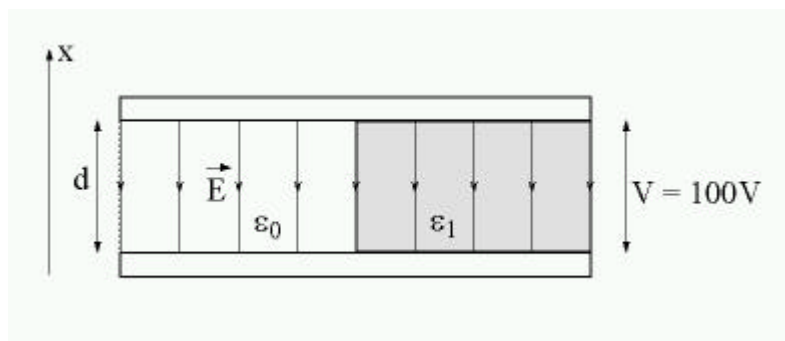


Løsning øving 9

Oppgave 1.

a) Som tidligere funnet må den elektriske feltstyrken mellom platene være konstant. (Vi ser bort fra randeffekter, dvs vi antar uendelig store plater.) I og med at spenningsforskjellen V og avstanden d er konstant, vil feltstyrken $\vec{E}$ være uavhengig av dielektrikumet mellom platene. Altså (med positiv x -retning oppover):

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} = -\frac{\Delta V}{\Delta x} \hat{x} = -\frac{V}{d} \hat{x} = -\frac{100\text{V}}{2\text{mm}} \hat{x} = \underline{-50 \hat{x} \text{ kV/m}}$$

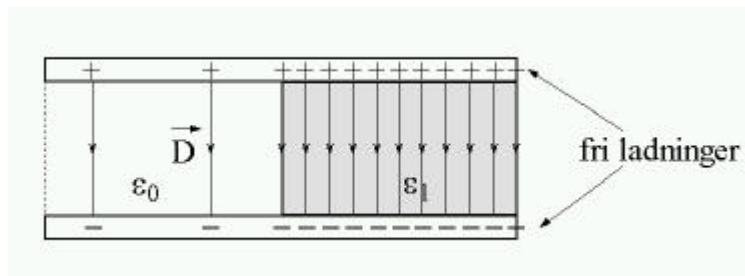


b)

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

$$D_{0x} = \epsilon_0 E_x = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}} \left(-50 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) = \underline{-0.44 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}}$$

$$D_{1x} = \epsilon_{r1} \epsilon_0 E_x = 4.9 D_{0x} = \underline{-2.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}}$$

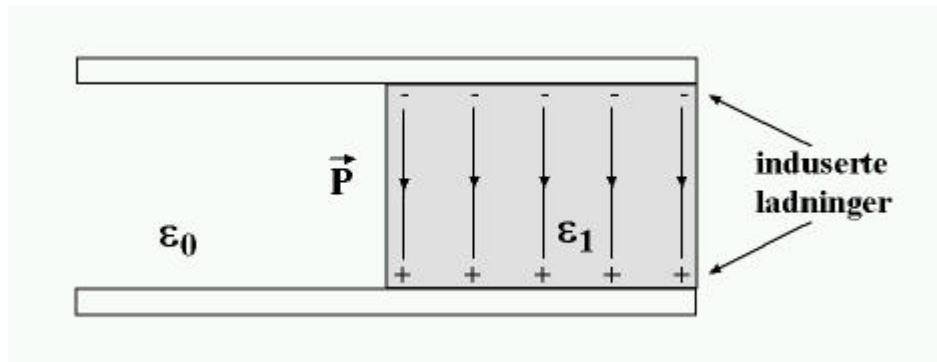


c) Fra $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ finner en:

