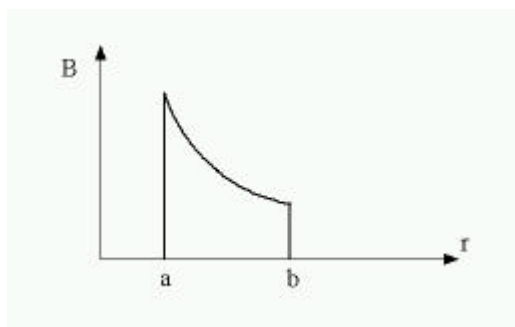


Løsning øving 12

Oppgave 1.

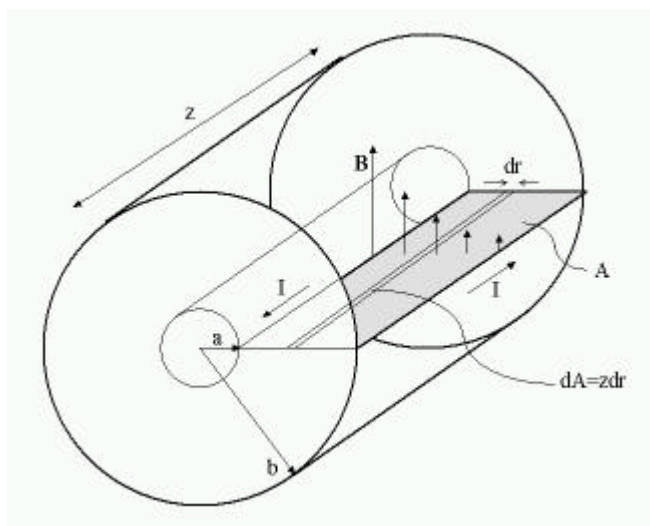
a) I Øving 10, oppgave 3 beregnet vi magnetfeltet for en slik koaksialkabel, med antagelsen at strømmen var jevnt fordelt i lederne. I denne oppgaven skulle vi anta at all strømmen går i overflaten av indre leder og i indre overflate av ytre leder. Magnetfeltet blir dermed som skissert i Figur 1, med



Figur 1

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{for } a < r < b$$

og $B = 0$ ellers (med bruk av Amperes lov). Dermed kan vi beregne den magnetiske fluksen mellom indre og ytre leder på et stykke med lengde z , og derfra selvinduktansen L for dette stykket av kabelen.



Figur 2

$$f_m = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} z dr = \frac{\mu_0 z I}{2\pi} \ln r \Big|_a^b = \frac{\mu_0 z I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{f}_m = \frac{\mu_0 z}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \dot{I}$$

$\Rightarrow$

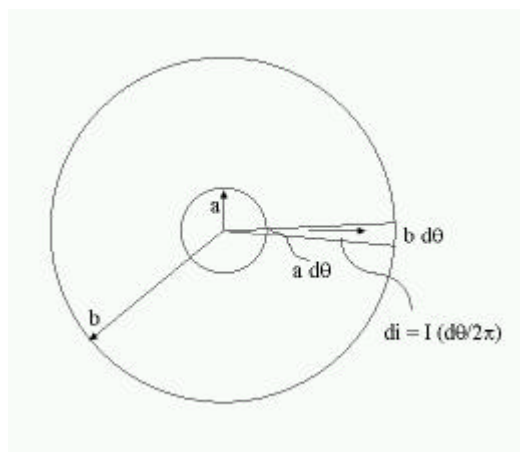
$$L = \frac{\mu_0 z}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(Vel, om vi definerer selvinduktansen ut fra $\phi_m = L I$ eller fra $d\phi_m/dt = L (dI/dt)$ spiller her selvsagt ingen rolle!)

