

Løsning øving 6

Oppgave 1.

a) Strømloven anvendt på knutepunktet der strømmen I_1 kommer inn:

$$-I_1 - I_3 + I_2 = 0 \quad (1)$$

(fortegnskonvensjon: positiv strømretning *ut av* et knutepunkt) Det andre knutepunktet, der I_1 går ut, gir samme ligning med motsatt fortegn, dvs *ikke* en ligning som er lineært uavhengig av (1). Vi må derfor bruke spenningsloven for å stable på bena ytterligere to ligninger. Spenningsfall med urviseren rundt sløyfa som går gjennom motstandene R_1 , R_3 og R_2 , og kildene E_1 og E_2 (vi kan f.eks. starte til venstre for R_1):

$$-E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_1 - E_1 + R_1 I_1 = 0 \quad (2)$$

Spenningsfall med urviseren rundt sløyfa som går gjennom motstandene R_1 , R_4 og R_2 , og kildene E_1 og E_3 (vi kan f.eks. starte til venstre for R_1):

$$-I_3 R_4 + E_3 + R_2 I_1 - E_1 + R_1 I_1 = 0 \quad (3)$$

Nå har vi 3 uavhengige ligninger, og det er tilstrekkelig for å bestemme de 3 ukjente strømmene I_1 , I_2 og I_3 . Vi kunne i tillegg ha brukt spenningsloven på sløyfa som går gjennom motstandene R_3 og R_4 og kildene E_2 og E_3 , men det ville ikke ha gitt oss noen ny informasjon, men en ligning som er en lineær kombinasjon av (2) og (3). Imidlertid kunne denne ligningen ha vært brukt *istedetfor* (2) eller (3).

Ligning (3) gir nå f.eks. I_3 uttrykt ved I_1 :

$$I_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_4} I_1 + \frac{1}{R_4} (E_3 - E_1) \quad (4)$$

mens ligning (2) gir I_2 uttrykt ved I_1 :

$$I_2 = -\frac{R_1 + R_2}{R_3} I_1 + \frac{1}{R_3} (E_2 + E_1) \quad (5)$$

Disse uttrykkene kan vi nå sette inn i ligning (1) og bestemme I_1 :

$$I_1 = -I_3 + I_2 = -\frac{R_1 + R_2}{R_4} I_1 - \frac{1}{R_4} (E_3 - E_1) + \frac{1}{R_3} (E_2 + E_1)$$

som gir:

$$I_1 = \left(1 + \frac{R_1 + R_2}{R_4} + \frac{R_1 + R_2}{R_3} \right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) E_1 + \frac{1}{R_3} E_2 - \frac{1}{R_4} E_3 \right) \quad (6)$$

Innsetting av tallverdier:

$$I_1 = (1 + 16/4 + 16/12)^{-1} (25/3 + 5/12 - 5/4) \text{ A} = \underline{45/38 \text{ A} \approx 1.18 \text{ A}}$$

Til slutt kan vi sette inn for I_1 i (5) og (4) og bestemme I_2 og I_3 :

$$I_2 = - (16/12)(45/38) + 30/12 = \underline{35/38 \text{ A} \approx 0.92 \text{ A}}$$

$$I_3 = (16/4)(45/38) - 20/4 = \underline{-10/38 \text{ A} \approx -0.26 \text{ A}}$$

Dette betyr at positiv strømretning blir slik som vi har valgt i figuren for I_1 og I_2 , men motsatt for I_3 . En sjekk på at vi har regnet riktig er at strømverdiene oppfyller strømloven, ligning (1).

b) Også her har vi tre ukjente strømstyrker, og på samme måte som i a) kan vi bruke Kirchhoffs strømlov på f.eks. knutepunktet øverst på midten og spenningsloven på to av de tre mulige lukkede sløyfene i kretsen, og slik få tre uavhengige ligninger som gjør oss i stand til å løse ut for strømmene I_1 , I_2 og I_3 .

Alternativt kan en ved å betrakte figuren se at kretsen i denne oppgaven er identisk med den i oppgave a) bare vi foretar følgende erstatninger i de ulike ligningene:

$$R_1 + R_2 \rightarrow R_{i1} + R_1$$

$$I_1 \rightarrow I_1$$

$$E_1 \rightarrow E_1$$

$$R_4 \rightarrow R_{i2} + R_2$$

$$I_3 \rightarrow I_2$$

$$E_3 \rightarrow E_2$$

$$R_3 \rightarrow R_{i3}$$

$$I_2 \rightarrow I_3$$

$$E_2 \rightarrow E_3$$

Dermed har vi for strømstyrkene:

$$I_1 = \left(1 + \frac{R_{i1} + R_1}{R_{i2} + R_2} + \frac{R_{i1} + R_1}{R_{i3}} \right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{R_{i3}} + \frac{1}{R_{i2} + R_2} \right) E_1 + \frac{1}{R_{i3}} E_3 - \frac{1}{R_{i2} + R_2} E_2 \right)$$

$$I_2 = \frac{R_{i1} + R_1}{R_{i2} + R_2} I_1 + \frac{1}{R_{i2} + R_2} (E_2 - E_1)$$

$$I_3 = -\frac{R_{i1} + R_1}{R_{i3}} I_1 + \frac{1}{R_{i3}} (E_3 + E_1)$$

Med oppgitte tallverdier får en:

$$I_1 = \underline{3A} \qquad I_2 = \underline{2A} \qquad I_3 = \underline{5A}$$

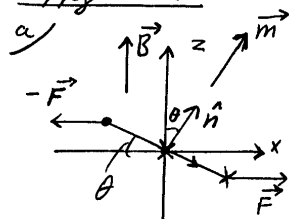
Her ble positiv strømretning som valgt i figuren for alle tre strømstyrkene.

