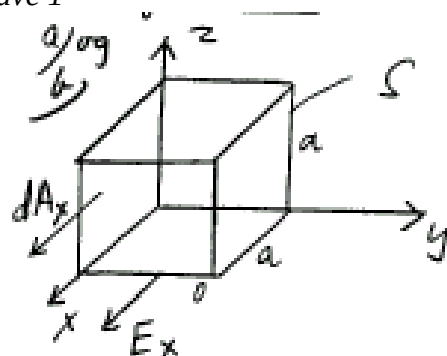


Løsning øving 7

Oppgave 1



lukket flate S omkring terning
slik at sideflatene har areal $A_i = a^2$
($i = x, y, z$)

i) $\vec{E} = E_x \hat{i} = C \hat{i}$ medfører

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_x(a) \cdot A_x - E_x(0) \cdot A_x = 0$$

Ladning ifølge Gauss lov: $Q = \epsilon_0 \Phi_E = 0$

ii) $\vec{E} = Cx \hat{i}$ medfører

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (E_x(a) - E_x(0)) A_x = (Ca - 0) A_x = Ca^3$$

Ladning: $Q = \epsilon_0 \Phi_E = \epsilon_0 Ca^3$

iii) $\vec{E} = Cx^2 \hat{i}$ medfører

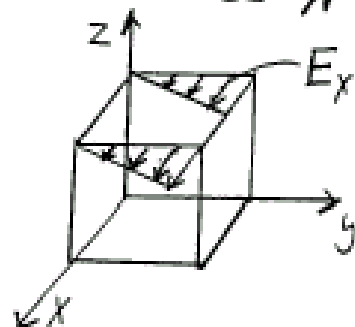
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (E_x(a) - E_x(0)) A_x = (Ca^2 - 0) A_x = Ca^4$$

Ladning: $Q = \epsilon_0 \Phi_E = \epsilon_0 Ca^4$

iv) $\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = Cy \hat{i} + Cx \hat{j}$

Her avhenger ikke E_x av x ($E_x(x, y, z) = Cy$). Da er det klart at fluks ut ved flaten $x=a$ er like fluks inn ved flaten $x=0$.
So netto fluks i "x-retningen" blir $\Phi_{x\text{-flate}} = 0$.

Tilsvarende gjelder for y-flatene, dvs. $\Phi_{y\text{-flate}} = 0$.

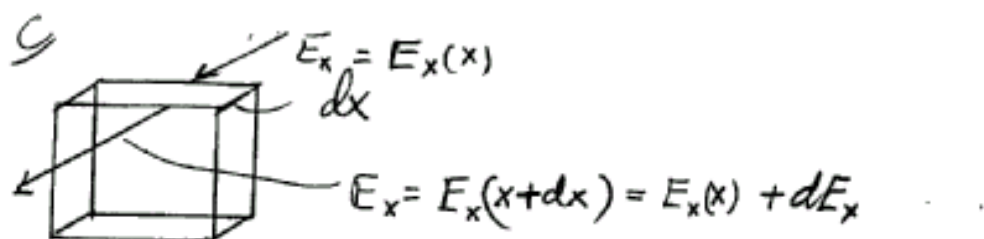


Total fluks er følgelig

$$\Phi_E = 0$$

og ladningen innenfor blir

$$Q = \epsilon_0 \Phi_E = 0$$



$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + \dots = \frac{\partial}{\partial x}(Cx^2) dx = 2Cx dx$$

(Evt. $E_x(x+dx) = C(x+dx)^2 = (x^2 + 2Cxdx + Cdx^2)$
 der Cdx^2 beddet ikke vil bidra i grensen $dx \rightarrow 0$.)

Gauss lov gir så:

$$d\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (E_x(x+dx) - E_x(x))A_x = A dE_x = A \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

$$\text{Ladning: } dQ = \epsilon_0 d\Phi_E = \epsilon_0 A dE_x$$

Ladningsstettheten ($dV = a^2 dx = A dx$)

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{\epsilon_0 A dE_x}{A dx} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = \underline{\underline{2\epsilon Cx}}$$

Gauss lov i differensialform gir:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

dvs. samme svar.