Selvinduktansen pr lengdeenhet blir dermed:

$$L' = \frac{L}{z} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Legg merke til arealet A som vi beregner den magnetiske fluksen gjennom, se Figur 2 (gråskravert rektangel med lengde z og bredde $(b-a)$). Det vi har gjort virker kanskje litt "rart", for strengt tatt har vi her ikke ei lukket strømsløyfe som omslutter det arealet A som vi beregner fluksen gjennom, og strømmen I som er jevnt fordelt i de to sylinderflatene ved $r = a$ og $r = b$ omslutter strengt tatt ikke den indikerte flaten. Men: Tenk deg nå at vi har en lang kabel der vi i hver endeflate har forbundet indre og ytre leder med ei metallisk skive som dekker det sirkulære arealet mellom $r = a$ og $r = b$. Da har vi en lukket krets, der strømmen I kan strømme gjennom endeskiva fra indre til ytre leder på "framsida", og fra ytre til indre leder på "baksida". Tenk deg videre at du i første omgang betrakter en liten del av de to sylinderflatene, med tykkelse henholdsvis $a d\theta$ for indre leder og tykkelse $b d\theta$ for ytre leder, og som forbindes via de to nevnte endeflateskivene med en sektor slik at strømmen som går i denne lukkede kretsen blir $di = I (d\theta/2\pi)$, se Figur 3.



Figur 3

Nå har vi en lukket krets som fører en strøm di , og som omslutter den beregnede fluksen. Imidlertid gir beregningen oss fluksen uttrykt ved den *totale* strømmen I direkte, og pr definisjon er kabelens selvinduktans bestemt av forholdet mellom omsluttet fluks og total strøm.

$$b) L = (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10/2\pi) \cdot \ln(3.0/0.5) = \underline{3.6 \cdot 10^{-6} \text{ H}} = \underline{3.6 \mu\text{H}}$$

c) Energitettheten blir:

$$w_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2m_0} B^2 = \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{I}{2pr} \right)^2$$

Energiinnholdet på et stykke av lengde z blir dermed:

$$W = \int w_m dV = \int_a^b w_m z 2pr dr = \frac{1}{2} m_0 I^2 z \frac{1}{2p} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2} I^2 \frac{m_0 z}{2p} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Når vi så bruker $W = W' \quad z = \frac{1}{2} L' \quad I^2$ z har vi

$$L' = \frac{m_0}{2p} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

som funnet under punkt a).

$$d) \quad w_m = \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{I}{2pr} \right)^2 = \frac{m_0 I^2}{8p^2 b^2} = \frac{10^{-7} \cdot 4.0^2}{2p \cdot 0.0030^2} \frac{N}{m^2} = 28.3 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m^2} = \underline{28.3 \text{ mPa}}$$

(1 Pa = 1 N/m²)

Til sammenligning er et trykk på 1 atm (osfære) lik $1.03 \cdot 10^5$ Pa, så det er ikke noe voldsomt trykk det her er snakk om.....

Oppgave 2.

a) Med det oppgitte feltet blir feltet fra spole A ved spole B:

$$B_z = \frac{m_0 N_A i_A a^2}{2(d^2 + a^2)^{3/2}}$$

Med $b \ll a$ kan B_z regnes konstant over hele spolen B, slik at fluksen gjennom denne blir:

$$f_m = N_B B_z p b^2$$

Den gjensidige induktansen $M_{AB} = M_{BA} = M$ er definert ved:

$$E_B = -M \frac{di_A}{dt}$$

Faradays lov gir:

$$E_B = -\frac{df_m}{dt} = -N_B p b^2 \frac{m_0 N_A}{2} \frac{a^2}{(d^2 + a^2)^{3/2}} \frac{di_A}{dt}$$

