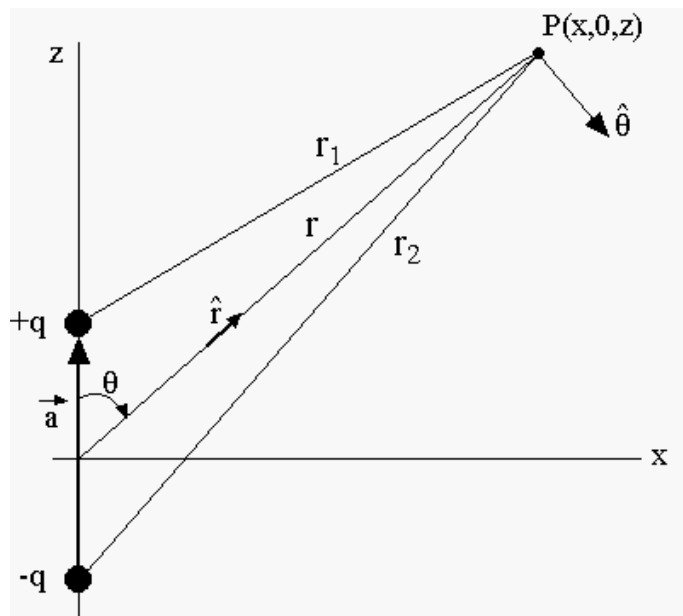


Øving 3

Veiledning: Onsdag 12. september  
 Innleveringsfrist: Fredag 14. september kl 15.00

Oppgave 1: Elektrisk dipol



En elektrisk dipol er plassert langs z-aksen som vist i figuren. Det elektriske dipolmomentet er definert som  $\vec{p} = q\vec{a}$ , der  $\vec{a}$  = vektor fra  $-q$  til  $+q$ . I denne konfigurasjonen er det hensiktsmessig å velge kulekoordinater  $(r, \theta, \phi)$ , slik at potensialet  $V$  og feltet  $\vec{E}$  angis som funksjoner av avstanden  $r$  fra origo og vinkelen  $\theta$  mellom  $\vec{r}$  og aksene gjennom dipolen (se figuren).  $V$  og  $\vec{E}$  er begge uavhengig av  $\phi$  pga symmetri omkring z-aksen.

- a) Vis at i stor avstand fra dipolen ( $r \gg a$ ) er potensialet gitt ved

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

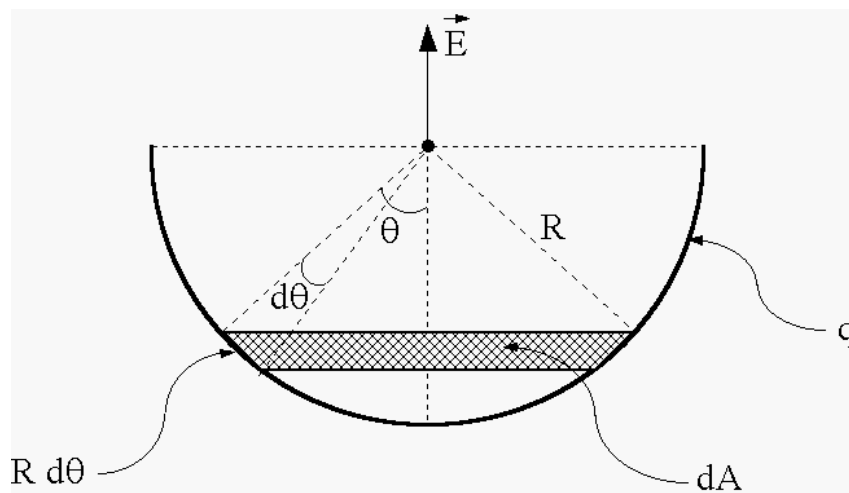
- b) Finn det elektriske feltet  $\vec{E}(r, \theta) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$  i stor avstand fra dipolen uttrykt i kulekoordinater. Gradienten i kulekoordinater er gitt ved

$$\nabla V = \hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Er resultatet rimelig for  $\theta = 0$  og for  $\theta = \pi/2$ ? Enn for  $r = 0$ ?

- c) Finn det elektriske feltet  $\vec{E}(x, z)$  uttrykt i kartesiske koordinater for  $r \gg a$ . Tips: Ta utgangspunkt i uttrykkene for  $E_r$  og  $E_\theta$  i punkt b). Ved hjelp av en figur kan du finne sammenhengen mellom  $(x, z)$  og  $(r, \theta)$ , samt  $E_x$  og  $E_z$  uttrykt ved  $E_r$ ,  $E_\theta$  og  $\theta$ .
- d) Finn også  $\vec{E}(x, z)$  uttrykt i kartesiske koordinater ved å skrive om potensialet  $V$  uttrykt ved kartesiske koordinater,  $V = V(x, z)$ , og deretter bruke gradientoperatoren i kartesiske koordinater.

### Oppgave 2



Ladningen  $q$  er jevnt fordelt utover en (hul) halvkule med radius  $R$  som vist på figuren. Bestem den elektriske feltstyrken  $\vec{E}$  i sentrum av kula. (Tips: Bestem først bidraget fra ladningen på flatelementet  $dA$ . Alternativt kan en bruke kuleflatekoordinater  $\theta$  og  $\phi$ .) Hva blir det elektriske potensialet  $V$  på samme sted (når potensialet velges lik 0 i uendelig avstand)?

[Svar:  $E_z = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$  ]

*Oppgave 3. Differensielt element i kulekoordinater. (Lærerik matematikkøvelse!)*

I kartesiske koordinater er et infinitesimalt (differensielt) linjeelement gitt ved  $d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ , et infinitesimalt arealelement  $d\mathbf{A}$  henholdsvis  $dy dz \mathbf{i}$ ,  $dx dz \mathbf{j}$  og  $dy dx \mathbf{k}$  (dvs med retning normalt på flaten) og et infinitesimalt volumelement  $d\tau = dx dy dz$ .

Vis at i kulekoordinater  $(r, \theta, \phi)$  er de tilsvarende størrelser

- a)  $d\mathbf{s} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \mathbf{e}_\phi$
- b)  $d\mathbf{A}_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ ,  $d\mathbf{A}_\theta = r dr \sin\theta d\phi \mathbf{e}_\theta$ ,  $d\mathbf{A}_\phi = r dr d\theta \mathbf{e}_\phi$
- c)  $d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$

Tips: Tegn opp et infinitesimalt volumelement som avgrenses av flatene  $r$  og  $r+dr$ ,  $\theta$  og  $\theta+d\theta$ ,  $\phi$  og  $\phi+d\phi$ , og sammenlign med det tilsvarende for kartesiske koordinater.

( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  er enhetsvektorer i hhv x, y og z-retning, mens  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  er tilsvarende for  $r$ ,  $\theta$  og  $\phi$ )

d) Vis på grunnlag av formlene over at ei kule med radius  $R$  har volum  $(4/3)\pi R^3$  og overflateareal  $4\pi R^2$ .