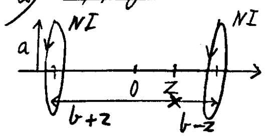
Institutt for fysikk, NTNU
Fag SIF4012 Elektromagnetisme
Høst 2001

Løsning øving 5

Oppgave 1.
Merk: I løsningsskissen nedenfor brukes ”det magnetiserende feltet” H(z). Her antar vi at vi har luft mellom spolene, dvs tilnærmet vakuum, og da gjelder sammenhengen $B(z) = \mu_0 H(z)$, der μ_0 er vakuumpermeabiliteten.

Løsning øving 5

a) Oppgave 1.



Med $b+z$ og $b-z$ som avstand fra henholdsvis venstre og høyre spole til punktet z, er det klart at

$$H(z) = H_1(b+z) + H_1(b-z) = \frac{NIa^2}{2}\left[\frac{1}{(a^2+(z+b)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2+(z-b)^2)^{3/2}}\right]$$

b) Av symmetrigrunner må alle deriverte av odde orden være lik 0 for $z=0$. Dette følger av at $H(-z) = H_1(b-z) + H_1(b+z) = H(z)$, dvs. en like funksjon av z. Følgelig ved Taylorrekke-utvikling

$$H(z) = H(0) + \underbrace{H'(0)\,z}_{=0} + \tfrac{1}{2}H''(0)z^2 + \underbrace{\tfrac{1}{6}H'''(0)z^3}_{=0} + \tfrac{1}{24}H^{(4)}(0)z^4 + \cdots$$

[Dersom $H^{(n)}(0) \neq 0$ med n oddetall vil ikke $H(-z) = H(z)$ holde.]

Bestemmer $H''(0)$ ved derivasjon

$$H'(z) = \text{konst}\left[\frac{-3(z+b)}{(a^2+(z+b)^2)^{5/2}} + \frac{-3(z-b)}{(a^2+(z-b)^2)^{5/2}}\right]$$

$$H''(z) \propto \frac{1}{(a^2+(z+b)^2)^{5/2}} - \frac{5(z+b)^2}{(a^2+(z+b)^2)^{7/2}} + \frac{1}{(a^2+(z-b)^2)^{5/2}} - \frac{5(z-b)^2}{(a^2+(z-b)^2)^{7/2}}$$

$$H''(0) \propto \left[\frac{1}{(a^2+b^2)^{5/2}} - \frac{5b^2}{(a^2+b^2)^{7/2}}\right]\cdot 2 = 2\,\frac{a^2-4b^2}{(a^2+b^2)^{7/2}}$$

Følgelig $H''(0) = 0$ når $a^2 = 4b^2$ eller $b = \frac{1}{2}a$

Av det ovenstående ser en også direkte ved innsetting at $H'(0) = 0$. Da også $H'''(0) = 0$ har en da (med $b = \frac{1}{2}a$)

$$H(z) = H(0) + \text{konst.}\; z^4 + \ldots$$

dvs. små avvik for små z.

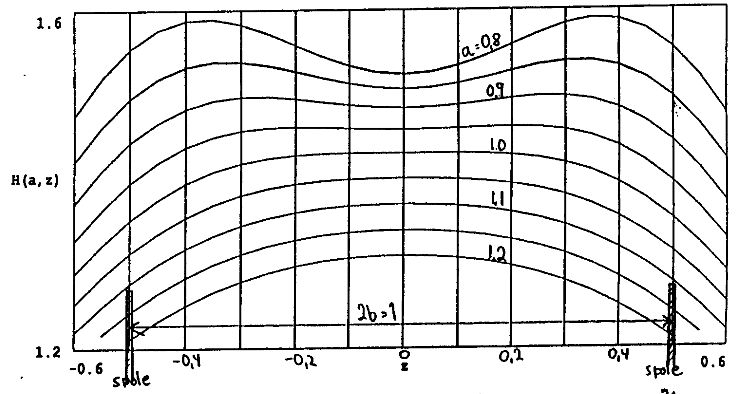
c) Ved å sløyfe konstant faktor finner en

[Merk at bare de 2 dimensjonsløse størrelsene $a' = a/b$ og $z' = z/b$ er av betydning for figuren. Derfor kan en velge b fast, f.eks. $b = 0{,}5$.]

```
b ≡ 0.5

                  2                  2
                 a                  a
H(a,z) := ───────────────── + ─────────────────
                     1.5                  1.5
          [ 2        2]       [ 2        2]
          [a + (z + b) ]      [a + (z - b) ]

a := 0.8,0.85 ..1.2          z := -0.8,-0.75 ..0.8
```



d) Når $b = \frac{1}{2}a$ og $z = 0$ har en $H(0) = \frac{NIa^2}{a^3}\,\frac{1}{(1+(\frac{1}{2})^2)^{3/2}}\,\frac{1}{2}\cdot 2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}\frac{NI}{a}$

$B = \mu_0 H = 50\,\mu T$ og $a = 0{,}50\,m$ gir da: $NI = \frac{B}{\mu_0}\,a\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} = \underline{\underline{28A}}$

e) Lengde av ledning med seriekopling av spolene $L = 2\cdot N\cdot 2\pi a$. Med motstand pr. lengdeenhet $r = 21{,}7\,\Omega/km$ blir motstanden $R = Lr = 4\pi a N r$

Spenningsfallet blir $V = RI = 4\pi a N r\cdot 28A/N = 4\pi a r\cdot 28A$
$= 4\pi\cdot 0{,}5m\cdot 21{,}7\cdot 10^{-3}\,\Omega/m\cdot 28A \approx \underline{3{,}8V}$ uavhengig av N.