som gir

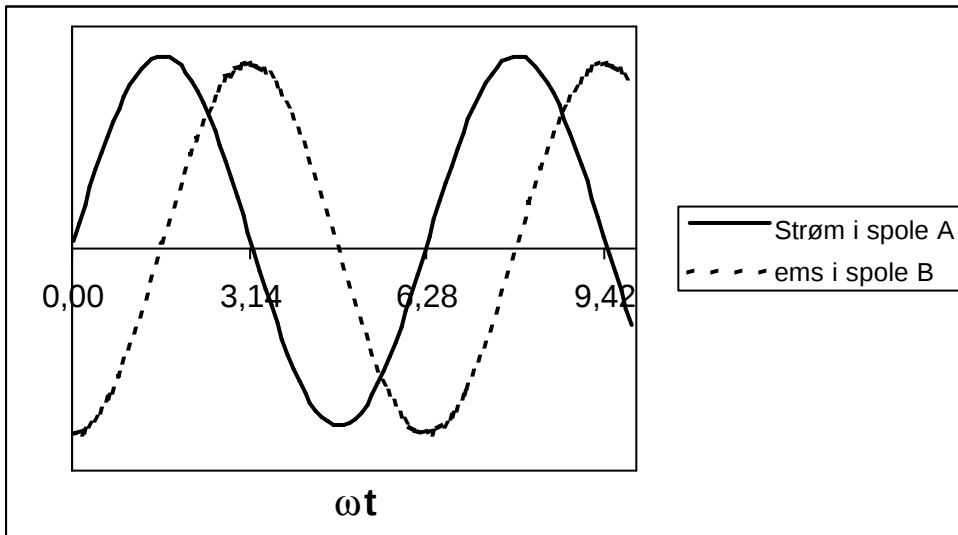
$$M = \frac{1}{2} p m_0 N_A N_B a^2 b^2 (d^2 + a^2)^{-3/2}$$

b)

$\frac{di_A}{dt} = I_A \omega \cos \omega t$, og med innsatte verdier finner en $M = 706 \cdot 10^{-9} \text{ H} = 706 \text{ nH}$. Dermed blir den induerte spenningen i spole B:

$$E_B = -706 \text{ nH} \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ A} \cdot \cos \omega t = \underline{-0.22 \text{ mV} \cdot \cos \omega t}$$

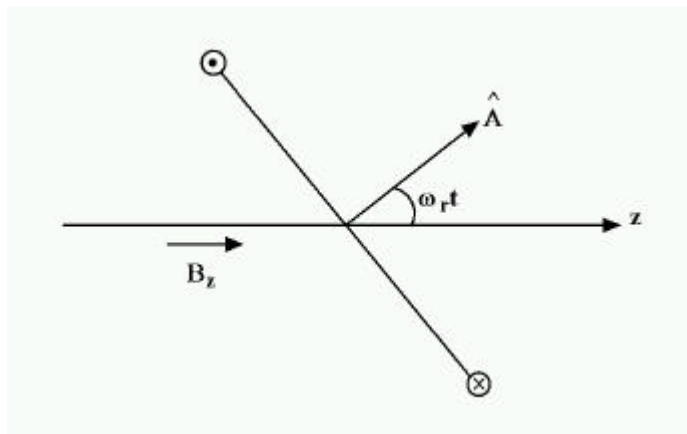
Den induerte (mot)spenningen E_B er faseforskjøvet en vinkel $\pi/2$ i forhold til strømmen i_A :



Figur 4

c) Når spole B roterer, varierer vinkelen mellom flatenormalen $\hat{A}$ til spolen og magnetfeltet slik at fluksen blir ($\hat{A} \cdot \hat{B} = \cos \omega_r t$)

$$\phi_m = N_B B_z \pi b^2 \cos \omega_r t$$



Figur 5

Den induerte spenningen blir dermed:

$$E_B = -d\phi_m/dt = N_B B_z \pi b^2 \omega_r \sin \omega_r t = \underline{0.44 \text{ mV} \sin \omega_r t}$$

Legg merke til at svaret blir det dobbelte av svaret under punkt b) fordi eneste endring i størrelser er at frekvensen er doblet.

Oppgave 3.

