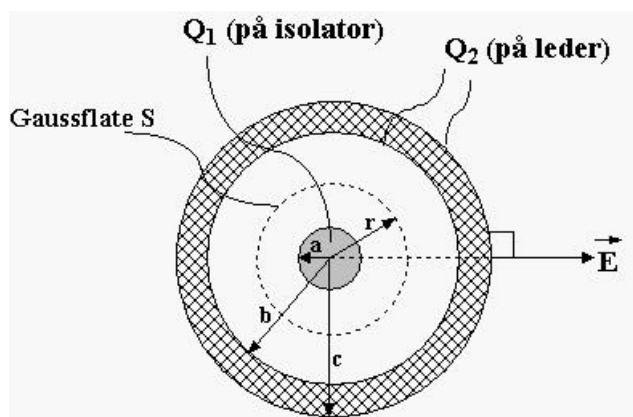


Løsning øving 8

Oppgave 1.



a) Her kan vi benytte Gauss lov. På grunn av kulesymmetri finner en med kuleflata S som Gaussflate (radius r):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

der Q er ladningen innenfor radien r. Denne sammenhengen mellom E, radien r, og ladningen Q innenfor r gjelder nå for vilkårlig radius r. (Det bruker vi også i oppg. b og c.) Med $r = 15\text{cm}$ blir $Q = Q_1$ slik at

$$Q_1 = 4\pi \epsilon_0 r^2 E = \underline{-2.8\text{ nC}}$$

Med $r = 40\text{cm}$ blir $Q = Q_2 + Q_1$ slik at

$$Q_2 = Q - Q_1 = 4\pi \epsilon_0 r^2 E - Q_1 = \underline{9.9\text{ nC}}$$

b) For $r < a$ trenger vi å bestemme ladningen innenfor radien r. Med homogen (dvs jevn) fordeling i kulevolumet må forholdet mellom ladningen Q innenfor r og ladningen Q_1 i hele kula bli det samme som forholdet mellom volumet innenfor r, $\frac{4\pi r^3}{3}$, og volumet av hele kula, $\frac{4\pi a^3}{3}$. Altså:

$$Q = Q_1 \frac{r^3}{a^3}$$

slik at

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 a^2} \left(\frac{r}{a} \right)$$

(Dvs: Samme form som tyngdekraften under jordoverflaten!)

For $a < r < b$ er $Q = Q_1$. Dermed:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

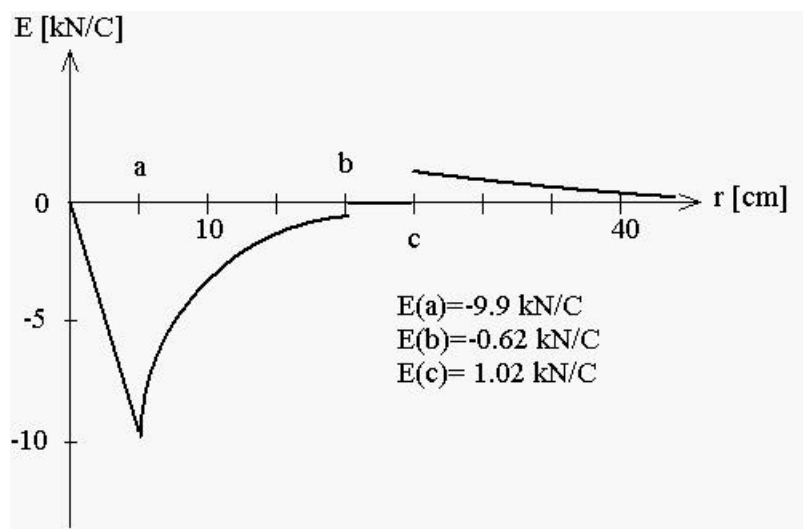
(Dvs: Som tyngdekraften over jordoverflaten!)

For $b < r < c$ er $E=0$ ettersom det elektriske feltet alltid er null inne i en leder.