Oppgave 2.

a) lar Gaussflaten være kuleflaten ved jordoverflaten, $z=0$. $\vec{E}$ er rettet inn i jordoverflaten da E_z er negativ. $E_z = -(90+40) \text{ V/m} = -130 \text{ V/m}$ for $z=0$ ($1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C}$)
 Gauss lov gir så ($\vec{E} \parallel d\vec{A}$, $4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$)

$$Q_j = \epsilon_0 \int \vec{E} d\vec{A} = \epsilon_0 E_z \cdot 4\pi R^2 = \frac{-130 \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2}{9 \cdot 10^9} \text{ C}$$

$$= -5.9 \cdot 10^5 \text{ C}$$

b) Her er det enklast å bruke Gauss lov på differensialform. Ladingstettheten blir

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z} =$$

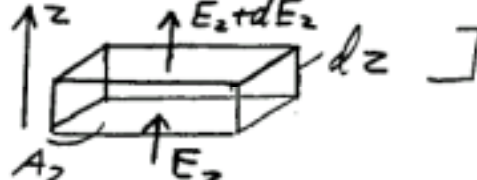
$$\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} (-90 \cdot e^{-z/z_1} - 40 \cdot e^{-z/z_2}) \text{ V/m} = \epsilon_0 \left(\frac{90}{z_1} e^{-z/z_1} + \frac{40}{z_2} e^{-z/z_2} \right) \text{ N/C}$$

Innsatt for z_1 og z_2 med $z=0$ gir dette:

$$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{90}{z_1} + \frac{40}{z_2} \right) \text{ N/C} = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \left(\frac{90}{0.29 \cdot 10^3} + \frac{40}{4.2 \cdot 10^3} \right) \text{ C/m}^3 = 2.8 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^3$$

(Dvs. $\frac{2.8 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^3}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 1.8 \cdot 10^7 \text{ m}^{-3} = 18 \text{ cm}^{-3}$ (elementarladninger pr. cm^3).

[Kan også benytte $dQ = \epsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{A} = \epsilon_0 (E_z + dE_z - E_z) A_z = \epsilon_0 A_z dE_z$

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{\epsilon_0 A_z dE_z}{A_z dz} = \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z}$$


c) I stor høyde forsvinner E (f.eks. $|E| = 9.4 \text{ V/m}$ for $z = 20 \text{ km}$)
 Fluksen langt ute ($z \rightarrow \infty$) blir derfor lik 0. Total lading innenfor blir derfor

$$Q_{\text{tot}} = Q_j + Q_a = \epsilon_0 \oint \vec{E} = 0$$

$$Q_a = -Q_j = 5.9 \cdot 10^5 \text{ C}$$

$$d) V(z) = - \int_{\infty}^z \vec{E} d\vec{s} = \int_{\infty}^z (90 e^{-z/z_1} + 40 e^{-z/z_2}) \frac{N/C}{C} dz =$$

$$\frac{-(90 z_1 e^{-z/z_1} + 40 z_2 e^{-z/z_2}) N/C}{C}$$

Potensialet ved jordoverflata blir følgende

$$V(0) = -198,1 \cdot 10^3 \frac{Nm}{C} = \underline{\underline{-0,20 MV}}$$

[med $d\vec{s} = -\hat{k} dz$, $\cos \pi = -1$,
 evt. $-\int_{\infty}^B \vec{E} d\vec{s} = \int_B^A \vec{E} d\vec{s}$
 og $d\vec{s} = \hat{k} dz$, $\cos 0 = 1$]

e) $V(z) = \frac{1}{2} V(0) = -99,1 \text{ kV}$ krever numerisk løsning. Med $z_2 \gg z$, kan en anta at første ledd er lite. Dette gir likningen

$$-40 z_2 e^{-z/z_2} = -99,1 \text{ kV} \Rightarrow z = -z_2 \ln\left(\frac{99,1 \text{ kV}}{40 z_2}\right) = \underline{\underline{2,4 \text{ km}}}$$

[Kontroll av 1. ledd: $90 z_1 e^{-z/z_1} = 7 \text{ V} \ll 99 \text{ kV}$.]

f) Elektrisk felt rundt kule: $E_r = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$

Potensialet: $V = - \int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{s} = - \int_{\infty}^r E dr = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$

Ved jordoverflata ($r = R_j$): $V_0 = \frac{-590 \text{ kC}}{\frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \frac{Nm^2}{C^2}} \frac{1}{6,4 \cdot 10^6 \text{ m}} = \underline{\underline{-0,83 \text{ GV}}}$

Potensialet har falt til det halve når

$$V_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} V_0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{V_{\frac{1}{2}}}{V_0} = \frac{R_j}{R_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow R_{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2R_j}}$$

Høyde $z_{\frac{1}{2}} = R_{\frac{1}{2}} - R_j = R_j = \underline{\underline{6400 \text{ km}}}$

Modellen er dårlig for jordens potensial og forholdene i atmosfæren. De elektriske ladningene i atmosfæren skjermer nettoledningen til jordkloden.