Vinkelfrekvensen er:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} = 314 \text{ s}^{-1}$$

Impedansen, $Z = V/I$, blir dermed for

a) en motstand $R = 30 \Omega$:

$$Z = R = |Z| \exp(i\alpha) \Rightarrow$$

$$\underline{|Z| = R = 30 \Omega, \quad \alpha = 0^\circ}$$

b) en induktans $L = 1.45 \text{ mH}$:

$$Z = i\omega L = |Z| \exp(i\alpha) \Rightarrow$$

$$\underline{|Z| = \omega L = 314 \cdot 1.45 \cdot 10^{-3} \Omega = 0.46 \Omega, \quad \alpha = \pi/2}$$

c) en kapasitans $C = 25 \mu\text{F}$:

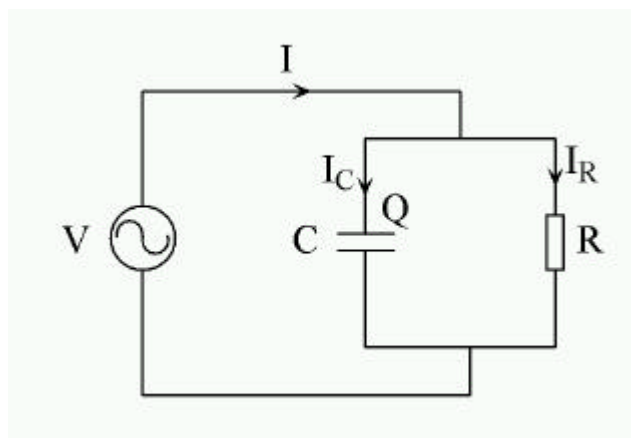
$$Z = 1/(i\omega C) = |Z| \exp(i\alpha) \Rightarrow$$

$$\underline{|Z| = 1/(\omega C) = 1/(314 \cdot 25 \cdot 10^{-6}) = 127 \Omega, \quad \alpha = -\pi/2}$$

(Sammenhengen mellom V og I for disse enkle kretsene, hhv a) VR-krets, b) VL-krets, og c) VC-krets har vi utledet i forelesningene.)

Oppgave 4.

a)



Figur 6

Frekvensen $f = \omega/2\pi$ er bestemt av: $R = -X_C = 1/(\omega C)$. Dermed:

$$f = 1/(2\pi RC) = 1/(2\pi \cdot 300 \cdot 0.25 \cdot 10^{-6}) = \underline{2.12 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}}$$

Den påtrykte spenningen er: $V = V_0 \cos \omega t$

La oss regne med komplekse størrelser, slik at vi kan skrive: $V = V_0 \exp(i\omega t)$

(slik at den påtrykte spenningen, dvs den fysiske størrelsen, da er gitt ved $\text{Re } V$)

Utgangspunktet for å bestemme impedansen til parallellkoblingen er at vi (til enhver tid!) har samme spenningsfall V over motstanden og kondensatoren. Dermed:

Strøm i motstanden, I_R : $V = R I_R \Rightarrow I_R = V/R = (V_0/R) \exp(i\omega t)$

Ladning på kondensatoren, Q : $C = Q/V \Rightarrow Q = CV = CV_0 \exp(i\omega t)$

Strømmen inn i kondensatoren er gitt ved: $I_C = dQ/dt = i\omega CV_0 \exp(i\omega t)$

Fra Kirchhoffs strømlov, anvendt på ett av knutepunktene, har vi dermed:

$$I = I_R + I_C = (V_0/R) \exp(i\omega t) + i\omega CV_0 \exp(i\omega t) \\ = (V_0/R) (1 + i) \exp(i\omega t)$$

Her har vi brukt at $\omega C = 1/R$.

Impedansen til kretsen er pr definisjon gitt ved forholdet mellom den påtrykte spenningen V og den resulterende strømmen I :

$$Z_p = V/I$$

Da kan vi sette inn for V og I direkte, og finner:

$$Z_p = V/I = [V_0 \exp(i\omega t)] / [(V_0/R) (1 + i) \exp(i\omega t)] = R/(1+i) = |Z_p| \exp(i\alpha_p)$$

$$\text{Dermed: } |Z_p| = |R/(1+i)| = R/\sqrt{1+1} = R/\sqrt{2} = \underline{212 \Omega}$$

Fasevinkelen α_p bestemmes av

$$\tan \alpha_p = \frac{\text{Im } Z_p}{\text{Re } Z_p} = -1 \Rightarrow \alpha_p = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

