta f_z = -ka^3 \Rightarrow \Delta f = 0$$

c)

$$B_x(x=a) - B_x(x=0) = kay$$

$$B_y(y=a) - B_y(y=0) = -kax$$

$$B_z(z=a) - B_z(z=0) = ka(x-y)$$

$\Rightarrow$

$$\Delta f_x = \int_0^a dz \int_0^a kay dy = aka \frac{1}{2} a^2$$

$$\Delta f_y = \int_0^a dz \int_0^a (-kax) dx = -aka \frac{1}{2} a^2$$

$$\Delta f_z = \int_0^a dx \int_0^a dy ka(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta f = 0$$

d)

$$B_z(z=a) - B_z(z=0) = -ky + ky = 0 \\ \Rightarrow \Delta f = 0$$

Med andre ord, samme konklusjon om vi bruker integral- eller differensialversjonen av Gauss lov!

Oppgave 5.

Strøm i element dx : $dI = I \, n \, dx$

Bidrag til **B**:

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dI$$

Magnetfeltet blir dermed:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{R^2 dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Et tilsvarende integral var vi borti i Øving 1, oppgave 3. Vi setter

$$x = R \tan j \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 j} dj$$

$$\sqrt{x^2 + R^2} = \frac{R}{\cos j}$$

og får

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{j_1}^{j_2} \cos j \, dj = \frac{1}{2} \mu_0 I n (\sin j_2 - \sin j_1)$$

Oppgave 6.

Inne i en lang solenoide er magnetfeltet $B = \mu_0 I n$. For å lage $B=1\text{T}$ med viklingstetthet 1000 m^{-1} , må vi derfor ha en strømstyrke på

$$I = B/(\mu_0 n) = 1/(4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000) \text{ A} = \underline{796\text{A}}$$

I et lederstykke med motstand R som fører en strøm I har vi et effekttap gitt ved

$$P = RI^2 \quad (P = VI = RI^2)$$

Motstanden R er gitt ved

$$R = L/(\sigma S)$$

i en leder med lengde L, tverrsnittsareal S og konduktivitet σ . Her har vi $S = \pi (d/2)^2 = 0.79 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, slik at med oppgitt verdi for σ , har tråden en motstand pr lengdeenhet

$$R/L = 1/(\sigma S) = 0.022 \text{ } \Omega/\text{m}.$$

Utviklet effekt pr lengdeenhet blir dermed:

$$P/L = (R/L)I^2 = 0.022 \cdot 796^2 \text{ W/m} = \underline{13.9 \text{ kW/m}}$$

Dette er ikke så rent lite, og gjør det vanskelig å lage sterke magnetfelt med en slik solenoide. Det hjelper endel å fylle solenoiden med jern: Da kan vi i hvert fall oppnå et magnetfelt $B_s = \mu_0 M_s$, der M_s er metningsmagnetiseringen i jern. Med $M_s = 1.6 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ får vi $B_s = 2\text{T}$. Men en ytterligere økning til 3T krever altså en påtrykt strømstyrke på ca 800A hvis $n=1000 \text{ m}^{-1}$. (Husk at totalt magnetfelt blir $B = \mu_0 (H + M_s)$, der $\mu_0 H = nI$ skyldes påtrykt, ”fri” strøm I.)