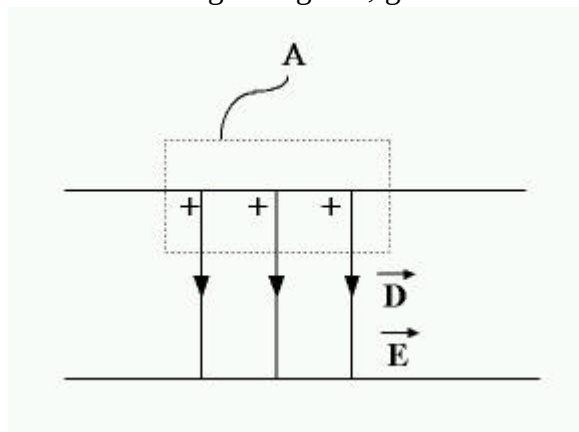
$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}$$

$$P_{0x} = (1-1) \epsilon_0 E_x = \underline{0}$$

$$P_{1x} = (4.9-1) \epsilon_0 E_x = 3.9 D_{0x} = \underline{-1.7 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}}$$



d) Bruk av Gauss lov, med Gaussflate som angitt i figuren, gir:



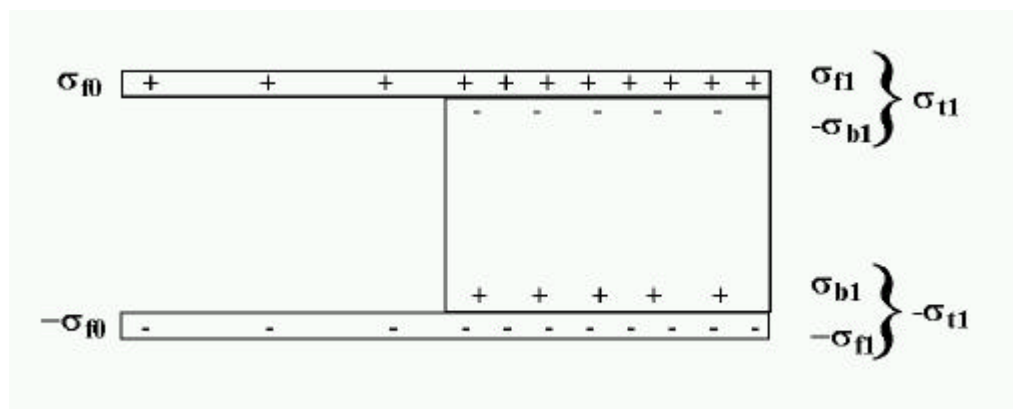
$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot A = Q_{in, fri} = A \cdot \sigma_f$$

Dermed blir fri flateladningstetthet: $\sigma_f = \underline{D}$

For vakuum gjelder:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E \cdot A = Q_{in, tot} = A \cdot \sigma_t$$

Dermed blir *total* (netto) flateladningstetthet: $\sigma_t = \underline{\epsilon_0 E}$



De fri ladningene blir:

$$s_{f0} = D_0 = |D_{0x}| = 0.44 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$s_{f1} = D_1 = |D_{1x}| = 2.2 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

Total ladning blir:

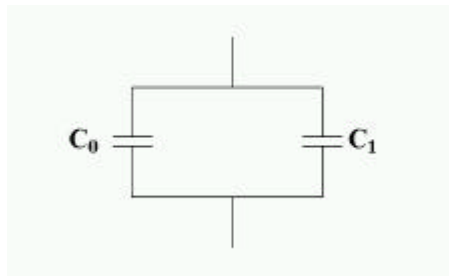
$$s_{t0} = s_{t1} = e_0 |E_x| = |D_{0x}|$$

Bundne ladninger blir dermed (ettersom $\sigma_t = \sigma_f - \sigma_b$, der alle σ -størrelser er definert som *positive*, dvs absoluttverdier):

$$s_{b0} = 0$$

$$s_{b1} = s_{f1} - s_{t1} = |D_{1x}| - |D_{0x}| = (e_r - 1)D_{0x} = 1.7 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

e)



Dette systemet kan betraktes som en parallellkobling av to kapasitanser, den ene med luft mellom kondensatorplatene og den andre med dielektrikumet mellom platene, og hver av dem med areal $A/2$. Har da:

$$C_0 = e_0 \frac{A/2}{d}$$

$$C_1 = e_{r1} e_0 \frac{A/2}{d}$$

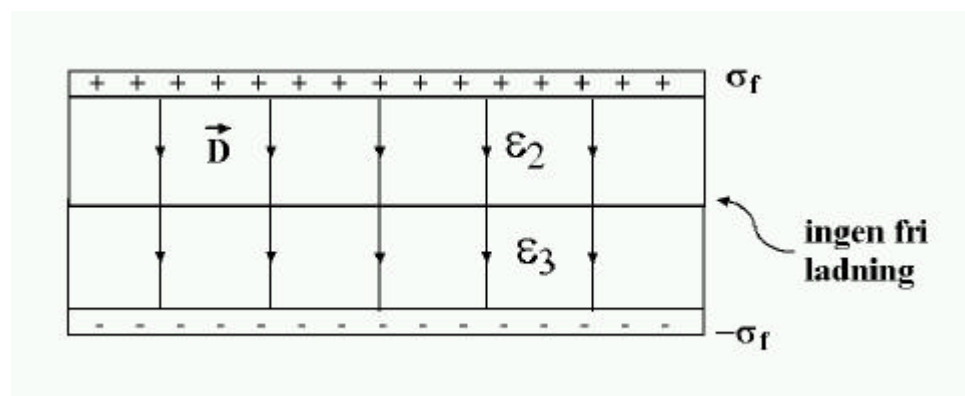
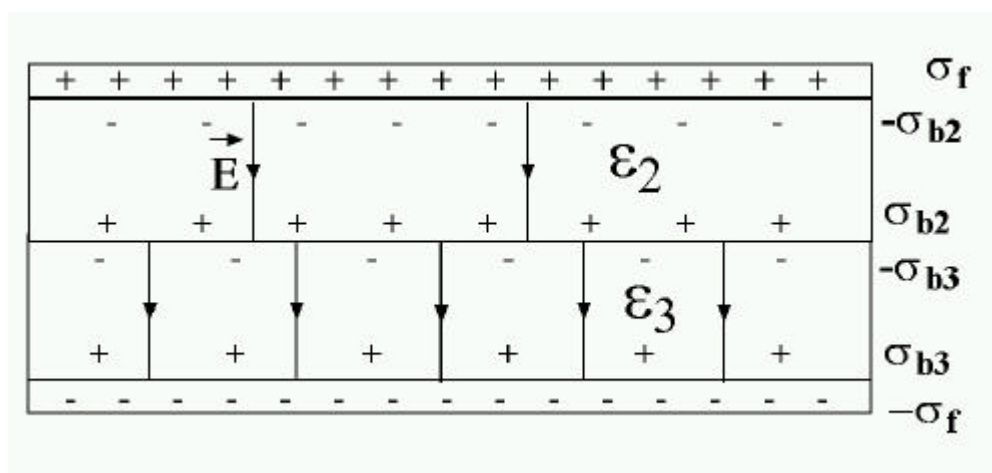
som gir (merk at ϵ_0 har dimensjon $[\text{C d} / \text{A}] = \text{F m} / \text{m}^2 = \text{F/m}$):

$$C = C_0 + C_1 = \frac{1+e_{r1}}{2} e_0 \frac{A}{d} = \frac{1+4.9}{2} 8.85 \frac{\text{pF}}{\text{m}} \frac{10^{-4} \text{m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{m}} = \underline{1.3 \text{ pF}}$$

Det er kanskje verdt å utdype et par ting i forbindelse med denne oppgaven: Det elektriske potensialet V på de to lederplatene er bestemt av den ytre spenningskilden. Det betyr at uansett hva slags kombinasjoner av dielektriske medier vi putter inn mellom de to platene, vil de frie ladningene i lederplatene sørge for å plassere seg slik at potensialet blir det samme på alle steder i en bestemt plate. La oss tenke oss at vi startet med bare luft mellom platene. Da ville vi ha en homogen tetthet av frie ladninger på platene. Når vi så fyller halve rommet mellom platene med en polariserbar isolator, vil det induseres hhv en negativ og positiv ladning i øvre og nedre grenseflate av isolatoren, på grunn av innretting av isolatorens elektriske dipoler i det elektriske feltet mellom platene. Hvis nå ingenting skjedd med de frie ladningene i platene, ville vi få et redusert elektrisk felt gjennom dielektrikumet, og