NB: Legg merke til at vi *kan* bruke Kirchhoffs strømlov direkte, forutsatt at vi inkluderer tidsavhengigheten eksplisitt. Ovenfor har vi gjort det med utgangspunkt i en kompleks representasjon, men det ville selvsagt ha gått bra med reell regning også: Med $V = V_0 \cos \omega t$ har vi $I_R = (V_0/R) \cos \omega t$, og $I_C = dQ/dt = -\omega C V_0 \sin \omega t = -(V_0/R) \sin \omega t$, slik at total strøm blir

$$I = I_R + I_C = (V_0/R) [\cos \omega t - \sin \omega t] = (V_0/R) \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} \cos \omega t - \sin \frac{\pi}{4} \sin \omega t \right] = \frac{\sqrt{2} V_0}{R} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

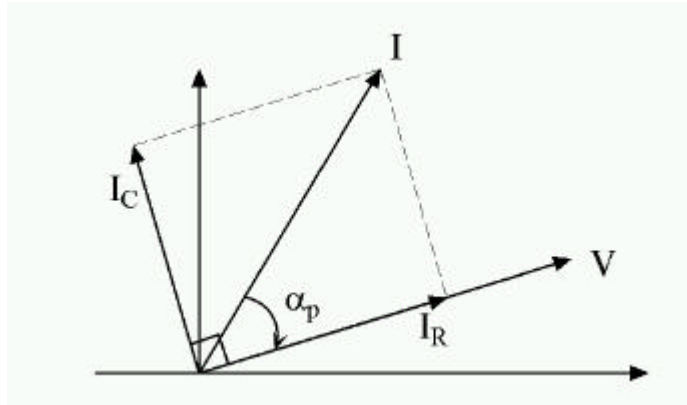
(der vi har brukt at $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$)

Her finner vi også at forholdet mellom spenningsamplituden V_0 og strømamplituden $\frac{\sqrt{2} V_0}{R}$ blir lik $\frac{R}{\sqrt{2}}$,

og at strømmen er faseforskjøvet $\pi/4$ i forhold til den påtrykte spenningen. (Motsatt fortegn i forhold til α_p , fordi fasevinkelen til impedansen Z_p angir faseforskyvning av V i forhold til I . Her gikk det relativt greit med reell regning, siden $X_C = -R$, men generelt kan det bli mye mer kronglete med reell regning enn med kompleks regning.)

Derimot kan vi **ikke** bare si som så at strømmen gjennom motstanden er $I_R = V/R$, og strømmen gjennom kondensatoren er $I_C = -V/X_C = V/R$, og deretter at total strøm blir $I = I_R + I_C = 2V/R$. Dette blir **feil** fordi vi ikke tar hensyn til at de to bidragene til totalstrømmen ikke svinger i fase med hverandre.

En alternativ måte å løse slike oppgaver på er ved hjelp av såkalte *viserdiagram* (evt *roterende vektorer*). I Figur 7 har vi tegnet inn den påtrykte spenningen V som en roterende vektor i et plan, ved et vilkårlig valgt tidspunkt. I samme diagram har vi tegnet inn strømmene I_R og I_C gjennom hhv motstand og kondensator.



Figur 7

Ettersom vi her har $R = -X_C = 1/(\omega C)$, blir lengden til I_R og I_C like lange, dvs amplitudene til de to strømkomponentene er like store. Videre har vi brukt at strømmen I_R gjennom motstanden er i fase med spenningsfallet V over motstanden, mens strømmen I_C gjennom kondensatoren er faseforskjøvet $+90^\circ$ i forhold til spenningsfallet V . Amplituden til totalstrømmen I blir dermed (se Figur 7):

