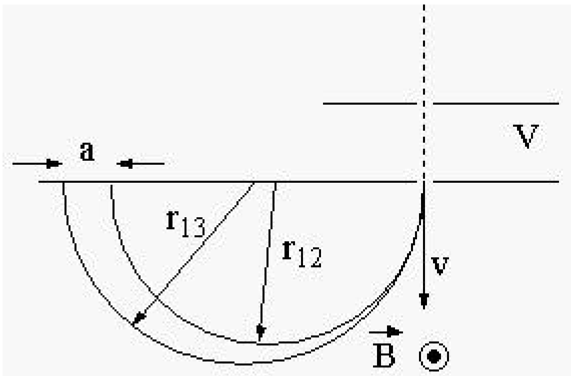
**Institutt for fysikk, NTNU**
**Fag SIF 4012 Elektromagnetisme**
**Høst 2001**

# Løsning øving 4

*Oppgave 1*

a)




Kraftbalanse:

$$F = m\frac{v^2}{r} = qvB$$
$$\Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Hastigheten er bestemt av kinetisk energi, som igjen er bestemt av endringen i potensiell energi. Dvs:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \qquad \text{slik at}$$
$$r = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Vm}{q}}$$

Altså er baneradien proporsjonal med $m^{1/2}$, og dermed har vi

$$r_{13} = r_{12}\sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} \quad \text{og følgelig} \quad a = 2(r_{13} - r_{12}) = 2r_{12}\left(\sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} - 1\right)$$

Da kan vi bestemme de to baneradiene:

$$r_{12} = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} - 1\right)^{-1} = \frac{1}{2}\cdot 10.0\text{mm}\left(\sqrt{\frac{13}{12}} - 1\right)^{-1} = \underline{122\text{mm}}$$
$$r_{13} = r_{12}\sqrt{\frac{m_{13}}{m_{12}}} = 122\text{mm}\sqrt{\frac{13}{12}} = \underline{127\text{mm}}$$

Nødvendig magnetfelt blir:

$$B = \frac{1}{r_{12}}\sqrt{\frac{2Vm_{12}}{q}} = \frac{1}{0.122\text{m}}\sqrt{\frac{2\cdot 1.5\cdot 10^3\,\text{V}\cdot 12\cdot 1.66\cdot 10^{-27}\,\text{kg}}{1.60\cdot 10^{-19}\,\text{C}}} = \underline{0.158\text{T}}$$

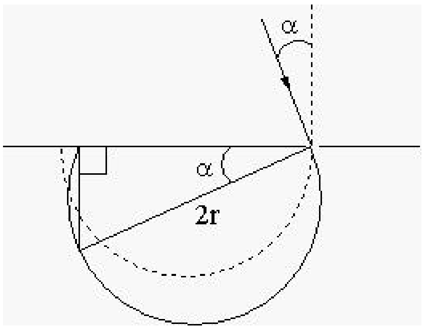
b) Ved å differensiere uttrykket for r med hensyn på V finner en:

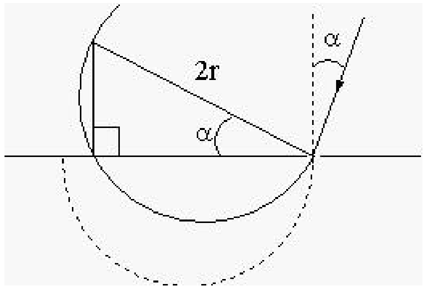
$$\Delta r = \frac{\partial r(V)}{\partial V}\Delta V = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m}{q}}\frac{1}{2\sqrt{V}}\Delta V = \frac{r}{2V}\Delta V$$

For hvert partikkelslag separat blir da spredningen i a:

$$\Delta a_w = 2\,|\,\Delta r\,| = \underline{r\frac{|\Delta V|}{V}} \quad \text{der} \quad r \text{ er } r_{12} \text{ eller } r_{13}$$

c)



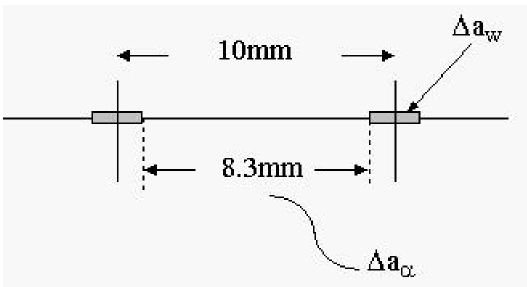

Med innfallsvinkel α (enten α > 0 eller α < 0) vil strålen treffe kollektoren i avstand 2r cosα fra inngangen. Forskyvningen blir da (merk: alltid mot høyre!)

$$\Delta a_\alpha = 2r - 2r\cos\alpha = 2r\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \cdots\right)\right) = \underline{r\alpha^2}$$

d) Energispredningen ΔW = ±10eV gir en spredning av treffpunkt for hvert av partikkelslagene:

$$\Delta a_w = r\frac{\Delta V}{V} \approx 125\text{mm}\,\frac{10}{1500} = \underline{0.83\text{mm}}$$

(der vi har brukt en midlere verdi r = $(r_{12}+r_{13})/2$ = 125mm.)