P.g.a. $I_s = 2A$ blir minste antall viklinger $N = N_{min} = 28/2 = 14$.
Effekttapet blir $P = V\cdot I$ og det vil avta med økende N. Maksimal verdi blir $P_{maks.} = VI_s = 3{,}9\cdot 2\,W = \underline{7{,}6\,W}$. I lys av størrelsen på spolene vil dette ikke kreve ekstra kjøling.
Med f.eks 28 viklinger blir spoletverrsnittet noe større enn $28\cdot 0{,}823\,mm^2$ $= 23\,mm^2$ f.eks ca $8mm \times 5mm$. Dvs. tykkelsen av spolene er liten i forhold til a og b.

Oppgave 2.

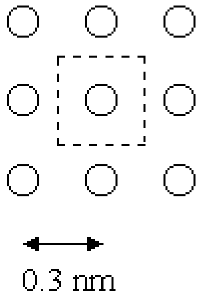
a) Elektrisk felt ved metalloverflate: $E = \sigma/\varepsilon_0$ som gir

$$\sigma = \sigma_{maks} = \varepsilon_0 E_{maks} = (8.85\cdot10^{-12}\ C^2/Nm^2)\cdot(3\cdot10^{-6}\ N/C) = \underline{27\ \mu C/m^2}.$$

b) Minste radius R_{min} for å holde på ladning 1C finnes fra:

$$\sigma_{maks} = Q/4\pi R_{min}^2 \Rightarrow R_{min} = (Q/4\pi\sigma_{maks})^{1/2} = (1C/4\pi\cdot 27\ \mu C/m^2)^{1/2} = \underline{54m}.$$

c)



Areal pr atom: $A = (0.3\ nm)^2 = 9\cdot10^{-20}\ m^2$.
Midlere antall atomer pr m^2: $n_A = 1/A = \underline{11\cdot10^{18}\ m^{-2}}$.

d) Antall elektroner pr m^2: $n_e = \sigma_{maks}/e = 27\cdot10^{-6}/1.6\cdot10^{-19}\ m^{-2} = 17\cdot10^{13}\ m^{-2}$.
Andel av atomene i overflatelaget med et ekstra elektron:

$$n_e/n_A = 17\cdot10^{13} / 11\cdot10^{18} = \underline{1.5\cdot10^{-5}}.$$

Dvs, bare ett av ca 65000 atomer har overskudd (eller underskudd) av ett elektron. Følgelig har ytterste atomlag mer enn nok kapasitet til å ta opp ladning på en metalloverflate.

Oppgave 3.

a) Motstand i de to Al-trådene tilsammen: $R = L/\sigma A = 0.60\ m/(3.54\cdot10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}\cdot10^{-6}\ m^2) = 0.017\ \Omega$.
Total motstand i Al-tråder og resistor: $10.017\ \Omega$.
$\Rightarrow$ Spenningsfall over Al-trådene (tilsammen): $V_{Al\text{-}tråd} = 1.5V\ (0.017 / 10.017) = \underline{2.5mV}$
Spenningsfall over resistoren: $V_R = 1.5V\ (10/10.017) = \underline{1.497\ V}$
Reelle motstander har vanligvis en toleranse på et sted mellom 1 og 5%. Hvis dette er tilfellet her, kan motstanden i og spenningsfallet over Al-trådene fullstendig neglisjeres. Dvs, vi kan betrakte dem som perfekte ledere med (tilnærmet) uendelig ledningsevne og null motstand.

b) Strømstyrke: $I = V / R_{tot} = 1.5V / 10.017\Omega = 0.1497\ A \approx \underline{0.15\ A}$.
Utviklet effekt: $P = V I = 1.5V\cdot0.15A = 0.225\ W \approx \underline{0.23\ W}$.

c) Strømtetthet: $j = I / A = 0.15A/10^{-6}m^2 = 150000\ A/m^2$.
Antallstetthet av elektroner: $n = n_{Al} = (2700\ kg/m^3 / 26.98\cdot10^{-3}\ g/mol)\cdot6.02\cdot10^{23}\ mol^{-1} = 6\cdot10^{28}\ m^{-3}$.
Midlere driftshastighet: $j = nev_d \Rightarrow v_d = j/ne = \underline{1.56\cdot10^{-5}\ m/s}$.

Midlere termiske hastighet er bestemt av $E_{kin} = mv_T^2/2 = 3k_BT/2$
der $k_B = 1.38\cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant, og T er absolutt temperatur, ca 300 K ved romtemperatur.
$\Rightarrow v_T = (3\ k_BT/m)^{1/2} \approx \underline{10^5\ \mathrm{m/s}}$.
Altså: Mens elektronenes termiske hastighet typisk er ganske stor, er deres driftshastighet langs strømlederen ofte svært liten. (Hvor lang tid tar det for et elektron å passere gjennom de to tilførselsledningene på tilsammen 0.6m?)