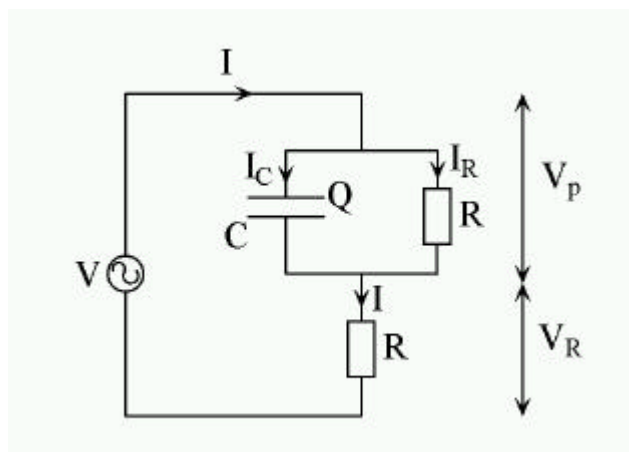
$$I = (I_R^2 + I_C^2)^{1/2} = (R^{-2} + X_C^{-2})^{1/2} V = 2^{1/2} V/R = V/Z_p$$

som gir impedansen: $Z_p = R/2^{1/2} = \underline{212 \Omega}$

Fasevinkel: $\tan \alpha_p = -I_C / I_R = -1$, $\alpha_p = -\pi/4 = \underline{-45^\circ}$

Det bør nå være sannsynliggjort at de to framstillingene, enten med kompleks tidsavhengighet $\exp(i\omega t)$ eller med roterende vektorer, er helt ekvivalente, ettersom vi kan oppfatte planet i Figur 7 som et komplekst plan med realdel langs horisontal akse og imaginærdel langs vertikal akse. Dermed blir de inntegnede strøm- og spenningsvektorene nettopp en representasjon av de komplekse størrelsene $V_0 \exp(i\omega t)$ osv., der realdelen angir den fysiske størrelsen til enhver tid, lengden av vektorene angir amplituden (dvs maksimalverdien) til den fysiske størrelsen, mens vektorenes retninger angir fasene til de harmonisk svingende strømmer og spenninger.

b)



Figur 8

Denne oppgaven kan løses enkelt ved å innse at resulterende impedans Z rett og slett må bli summen av impedansen Z_p til parallellkoblingen fra forrige punkt og impedansen R til den ekstra motstanden, ettersom vi har en seriekobling av impedanser:

$$\begin{aligned} Z &= Z_p + R = R/(1+i) + R = (R + R(1+i))/(1+i) = R(2+i)/(1+i) = R [(2+i)(1-i)]/[(1+i)(1-i)] \\ &= R [2-2i+i+1]/[1-i+i+1] = R (3-i)/2 \end{aligned}$$

Dermed:

$$|Z| = (R/2)|3-i| = (R/2)(9+1)^{1/2} = 10^{1/2} R/2 = \underline{474 \Omega}$$

$$\alpha = \arctan(\text{Im } Z / \text{Re } Z) = \arctan(-1/3) = \underline{-18.4^\circ}$$

Litt mer omstendelig løsning:

Summen av spenningsfallene V_p og V_R (se Figur 8) må være lik påtrykt spenning $V = V_0 \exp(i\omega t)$:

$$(1) \quad V = V_p + V_R = V_p + RI$$

Videre (med Kirchhoffs strømlov):

$$(2) \quad I = I_R + I_C = (V_{p0}/R)\exp(i\omega t) + i\omega C V_{p0} \exp(i\omega t) = (V_{p0}/R)\exp(i\omega t) (1+i)$$

der vi har skrevet $V_p = V_{p0} \exp(i\omega t)$ og igjen brukt $1/(\omega C) = R$. Her har vi to ligninger med to ukjente, V_{p0} og I , og det er bare å omforme litt for å bestemme disse:

Ligning (1) gir:

$$\begin{aligned} V_0 \exp(i\omega t) &= V_{p0} \exp(i\omega t) + RI \\ &= V_{p0} \exp(i\omega t) + R [(V_{p0}/R)\exp(i\omega t) (1+i)] \quad (\dots \text{der vi brukte ligning (2)} \dots) \\ &= V_{p0} \exp(i\omega t) [1 + (1+i)] \\ &= (2+i) V_{p0} \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{p0} = V_0/(2+i)$$

Ligning (1) gir deretter:

$$\begin{aligned} I &= (V - V_p)/R \\ &= (V_0/R)\exp(i\omega t) - (V_{p0}/R)\exp(i\omega t) \\ &= (V_0/R)\exp(i\omega t) [1 - 1/(2+i)] \\ &= (V_0/R)\exp(i\omega t) [(1+i)/(2+i)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z = V/I = R (2+i)/(1+i) = R(3-i)/2$$

som funnet ovenfor.