følgelig en redusert potensialforskjell mellom platene i høyre halvdel. For å opprettholde samme potensial overalt på en gitt plate, må spenningskilden derfor sørge for å tilføre ekstra ladning til platenes høyre halvdel, og i en slik mengde at summen av fri ladning og induert ladning på høyre side blir lik den frie ladingen på venstre side (hvor vi ikke har noen induert ladning). Resultatet blir dermed at det elektriske feltet $\mathbf{E}$ forblir konstant mellom platene, mens den elektriske forskyvningen $\mathbf{D}$ blir større i det dielektriske mediet, på grunn av polariseringen $\mathbf{P}$. En må forvente at spenningskilden ikke vil tilføre denne ekstra ladingsmengden aldeles "gratis", og det stemmer: Med bare luft mellom platene ville total energi lagret i kondensatoren ha vært (se forelesningene, 25.11) $U_0 = 2 \cdot (1/2) C_0 V^2 = C_0 V^2 = 2.2 \cdot 10^{-9} \text{ J}$, mens vi nå har $U = (1/2) C_0 V^2 + (1/2) C_1 V^2 = 6.5 \cdot 10^{-9} \text{ J}$. [Alternativt kan energien beregnes ved å ta utgangspunkt i energitettheten $u_E = (1/2) \epsilon E^2$, som gir $U = (1/2) A d (1/2) \epsilon_0 E^2 + (1/2) A d (1/2) \epsilon_1 E^2 = (1/4) A d \epsilon_0 E^2 (1 + \epsilon_{r1}) = 0.25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} (\text{C/Vm}) \cdot (50 \cdot 10^3)^2 (\text{V}^2/\text{m}^2) \cdot (1 + 4.9) = 6.5 \cdot 10^{-9} \text{ J}$.]

Oppgave 2



Det er umiddelbart klart at $D_2 = D_3 = \sigma_f$ (= fri flateladningstetthet på metallplatene). Vi kan finne en sammenheng mellom potensialforskjellen V og σ_f :

$$V = E_2 \frac{d}{2} + E_3 \frac{d}{2} = \left(\frac{D_2}{\epsilon_{r2} \epsilon_0} + \frac{D_3}{\epsilon_{r3} \epsilon_0} \right) \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \right) \frac{\sigma_f d}{\epsilon_0}$$

Dette gir for σ_f :

$$\sigma_f = \left(\frac{1}{\epsilon_{r2}} + \frac{1}{\epsilon_{r3}} \right)^{-1} 2 \epsilon_0 \frac{V}{d} = 1.35 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$$

Da er det lett å regne ut forskyvningen D og det elektriske feltet E i de to mediene:

$$D_{2x} = D_{3x} = -s_f = -1.35 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$$

$$E_{2x} = \frac{D_{2x}}{\epsilon_{r2}\epsilon_0} = -27 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$E_{3x} = \frac{D_{3x}}{\epsilon_{r3}\epsilon_0} = -73 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

Polariseringen $\mathbf{P}$ finner vi deretter fra sammenhengen $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$:

$$P_{2x} = (\epsilon_{r2} - 1)\epsilon_0 E_{2x} = -1.1 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$$

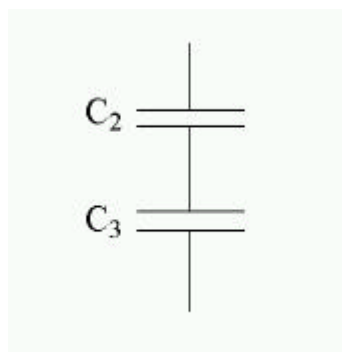
$$P_{3x} = (\epsilon_{r3} - 1)\epsilon_0 E_{3x} = -0.71 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$$

Bunden flateladningstetthet σ_b får vi fra $\sigma_b = \sigma_f - \sigma_t = D - \epsilon_0 E = P$ (igjen med alle σ -størrelser definert som *positive*, som i oppgave 1):

$$s_{b2} = |P_{2x}| = 1.1 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$$

$$s_{b3} = |P_{3x}| = 0.71 \frac{\text{mC}}{\text{m}^2}$$

[Med *positiv* (fri) ladning på øvre plate og *negativ* ladning på nedre plate, er det åpenbart at vi får induert en *negativ* bunden ladning $-\sigma_{b2}$ i øvre grenseflate av medium 2, en *positiv* bunden ladning σ_{b3} i nedre grenseflate av medium 3, og dermed *positiv* ladning σ_{b2} i nedre grenseflate av medium 2 og *negativ* ladning $-\sigma_{b3}$ i øvre grenseflate av medium 3. Husk at mediene mellom platene er nøytrale, så induert ladning i den ene overflaten må gjenfinnes med motsatt fortegn i den andre overflaten av et gitt medium. Videre har vi at graden av polarisering er uttrykt gjennom verdien på den relative permittiviteten. Det er derfor rimelig at P_{2x} blir større enn P_{3x} . Dermed blir det elektriske feltet tilsvarende sterkere i medium 3 enn i medium 2.]