Merk at R_1 og R_2 i alle uttrykk opptrer i kombinasjonen $(R_1 + R_2)$ i oppgave a). Det er nettopp hva vi har vist i forelesningene for seriekoblede motstander. Vi har helt tilsvarende kombinasjonene $R_{i1} + R_1$ og $R_{i2} + R_2$ i oppgave b).

Merk også at med alle spenningsverdier i V og motstandsverdier i Ω vil alle ledd i strømtrykkene få dimensjon A.

Oppgave 2. (Merk: Det er brukt symbolet μ for magnetisk moment i oppgaveteksten, og symbolet m i løsningsforslaget nedenfor.)

Oppgave 2.



Strømmene parallelt xz -planet vil gi 2 motsatt rettede krefter i y -retningen, og de vil ikke gi noe dreiemoment. Strømmene parallelt y -aksen vil gi kraftpar F og $-F$ som gir dreiemoment

$$\tau_y = F a (-\sin\theta)$$

Kraften på grunn av strøm i y -retningen:

$$\vec{F} = aI(\hat{e}_y \times \vec{B}) \quad \text{eller} \quad F_x = F = aIB_z$$

Så $\tau_y = aIB_z a(-\sin\theta) = -mB \sin\theta$ der $m = a^2 I = IA$

Med $\vec{m} = m\hat{n}$ blir dette på vektorform

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

b) Med N sløyfer blir det magnetiske momentet

$$m = N I a^2$$

Med $\vec{B} \perp \vec{m}$ ($\vec{B} \perp \hat{n}$, $\vec{m} = m\hat{n}$) blir dreiemoment

$$\tau = mB = N I a^2 B$$

Dette skal balansere dreiemomentet $\tau = -D\alpha$ fra fjæra.

slik at en finner

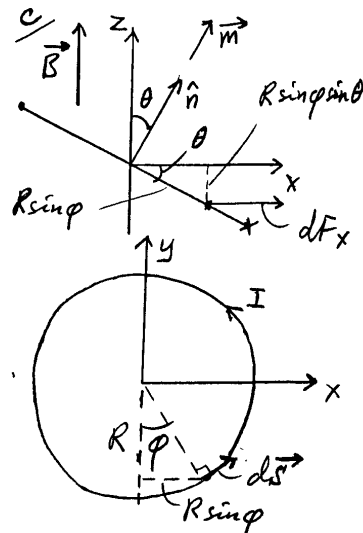
$$N I a^2 B = D\alpha$$

som gir strømfølsomheten

$$\frac{\alpha}{I} = \frac{N a^2 B}{D} = \frac{100 \cdot (0,02 \text{ m})^2 \cdot 10^{-3} \text{ T}}{1,0 \cdot 10^{-7} \text{ N m/rad}} = 400 \text{ rad/A}$$

$$= 0,4 \text{ rad/mA} = 23^\circ \text{ pr. mA}$$

$$(1 \text{ T} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}})$$



Krafta $d\vec{F}$ fra et element $d\vec{s}$ vil alltid ligge i xy -planet da $\vec{B}$ er normalt til dette.

$$d\vec{F} = I(d\vec{s} \times \vec{B})$$

y -komponenten dF_y vil ikke gi noe dreiemoment når en integrerer over ϕ . Bare dF_x vil bidra.

En har da

$$dF_x = I(ds_y B_z - B_y ds_z)$$

$$= I B_z ds_y$$

Bidrag til dreiemoment

$$d\tau_y = R \sin\theta \sin\phi dF_x$$

$$= R \sin\theta \sin\phi I B_z ds_y$$

Nå er $ds = R d\phi$. Dersom sløyfen ligger i xy -planet vil $ds_y = ds \sin\phi$. Ved å dreie sløyfen en vinkel θ om y -aksen vil ikke denne relasjonen endre seg.

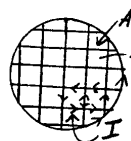
Altså $ds_y = R \sin\phi d\phi$

$$\text{eller} \quad d\tau_y = R \sin\theta \sin\phi I B_z R \sin\phi d\phi$$

$$= R^2 I B_z \sin\theta \sin^2\phi d\phi$$

$$\tau_y = R^2 I B_z \sin\theta \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = \frac{\pi R^2 I B_z \sin\theta}{2} \quad (\vec{m} = \pi R^2 I \hat{n})$$

$$\text{der } \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi) d\phi = \left[\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{4}\sin 2\phi \right]_0^{2\pi} = \pi$$



Alternativt kan sirkelflata A deles opp i kvadratiske dA_i strømsløyfer dA_i med magnetisk moment $d\vec{m}_i = dA_i \cdot I$. Ved summering vil alle indre strømmer kansellere og resulterende magnetisk moment for gjenværende strøm rundt periferen blir $\vec{m} = \sum d\vec{m}_i = I \sum dA_i = IA \Rightarrow \vec{\tau} = \sum d\vec{\tau}_i = \sum d\vec{m}_i \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$