Oppgave 5.

$$V_i = RI + Q/C = R dQ/dt + Q/C$$

$$V_u = Q/C$$

Sett $V_i = V_{i0} \exp(i\omega t)$ og $Q = Q_0 \exp(i\omega t)$, som gir:

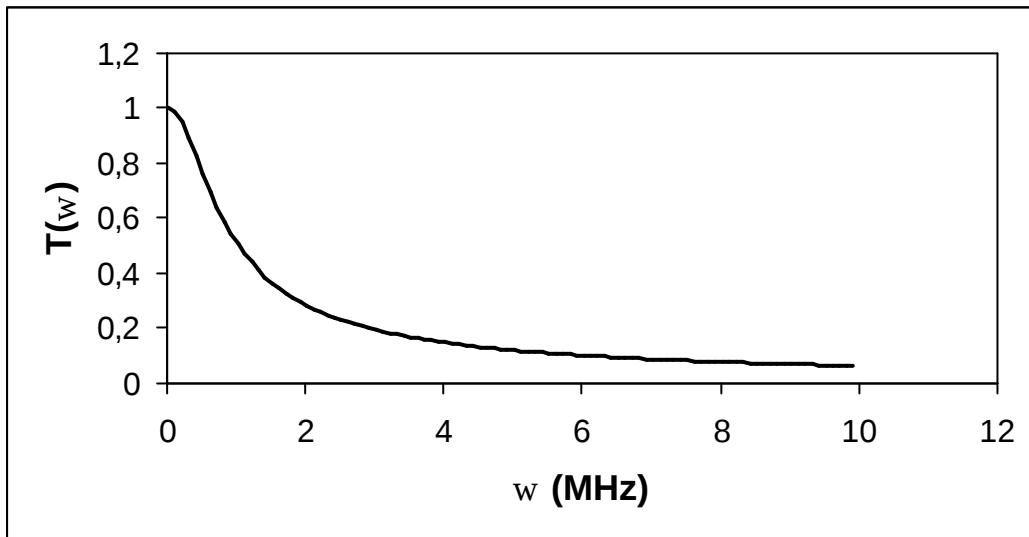
$$V_{i0} = i\omega R Q_0 + Q_0/C = Q_0(i\omega R + 1/C)$$

$$V_{u0} = Q_0/C$$

Dermed: $V_{u0}/V_{i0} = (1/C)/(i\omega R + 1/C) = 1/(1 + i\omega RC)$, og

$$T = |V_{u0}/V_{i0}| = \underline{1/(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{1/2}}$$

$$T = 1/2 \text{ når } 1 + \omega^2 R^2 C^2 = 4, \text{ dvs: } \omega = 3^{1/2}/(50 \cdot 34.6 \cdot 10^{-9}) \text{ s}^{-1} = 1 \cdot 10^6 \text{ Hz} = \underline{1 \text{ MHz}}$$



Figur 9

Dette betyr at hvis f.eks. "inn-spenningen" V_i er et sammensatt signal som består av mange forskjellige frekvenser, så vil "ut-spenningen" V_u over kondensatoren ha en amplitude omtrent lik inn-signalet for lave frekvenser, mens amplituden for høye frekvenser er svekket. Derfor kalles dette et lavpassfilter, ettersom lave frekvenser kan "passere gjennom" kretsen.

Hvis vi hadde byttet ut kondensatoren med en spole med selvinduktans L , ville kretsen ha representert et høypassfilter, med $T(\omega) = \omega / [(R/L)^2 + \omega^2]^{1/2}$, slik at ut-signalet er svekket for lave frekvenser, mens de høye frekvensene "slipper gjennom". Med denne oppgaven som utgangspunkt skulle det ikke være altfor vanskelig å vise dette. Legg også merke til at vi kan lage høypassfilter med RC-kretsen og lavpassfilter med RL-krets, ved i begge tilfelle å ta ut-spenningen over motstanden R .