Total kapasitans C blir som for to kondensatorer i serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

med

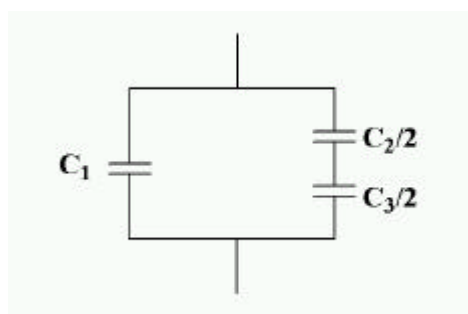
$$C_2 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 \frac{A}{d/2} \text{ og } C_3 = \epsilon_{r3} \epsilon_0 \frac{A}{d/2}$$

Dermed :

$$C = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{2\epsilon_{r2} \epsilon_{r3}}{\epsilon_{r2} + \epsilon_{r3}} \epsilon_0 \frac{A}{d} = \underline{1.4 \text{ pF}}$$

Oppgave 3

Total kapasitans blir som for følgende oppkobling:



Altså, C_1 parallellkoblet med en seriekobling av $C_2/2$ og $C_3/2$ (med faktorer $\frac{1}{2}$ pga halvt areal i forhold til oppgave 2):

$$C = C_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \right) = \underline{1.8 \text{ pF}}$$

Alternativt kunne vi ha brukt σ_{f1} og σ_f fra hhv oppgave 1 og 2 og beregnet total fri ladning:

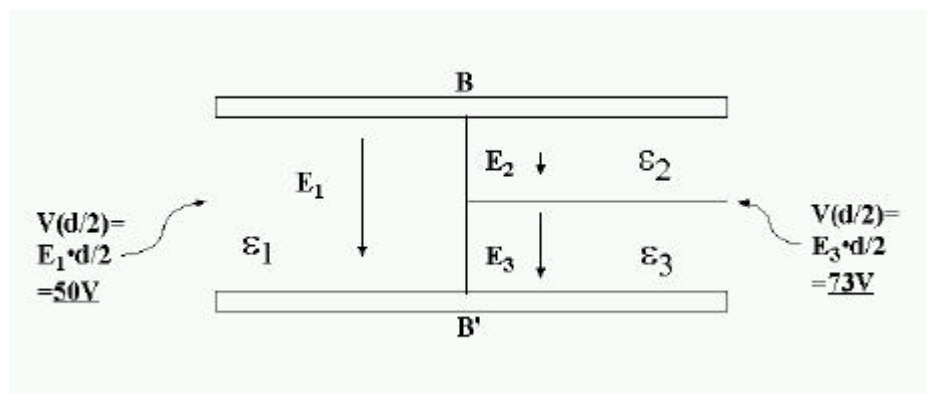
$$Q = \frac{1}{2} A \sigma_{f1} + \frac{1}{2} A \sigma_f = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot (1.35 + 2.2) \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2 = 178 \text{ pC}, \text{ som gir kapasitansen}$$

