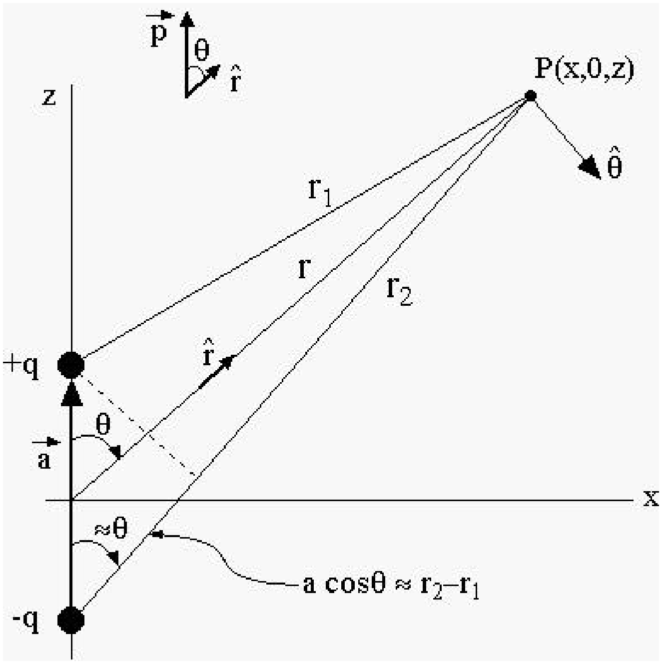
Institutt for fysikk, NTNU
Fag SIF 4012 Elektromagnetisme
Høst 2001

Løsning øving 3

Oppgave 1

a)



Potensialet fra de to ladningene er gitt ved:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q)}{r_2}$$

Til ledende orden, når $r \gg a$, finner en så:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{a\cos\theta}{r_1 r_2} \approx \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

(Dette er kanskje det springende punkt i denne oppgaven? Korreksjoner til dette uttrykket vil være av høyere orden i "litenhetsparameteren" *a/r*.)
Med $qa\cos\theta = p\cos\theta = \vec{p}\hat{r} = \vec{p}\vec{r}/r$ gir dette

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \underline{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}}$$

b) Det elektriske feltet blir:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{p\sin\theta}{r^2}\hat{\theta}\right) = \underline{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}$$

For θ = 0: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3}\hat{r}$ som er rimelig; direkte beregning av E-feltet langt ute på den positive z-aksen gir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1^2} - \frac{q}{r_2^2}\right)\hat{z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_1^2 r_2^2}\hat{z} \approx \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{z}$$

der vi har brukt $r_2 - r_1 = 2a$, $r_2 + r_1 \approx 2r$ og $r_2 \approx r_1 \approx r$.

For θ = π/2: $\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\hat{\theta}$ som er rimelig; direkte beregning av E-feltet langt ute på den positive x-aksen gir:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1^2}\frac{a/2}{r_1} - \frac{q}{r_2^2}\frac{(-a/2)}{r_2}\right)(-\hat{z}) \approx \frac{aq}{4\pi\epsilon_0 r^3}(-\hat{z})$$

der symmetribetraktning gir at x-komponenten av feltet må bli lik null, mens bidraget til z-komponenten fra hver ladning fås ved å gange med sinus til vinkelen mellom x-aksen og hhv r_1 og r_2.

For $r = 0$: $\vec{E} \to \infty$ Dette er ikke riktig! Grunnen er at $r \gg a$ ikke lenger er oppfylt. Det riktige svaret er:

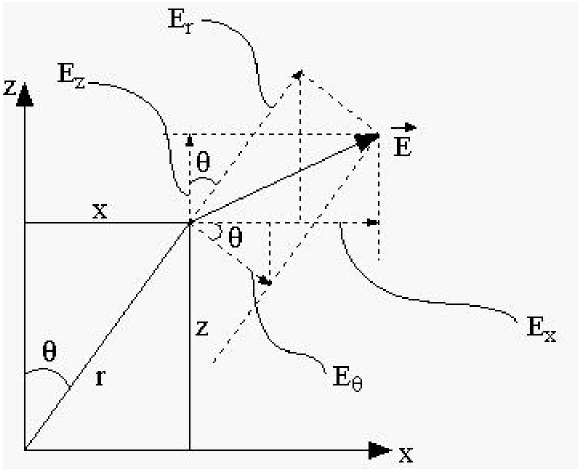
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{(a/2)^2} + \frac{q}{(a/2)^2}\right)(-\hat{z}) = -\frac{2q}{\pi\epsilon_0 a^2}\hat{z}$$

c) E_x-komponenten er sammensatt av x-komponentene fra E_θ og E_r:

$$E_x = E_\theta\cos\theta + E_r\sin\theta$$

Tilsvarende for z-komponenten:

$$E_z = -E_\theta\sin\theta + E_r\cos\theta$$



(En kontroll på at disse sammenhengene er riktige er f.eks. å regne ut $E^2=E_x{}^2+E_z{}^2$ og sjekke at svaret blir $E_\theta{}^2+E_r{}^2$.)

Dette gir:

$$4\pi\varepsilon_0 E_x = \frac{p}{r^3}\sin\theta\cos\theta + \frac{2p}{r^3}\cos\theta\sin\theta = \frac{3p}{r^3}\sin\theta\cos\theta = \underline{3p\frac{xz}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}}$$

$$4\pi\varepsilon_0 E_z = -\frac{p}{r^3}\sin^2\theta + \frac{p}{r^3}2\cos^2\theta = \underline{p\frac{2z^2-x^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}}$$

$$\vec{E}(x,z) = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\left(3xz\,\hat{e}_x + \left(2z^2-x^2\right)\hat{e}_z\right)}$$

Her har vi brukt $\sin\theta = x/r$, $\cos\theta = z/r$, $r = (x^2+z^2)^{1/2}$. Dessuten ser vi hele tiden på et punkt i xz-planet, slik at $y = 0$ og $E_y = 0$.

d) I kartesiske koordinater blir potensialet

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(z/r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

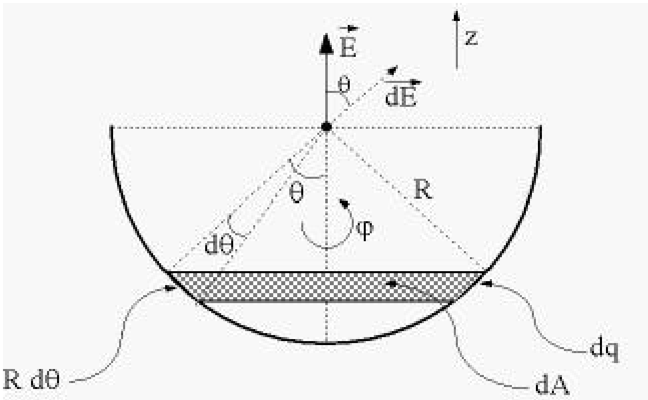
Med $\vec{E} = -\nabla V$ får vi dermed:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3pzx}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{3pz^2}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}\right) = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\left(2z^2-x^2\right)}{\left(x^2+z^2\right)^{5/2}}}$$

som funnet under punkt c).

Oppgave 2



På grunn av symmetrien vil det resulterende elektriske feltet være rettet langs z-aksen. Arealet av hele halvkula er A = $2\pi R^2$, slik at flateladningstettheten blir $\sigma = q/2\pi R^2$. Flateelementet som er skravert i figuren har areal $dA = (R\, d\theta)(R \sin\theta \cdot 2\pi) = 2\pi\, R^2 \sin\theta\, d\theta$, dvs dA = bredde $\times$ omkrets. (Med kuleflatekoordinater har en egentlig $dA = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, men ettersom $\vec{E}$ er uavhengig av φ, vil integrasjon over φ gi faktoren 2π.) z-komponenten av feltet fra ladningen $dq = \sigma\, dA$ på det skraverte flateelementet blir dermed:

$$dE_z = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos\theta$$

slik at det resulterende elektriske feltet blir:

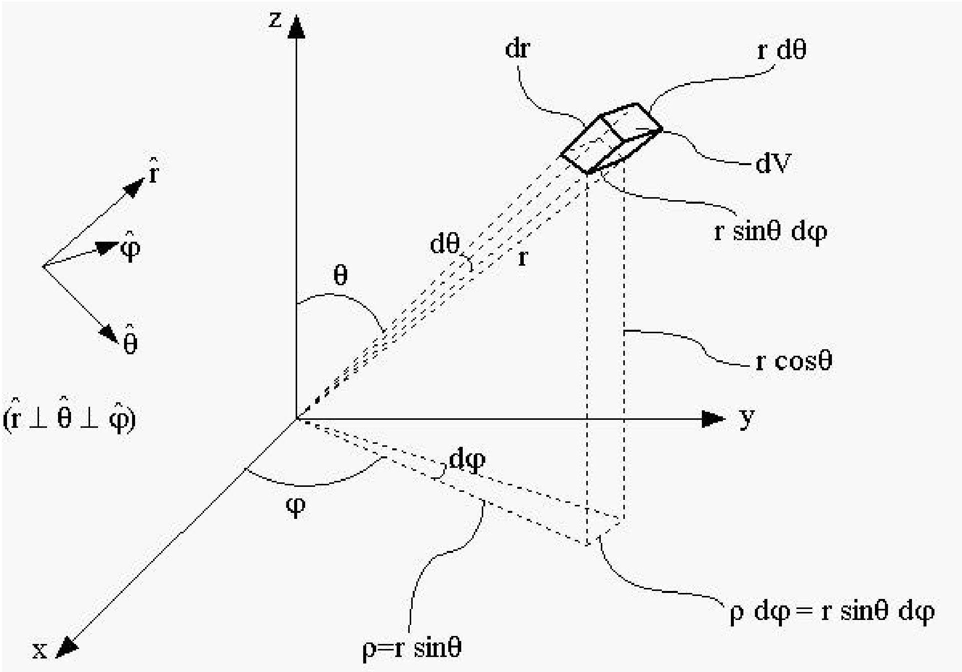
$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \int \cos\theta\; dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{q}{2\pi R^2} \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \cos\theta \sin\theta \;=$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \Big|_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2\theta = \underline{\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

Det elektriske potensialet finnes tilsvarende ved å summere bidraget fra alle ladningene. Da potensialet er en skalar funksjon, vil det ikke bli noen dekomponering. Videre har sentrum samme avstand R til alle ladningene. Dermed må det totale bidraget bli som om alle ladningene var samlet på ett sted i avstand R. Følgelig er potensialet i sentrum av halvkula det samme som for en punktladning, dvs

$$V = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}}$$

Oppgave 3



a) Lengden av linjeelementet som går diagonalt i volumet dV er:

$$d\vec{s} = \underline{\hat{r}dr + \hat{\theta}\, r\, d\theta + \hat{\varphi}\, r\sin\theta\, d\varphi}$$

b) Arealelementet på de ulike sideflatene til dV er:

$$d\vec{A_r} = \underline{r\, d\theta\, r\sin\theta\, d\varphi\ \hat{r}}$$
$$d\vec{A_\theta} = \underline{dr\ r\sin\theta\ d\varphi\ \hat{\theta}}$$
$$d\vec{A_\varphi} = \underline{r\, d\theta\ dr\ \hat{\varphi}}$$

c) Volumelementet blir:

$$dV = dr\ r\, d\theta\ r\sin\theta\ d\varphi\ = \underline{r^2 \sin\theta\ dr\, d\theta\ d\varphi}$$

d) Areal av kuleflate:

$$A(R) = \int_{r=R} \hat{r}\, d\vec{A_r} = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta\ = R^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = \underline{4\pi R^2}$$

Kulevolum:

$$V(R) = \int_{r<R} dV = \int_0^R dr \int \hat{r}\, d\vec{A_r} = \int_0^R dr\, 4\pi r^2 = \underline{\frac{4\pi}{3} R^3}$$