For $r > c$ er $Q = Q_{total} = Q_1 + Q_2 = 7.1 \text{ nC}$, og

$$E = \frac{Q_{total}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dette skulle gi omtrent følgende r-avhengighet på det elektriske feltet:



c) Inne i lederen er $E = 0$. Med Gaussflaten S inne i lederen har vi da:

$$Q = Q_b + Q_1 = 4\pi\epsilon_0 r^2 E = 0$$

slik at total ladning på innersiden av lederen er

$$Q_b = 0 - Q_1 = \underline{2.8 \text{ nC}}$$

Med en ladning Q_1 innenfor lederskallet induseres det altså en like stor ladning på innsiden av lederen, men med motsatt fortegn. Flateladningstettheten på innsiden av lederen blir (indre areal $= 4\pi b^2$):

$$s(b) = \frac{Q_b}{4\pi b^2} = \underline{5.5 \text{ nC/m}^2}$$

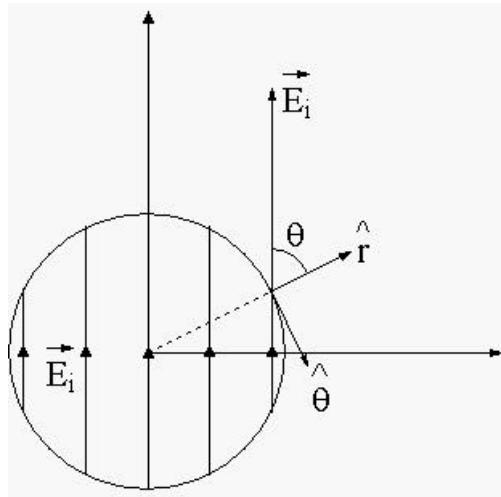
Ladningen på yttersiden av lederen må nå være $Q_c = Q_{total} = 7.1 \text{ nC}$ (som funnet ovenfor), ettersom det er null netto ladning innenfor $r = c$. Dette gir (med ytre areal $= 4\pi c^2$)

$$s(c) = \frac{Q_{total}}{4\pi c^2} = \underline{9.1 \text{ nC/m}^2}$$

Merk: Ved lederens to overflater har en som ventet $|\mathbf{E}| = Q/4\pi\epsilon_0 r^2 = \sigma/\epsilon_0$ med $\sigma = \sigma(b)$ eller $\sigma = \sigma(c)$. (Jfr generelt resultat $E = \sigma/\epsilon_0$ på metalloverflate, som vi har vist i forelesningene.)

Oppgave 2

La oss bruke indekser i og u for å angi hhv innenfor og utenfor kulas overflate, samt indekser n og t for å angi hhv normal- og tangentialkomponent av $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ og $\mathbf{P}$.



a) Dekomponering av det elektriske feltet inne i kula:

$$\vec{E}_i = E_{in} \hat{r} + E_{it} \hat{q}$$

der

$$\begin{aligned} E_{in} &= E_r = E_i \cos q \\ E_{it} &= E_q = -E_i \sin q \end{aligned}$$

Dette er altså det elektriske feltet overalt inne i kula, og dermed også umiddelbart innenfor overflaten. På overflaten av kula, men umiddelbart *utenfor* denne, har en

$$\vec{E} = E_{un} \hat{r} + E_{ut} \hat{q}$$

Nå kan vi bruke grenseflatebetingelsene som vi har utledet i forelesningene, for tangentialkomponenten E_t av det elektriske feltet og normalkomponenten D_n av den elektriske forskyvningen, når vi krysser en grenseflate mellom to medier.

Kontinuerlig E_t gir:

$$E_{ut} = E_{it} = -E_i \sin q$$

Her har vi ingen *fri* overflateladning. Da skal D_n også være kontinuert i overflaten. Utenfor kula har vi $D_{un} = \epsilon_0 E_{un}$ (luft, $\epsilon_r = 1$). Inne i kula har vi $D_{in} = \epsilon_r \epsilon_0 E_{in}$. Kontinuerlig D_n i overflaten gir dermed:

$$\epsilon_r \epsilon_0 E_{in} = \epsilon_0 E_{un} \quad \text{eller:} \quad E_{un} = \epsilon_r E_{in} = \underline{\epsilon_r E_i \cos q}$$