Av et område på 10mm vil en andel $2\Delta a_W$ bli benyttet av energispredningen $\Delta a_W$. Det resterende området $\Delta a_\alpha = a - 2\Delta a_W$ = <u>8.3mm</u> kan da benyttes av spredningen i vinkel. Siden denne siste spredningen alltid gir en forskyvning mot høyre, kan hele området på 8.3mm benyttes av hver partikkeltype alene, dvs $\Delta a_\alpha$ = 8.3mm. En finner da:

$$\Delta a_\alpha = r\alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\Delta a_\alpha}{r}} = \sqrt{\frac{8.3}{125}} = 0.26 \approx \underline{15^\circ}$$

*Oppgave 2*

a) Antall uparrede elektroner:

$$N = \frac{m}{m_{\mathrm{B}}} = \frac{8.7\cdot 10^{22}\,\mathrm{Am}^2}{9.27\cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am}^2} = \underline{9.4\cdot 10^{45}}$$

b) Antall atomer: $N_{\mathrm{Fe}} = \frac{1}{2}N$

Volum av jern: $V = \frac{N_{\mathrm{Fe}}}{n_{\mathrm{Fe}}} = \frac{0.5\cdot 9.4\cdot 10^{45}}{8.5\cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}} = 5.53\cdot 10^{16}\mathrm{m}^3$

Masse jern: $m_{\mathrm{Fe}} = r_{\mathrm{Fe}}V = 7.9\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3\cdot 5.53\cdot 10^{16}\mathrm{m}^3 = \underline{4.4\cdot 10^{20}\,\mathrm{kg}}$

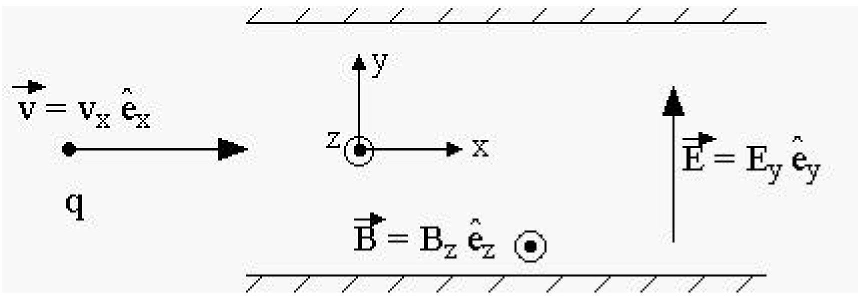
Jordas volum: $V_{\mathrm{J}} = \frac{4p}{3}R^3 = \frac{4p}{3}\left(6.4\cdot 10^6\,\mathrm{m}\right)^3 = 1.1\cdot 10^{21}\mathrm{m}^3$

Dette gir $V/V_{\mathrm{J}} = 5\cdot 10^{-5}$, dvs ca 0.005% av jordas volum, og da knapt 0.01% av jordas masse. (Jorda har egenvekt ca 5.5 kg/dm$^3$.)

c) Magnetiseringen i dette jernstykket ville være:

$$M = \frac{m}{V} = \frac{8.7\cdot 10^{22}\,\mathrm{Am}^2}{5.5\cdot 10^{16}\,\mathrm{m}^3} = \underline{1.6\cdot 10^6\ \mathrm{A/m}}$$

*Oppgave 3*




Resulterende kraft er lik null hvis partiklene ikke avbøyes. For Lorentzkraften har en da:

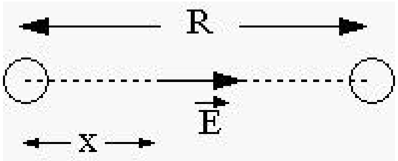
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F_y = q\left(E_y - v_x B_z\right) = 0$$

$$\Rightarrow v_x = E_y / B_z = \left(V/d\right)/B_z = \left(300\mathrm{V}/0.020\mathrm{m}\right)/0.10\mathrm{T} = \underline{1.5\cdot 10^5\,\mathrm{m/s}}$$

(1T = 1Vs/m$^2$.)

*Oppgave 4*




Det elektriske feltet på den rette linjen mellom lederne er gitt ved:

$$E=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln x-\ln\left(R-x\right)\right)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{R-x}\right)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{R}{x\left(R-x\right)}$$

Feltet er størst inne ved lederoverflaten, dvs ved x = a. Med a << R finner en da:

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}=Ea$$

som innsatt i uttrykket for V gir:

$$V(x)=Ea\ln\frac{x}{R-x}$$

Dermed blir spenningsforskjellen:

$$\Delta V=V(R-a)-V(a)=Ea\left(\ln\frac{R-a}{a}-\ln\frac{a}{R-a}\right)\approx\underline{2Ea\ln\frac{R}{a}}$$

(når a << R). Med gitte tallverdier starter coronautladning ved

$$\Delta V=2\cdot 3\cdot 10^{6}\,\mathrm{V/m}\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot\ln\left(\frac{200}{1}\right)=\underline{3.2\cdot 10^{5}\,\mathrm{V}}$$

Dette gir utladning inne ved lederen. Fullt overslag krever høyere spenning.
Linjeladningstettheten ved denne spenningen blir:

$$\lambda=2\pi a\varepsilon_0 E=2\pi\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot\frac{1}{36\pi}\cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}\cdot 3\cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}=\underline{1.7\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/m}}$$