$$C = Q/V = 178 \text{ pC} / 100 \text{ V} \approx \underline{1.8 \text{ pF}}.$$

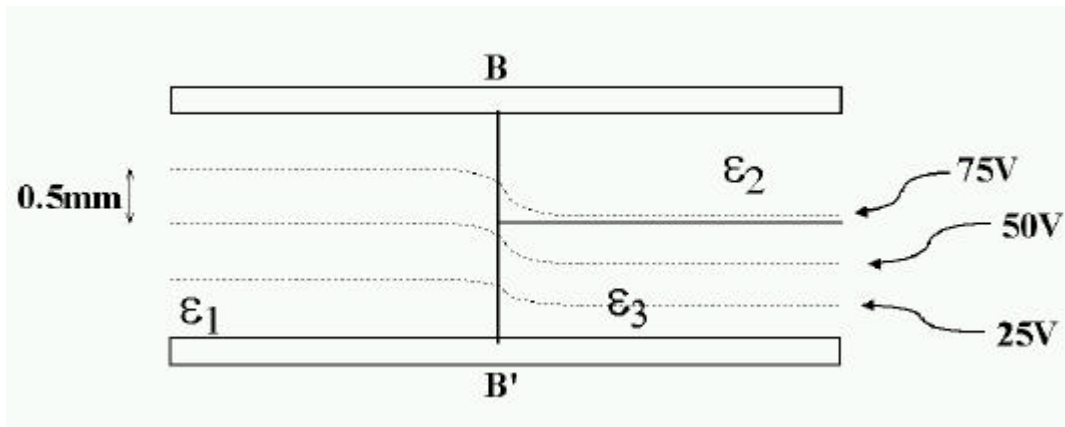
Hvis vi først regner ut potensialet midt mellom øvre og nedre plate, både "et stykke" til venstre og til høyre for midtlinjen BB', finner vi (med $V=100\text{V}$ på øvre plate og $V=0\text{V}$ på nedre plate)

$$V_v(d/2) = E_1 \cdot d/2 = 50 \text{ kV/m} \cdot 0.001 \text{ m} = 50 \text{ V til venstre, og}$$

$$V_h(d/2) = E_3 \cdot d/2 = 73 \text{ kV/m} \cdot 0.001 \text{ m} = 73 \text{ V til høyre.}$$



Det er da f.eks. klart at ekvipotensialflaten for 50V må ligge et stykke nedenfor midten i høyre del av kondensatoren. Følgelig må ekvipotensialflatene for 25, 50 og 75V bli seende omtrent slik ut:



Til venstre har vi et potensial på 25, 50 og 75V (i forhold til nedre plate) i avstand hhv 0.5, 1.0 og 1.5 mm fra nedre plate. Til høyre blir x-posisjonen til potensialnivåene 25 og 50 V bestemt av

$V = E_3 \cdot x$, dvs:

$$x(25V) = 25V / (73kV/m) = \underline{0.34 \text{ mm}}$$

$$x(50V) = 50V / (73kV/m) = \underline{0.68 \text{ mm}}$$

(begge målt fra nedre plate) mens 75V-nivået blir liggende like over grenseflaten mellom medium 2 og 3, så målt i avstand fra øvre plate: $x'(75V) = (100V - 75V) / (27kV/m) = 0.93 \text{ mm}$. Dermed, målt i avstand fra nedre plate:

$$x(75V) = \underline{1.07 \text{ mm}}$$

Av formen på de skisserte ekvipotensialflatene ser vi at det elektriske feltet må ha en horisontal komponent når vi er i nærheten av midtlinjen BB', ettersom $\mathbf{E} = -\nabla V$ står normalt på ekvipotensialflatene. Dette er da også helt rimelig, hvis vi tenker på betingelsen (utledet på forelesning) at når en grenseflate krysses, skal tangentialkomponenten av det elektriske feltet, E_t , være kontinuerlig. Hvis $\mathbf{E}$ -feltet *ikke* hadde hatt en horisontal komponent, dvs en komponent normalt på delelinjen BB', hadde vi til venstre for BB' hatt tangentialkomponenten $E_t = E_{1x}$, og til høyre for BB' enten $E_t = E_{2x}$ (øverste halvdel) eller $E_t = E_{3x}$ (nederste halvdel). Men det ville stride mot kontinuerlig E_t , ettersom E_{1x} er forskjellig fra både E_{2x} og E_{3x} !

Det er antagelig (?) ikke mulig å finne en enkel analytisk løsning for hele dette problemet, dvs enkle matematiske uttrykk som også beskriver "overgangssonen" i nærheten av BB'. I alle tilfelle ville løsningen være bestemt av: $\text{div } \mathbf{D} = 0$ (ingen frie ladninger noe sted i området mellom metallplatene!), $\mathbf{D} = \epsilon_t \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla V$, samt de ulike grensebetingelsene for potensialet V .