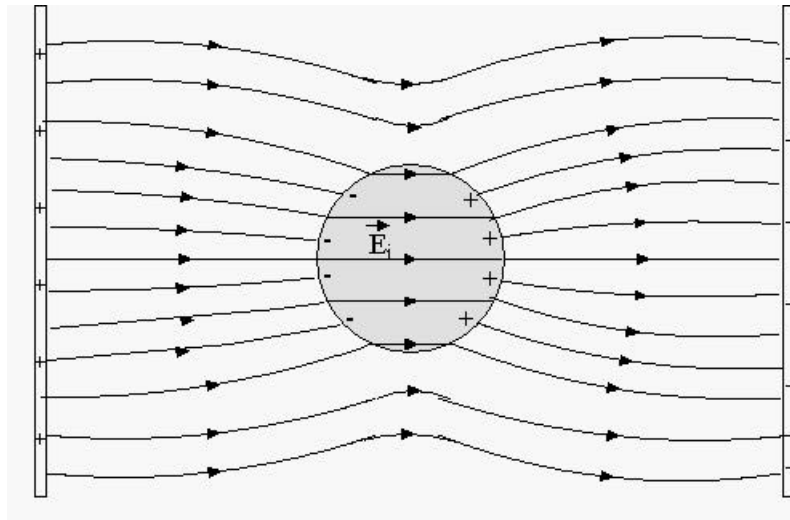
Alt i alt har vi derfor for det elektriske feltet "på" (dvs: rett utenfor) kulas overflate:

$$\vec{E} = e_r E_i \cos q \hat{r} - E_i \sin q \hat{q}$$

b) Bundet overflateladningstetthet σ_B er bestemt av normalkomponenten av polariseringen ved overflaten, evt. *endringen* av denne, dersom vi betrakter en grenseflate mellom to dielektriske medier. Her har vi luft på utsiden, med null polarisering, slik at:

$$s_B = \Delta P_n = P_{in} = D_{in} - e_0 E_{in} = (e_r - 1)e_0 E_{in} = \underline{(e_r - 1)e_0 E_i \cos q}$$

c) Grov skisse av det elektriske feltet:



Merk at det dielektriske mediet tiltrekker seg de ytre feltlinjene. På overflaten ved $\theta \approx 0$ får vi nå $E \approx 2E_i$, altså dobbelt så sterkt felt på utsiden som på innsiden. Ved $\theta \approx \pi/2$ derimot har vi $E \approx E_i$, ettersom det her ikke er induert noe overflateladning på kula. Pluss og minus i kula angir induert overflateladning, og nær $\theta = 0$ vil, med $\epsilon_r = 2$, halvparten av feltlinjene ende opp på (-) eller begynne fra (+) disse overflateladningene.

Hvis kula hadde vært av metall, ville vi hatt $\vec{E}_i = 0$ inne i kula, og ytre feltlinjer ville overalt stå normalt på kuleflaten. Et metall kan ses på som et dielektrikum med $\epsilon_r \rightarrow \infty$. Vi ser at uttrykket for E-feltet rett utenfor kuleflata (oppg. a) er konsistent med dette, ettersom den radielle komponenten av E kan bli forskjellig fra null i grensene $E_i \rightarrow 0$ og $\epsilon_r \rightarrow \infty$, mens tangentialkomponenten forsvinner når $E_i \rightarrow 0$.

Dette problemet, "dielektrisk kule i ytre homogent felt E_0 ", kan løses eksakt. Løsning av ligningen $\nabla^2 V = 0$ [= Laplaces ligning, som fås ved å kombinere de to ligningene $\vec{E} = -\nabla V, \nabla \cdot \vec{E} = 0$, der den siste er Gauss lov på differensialform for områder uten netto elektrisk ladning] med grensebetingelser for tangentiell E og normal D gir (med $r = 0$ i kulas sentrum og $\theta = 0$ i retning langs E_0):

$$V(r, q) = -\left(\frac{3}{e_r + 2}\right) E_0 r \cos q \quad \text{for } r < R \quad \text{og}$$

$$V(r, q) = -E_0 r \cos q + \left(\frac{e_r - 1}{e_r + 2}\right) E_0 \left(\frac{R^3}{r^2}\right) \cos q \quad \text{for } r > R.$$

Du kan jo sjekke at disse uttrykkene for $V(r, \theta)$ er konsistente, for det første med antagelsen om at det elektriske feltet inne i kula er konstant og rettet langs $\mathbf{E}_0$, og for det andre med resultatet funnet i oppg. a for det elektriske feltet umiddelbart utenfor kulas overflate. (Gradientoperatoren i polarkoordinater er:

$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$). Hvis du regner riktig, finner du bl.a. at $E_i = E_0 \frac{3}{\epsilon_r + 2}$, som betyr at feltet inne i

kula er mindre enn det eksterne feltet E_0 dersom $\epsilon_r > 1$. Og det er jo akkurat som forventet: Den dielektriske kula polariseres i det påtrykte elektriske feltet, og den induerte overflateladningen gir opphav til et motsatt rettet felt som reduserer det totale feltet inne i kula:

